УДК 517.925.5:519.216

# К задаче замыкания дифференциальных систем с вырождающейся диффузией

**Г. Т. Ибраева, М. И. Тлеубергенов**

*Лаборатория дифференциальных уравнений*
*Институт математики*
*Казахстан, 050010, Алматы, ул. Пушкина, 125*

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи замыкания в классе стохастических дифференциальных систем Ито первого порядка со случайными возмущениями из класса винеровских процессов и вырождающейся относительно части переменных диффузией.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, стохастические уравнения, интегральное многообразие, функция, вероятность, вектор.

## Введение

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1–7] и др. для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Так, в работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). В работах [2–7] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в [7].

В работах [8–10] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, решены:

1) **основная обратная задача динамики** — построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием;
2) **задача восстановления уравнений движения** — построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию;
3) **задача замыкания уравнений движения** — построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

Для разрешения обратных задач широко используется метод квазиобращения, в основе которого лежит Лемма 1 [7, с. 12–13].

**Лемма 1.** *Совокупность всех решений линейной системы*

$$Hv = g,\ H = (h_{\mu k}),\ v = (v_k),\ g = (g_\mu),\ \mu = \overline{1, m};\ k = \overline{1, n},\ m \leqslant n, \tag{1}$$

*где матрица $H$ имеет ранг, равный $m$, определяется выражением*

$$v = sv^\tau + v^\nu. \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 24.05.2007 г.

*Здесь $s$ — произвольная скалярная величина,*

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

*есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; $e_k$ — единичные орты пространства $R^n$, $v^\tau = (v_k^\tau)$, где*

$$v_k^\tau = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}, \quad v^\nu = H^+ g,$$

$H^+ = H^T(HH^T)^{-1}$, *$H^T$ — матрица, транспонированная к $H$.*

# 1. Постановка общей задачи построения замыкающих стохастических дифференциальных уравнений и её решение

Пусть задано множество

$$\varLambda(t): \ \lambda(y, z, v, w, t) = 0, \quad \text{где } \lambda \in R^m, \ \ \lambda = \lambda(y, z, v, w, t) \in C^{1\,2\,1\,2\,1}_{y\,z\,v\,w\,t} \qquad (3)$$

и система стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка вида

$$\begin{cases} \dot y = g_1(y, z, v, w, t), \\ \dot z = g_2(y, z, v, w, t) + \sigma_1(y, z, v, w, t)\dot\xi. \end{cases} \qquad (4)$$

Требуется достроить систему замыкающих уравнений вида

$$\begin{cases} \dot v = g_3(y, z, v, w, t), \\ \dot w = g_4(y, z, v, w, t) + \sigma_2(y, z, v, w, t)\dot\xi \end{cases} \qquad (5)$$

так, чтобы множество (3) было интегральным многообразием системы уравнений (4), (5). Здесь $y \in R^{l_1}$, $z \in R^{l_2}$, $v \in R^{p_1}$, $w \in R^{p_2}$, $l_1 + l_2 + p_1 + p_2 = n$, $\sigma$ — матрица $(p \times k)$, $\{\xi_1(t,\omega), \dots, \xi_k(t,\omega)\}$ — система независимых винеровских процессов [11], заданная на некотором вероятностном пространстве $(\varOmega, U, P)$. Искомые для решения поставленной задачи вектор-функции $g_1$, $g_2$, $g_3$, $g_4$ и матрицы $\sigma_1$, $\sigma_2$ предполагаются из класса $K$–множества функций, непрерывных по $t$ и липшицевых по $y$, $z$, $v$ и $w$ в области

$$U_H(\varLambda) = \{q = (y^T, z^T, v^T, w^T)^T: \ \rho(q, \varLambda(t)) < H, \quad H > 0\}. \qquad (6)$$

Поставленная задача обобщает рассмотренную в [10] задачу построения по заданному уравнению

$$\ddot x = f_1(x, \dot x, u, \dot u, t) + \sigma_1(x, \dot x, u, \dot u, t)\dot\xi \qquad (7)$$

и заданному множеству

$$\Lambda(t):\ \lambda(x,\dot x,u,\dot u,t)=0,\quad \text{где } \lambda\in R^m,\ \ \lambda=\lambda(x,\dot x,u,\dot u,t)\in C^{1\,2\,1\,2\,1}_{x\dot x,u\dot u,t} \tag{8}$$

стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot u = f_2(x,\dot x,u,\dot u,t)+\sigma_2(x,\dot x,u,\dot u,t)\dot\xi \tag{9}$$

так, чтобы множество (8) было интегральным многообразием системы уравнений (7), (9).

Для решения поставленной задачи построения замыкающей системы уравнений (5) по правилу Ито дифференцирования сложной функции [11] $\lambda = \lambda(y,z,v,w,t)$ в случае винеровского процесса имеем

$$\dot\lambda=\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)g_1+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)g_2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)g_3+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right)g_4+$$
$$+S_1+S_2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\sigma_1\dot\xi+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right)\sigma_2\dot\xi\,. \tag{10}$$

Здесь $S_1=\dfrac12\left[\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}:\sigma_1\sigma_1^T\right]$, $S_2=\dfrac12\left[\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial w^2}:\sigma_2\sigma_2^T\right]$, а под $\left[\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}:D_1\right]$ и $\left[\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial w^2}:D_2\right]$, следуя [11], понимаются вектора, элементами которых служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y,z,v,w,t)$ вектора по компонентам $z$, $w$ на матрицы $D_1$, $D_2$:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}:D_1=\begin{bmatrix}\operatorname{tr}\left(\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial z^2}D_1\right)\\ \vdots\\ \operatorname{tr}\left(\dfrac{\partial^2\lambda_m}{\partial z^2}D_1\right)\end{bmatrix},\quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial w^2}:D_2=\begin{bmatrix}\operatorname{tr}\left(\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial w^2}D_2\right)\\ \vdots\\ \operatorname{tr}\left(\dfrac{\partial^2\lambda_m}{\partial w^2}D_2\right)\end{bmatrix},$$

где $D_1=\sigma_1\sigma_1^T$, $D_2=\sigma_2\sigma_2^T$. Введём далее произвольные типа Еругина [1] $m$-мерную вектор-функцию $A$ и $(m\times k)$-матрицу $B$ со свойством: $A(0,y,z,v,w,t)\equiv 0$, $B(0,y,z,v,w,t)\equiv 0$ такие, что имеет место уравнение

$$\dot\lambda = A(\lambda,y,z,v,w,t)+B(\lambda,y,z,v,w,t)\dot\xi. \tag{11}$$

Сравнивая уравнения (10) и (11), приходим к следующим соотношениям

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial t}+\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\right)g_1+\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\right)g_2+\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\right)g_3+\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\right)g_4+S_1+S_2=A,\\ \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\sigma_1+\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\right)\sigma_2=B.\end{cases} \tag{12}$$

Равенства (12) перепишем в виде

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}g_3+\dfrac{\partial\lambda}{\partial w}g_4=A-\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial t}+\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}g_1+\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}g_2+S_1+S_2\right),\\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_2=B-\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1,\end{cases} \tag{13}$$

из которых нужно определить вектор-функции $g_3$,$g_4$ и матрицу $\sigma_2$. Положим $g_3=\eta(y,z,v,w,t)$, где $\eta\in K$. Тогда выражение (13) примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial w}g_4=A-\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial t}+\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}g_1+\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}g_2+S_1+S_2+\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\eta\right),\\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_2=B-\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1.\end{cases} \tag{14}$$

Из соотношений (14) по формуле (2) леммы 1 определим искомые вектор-функцию $g_4$ и матрицу $\sigma_2$ в виде

$$g_4 = s_1\left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}C\right] + \left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right]^+ b_1, \tag{15}$$

$$\sigma_{2i} = s_2\left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}C\right] + \left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right]^+ \widetilde{B_i}, \tag{16}$$

$$\left[\frac{\partial\lambda}{\partial w}C\right] = \begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial w_1} & \cdots & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial w_1} & \cdots & \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m+1,1} & \cdots & c_{m+1,n} \\ c_{m-1,1} & \cdots & c_{n+1,n} \end{vmatrix},$$

где

$$b_1 = A - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}g_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}g_2 + S_1 + S_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\eta\right), \quad \widetilde{B} = B - \frac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_1,$$

$\sigma_{2i}$ — $i$-й столбец матрицы $\sigma_2 = (\sigma_{2\nu j})$ ($\nu = \overline{1, p_2}$, $j = \overline{1, k}$); $\widetilde{B_i}$ — $i$-й столбец матрицы $\widetilde{B} = (\widetilde{B_{\mu l}})$ ($\mu = \overline{1, p_1}$, $l = \overline{1, k}$). Следовательно, справедлива Теорема 1:

**Теорема 1.** *Для того, чтобы система дифференциальных уравнений типа Ито* (4), (5) *имела заданное интегральное многообразие* (3), *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты замыкающих стохастических дифференциальных уравнений* (5), *вектор-функция* $g_4$ *и матрица* $\sigma_2$ *имели соответственно вид* (15) *и* (16).

# 2. Линейный случай обратной задачи замыкания

По заданному линейному множеству

$$\Lambda(t): \ \lambda \equiv H_1(t)y + H_2(t)z + H_3(t)v + H_4(t)w + h(t) = 0 \tag{17}$$

и системе стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{y} = \Phi_1(t)y + \Phi_2(t)z + \Phi_3(t)v + \Phi_4(t)w + \varphi(t), \\ \dot{z} = \Psi_1(t)y + \Psi_2(t)z + \Psi_3(t)v + \Psi_4(t)w + \psi(t) + T_1(t)\dot{\xi} \end{cases} \tag{18}$$

требуется достроить линейную замыкающую стохастическую систему уравнений первого порядка с вырожденной по части переменных диффузией вида

$$\begin{cases} \dot{v} = G_1(t)y + G_2(t)z + G_3(t)v + G_4(t)w + g(t), \\ \dot{w} = U_1(t)y + U_2(t)z + U_3(t)v + U_4(t)w + u(t) + T_2(t)\dot{\xi}, \end{cases} \tag{19}$$

для которой множество (17) являлось бы интегральным многообразием, иначе говоря, по заданным матрицам $H_1(t)$, $H_2(t)$, $H_3(t)$, $H_4(t)$, $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$, $\Phi_4(t)$, $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, $\Psi_3(t)$, $\Psi_4(t)$ и функциям $h(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ требуется определить матрицы $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)$, $G_4(t)$, $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$, $U_4(t)$ и вектор-функции $g(t)$ и $u(t)$, а также матрицу $T_2(t)$ так, чтобы для системы уравнений (18), (19) заданные свойства (17) являлись интегральным многообразием.

В рассматриваемой задаче уравнение возмущённого движения (10) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot\lambda = \dot h(t) + H_1(t)\dot y + \dot H_1(t)y +\\ + H_2(t)\dot z + \dot H_2(t)z + H_3(t)\dot v + \dot H_3(t)v + H_4(t)\dot w + \dot H_4(t)w =\\ = \dot h(t) + H_1(t)\left[\Phi_1(t)y + \Phi_2(t)z + \Phi_3(t)v + \Phi_4(t)w + \varphi(t)\right] +\\ + \dot H_1(t)y + H_2(t)\left[\Psi_1(t)y + \Psi_2(t)z + \Psi_3(t)v + \Psi_4(t)w + \psi(t)\right] +\\ + \dot H_2(t)z + H_3(t)\left[G_1(t)y + G_2(t)z + G_3(t)v + +G_4(t)w + g(t)\right] +\\ + \dot H_3(t)v + H_4(t)\left[U_1(t)y + U_2(t)z + U_3(t)v + U_4(t)w + u(t)\right] +\\ + \dot H_4(t)w + (H_2(t)T_1(t) + H_4(t)T_2(t))\dot\xi, \end{aligned} \tag{20}$$

а, с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A = A_1(t)\lambda$ и матрицы-функции $B_1$ со свойством $B_1(0, y, z, v, w, t) \equiv 0$ имеем

$$\dot\lambda = A_1\lambda + B_1\dot\xi. \tag{21}$$

Тогда из соотношений (20) и (21) следуют равенства:

$$\begin{aligned}A_1H_1(t)y + A_1H_2(t)z + A_1H_3(t)v + A_1H_4(t)w + A_1h(t) =\\ = \dot h(t) + H_1(t)\left[\Phi_1(t)y + \Phi_2(t)z + \Phi_3(t)v + \Phi_4(t)w + \varphi(t)\right] +\\ + \dot H_1(t)y + H_2(t)\left[\Psi_1(t)y + +\Psi_2(t)z + \Psi_3(t)v + \Psi_4(t)w + \psi(t)\right] +\\ + \dot H_2(t)z + H_3(t)\left[G_1(t)y + G_2(t)z + G_3(t)v + G_4(t)w + g(t)\right] +\\ + \dot H_3(t)v + H_4(t)\left[U_1(t)y + U_2(t)z + U_3(t)v + U_4(t)w + u(t)\right] + \dot H_4(t)w,\end{aligned}$$

$$B_1 = H_2(t)T_1(t) + H_4(t)T_2(t),$$

которые преобразуются к виду:

$$\begin{cases} H_3(t)G_1(t) + H_4(t)U_1(t) = A_1H_1(t) - \Big(H_1(t)\Phi_1(t) + H_2(t)\Psi_1(t) + \dot H_1(t)\Big), \\ H_3(t)G_2(t) + H_4(t)U_2(t) = A_1H_2(t) - \Big(H_2(t)\Phi_2(t) + H_2(t)\Psi_2(t) + \dot H_2(t)\Big), \\ H_3(t)G_3(t) + H_4(t)U_3(t) = A_1H_3(t) - \Big(H_1(t)\Phi_3(t) + H_2(t)\Psi_3(t) + \dot H_3(t)\Big), \\ H_3(t)G_4(t) + H_4(t)U_4(t) = A_1H_4(t) - \Big(H_1(t)\Phi_4(t) + H_2(t)\Psi_4(t) + \dot H_4(t)\Big), \\ H_3(t)g(t) + H_4(t)u(t) = A_1h(t) - \Big(H_1(t)\varphi(t) + H_2(t)\psi(t) + \dot h(t)\Big), \\ H_4(t)T_2(t) = B_1 - H_2(t)T_1(t). \end{cases} \tag{22}$$

Пусть $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)$, $G_4(t)$ — произвольно заданные непрерывные матрицы соответственно порядка $(p_1 \times l_1)$, $(p_1 \times l_2)$, $(p_1 \times p_1)$, $(p_1 \times p_2)$, а $g(t)$ — произвольно заданная непрерывная вектор-функция, тогда (22) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} H_4(t)U_1(t) = A_1H_1(t) - \Big(H_1(t)\Phi_1(t) + H_2(t)\Psi_1(t) + \dot H_1(t) - H_3(t)G_1(t)\Big), \\ H_4(t)U_2(t) = A_1H_2(t) - \Big(H_2(t)\Phi_2(t) + H_2(t)\Psi_2(t) + \dot H_2(t) - H_3(t)G_2(t)\Big), \\ H_4(t)U_3(t) = A_1H_3(t) - \Big(H_1(t)\Phi_3(t) + H_2(t)\Psi_3(t) + \dot H_3(t) - H_3(t)G_3(t)\Big), \\ H_4(t)U_4(t) = A_1H_4(t) - \Big(H_1(t)\Phi_4(t) + H_2(t)\Psi_4(t) + \dot H_4(t) - H_3(t)G_4(t)\Big), \\ ]H_4(t)T_2(t) = B_1 - H_2(t)T_1(t). \end{cases} \tag{23}$$

По лемме 1 совокупность всех решений системы уравнений (18), (19) на основании (23) примет вид:

$$\begin{cases} U_1(t) = s_1\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,M_1, \\ U_2(t) = s_2\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,M_2, \\ U_3(t) = s_3\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,M_3, \\ U_4(t) = s_4\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,M_4, \\ u(t) = s_5\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,M_5, \\ T_{2i}(t) = s_6\,[H_4(t)C] + [H_4(t)]^+\,B_i, \end{cases} \tag{24}$$

где $s_\mu$ ($\mu = 1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6$) — произвольные скалярные величины,

$$\begin{aligned} M_1 &= A_1H_1(t) - \Big(H_1(t)\varPhi_1(t) + H_2(t)\varPsi_1(t) + \dot H_1(t) - H_3(t)G_1(t)\Big), \\ M_2 &= A_1H_2(t) - \Big(H_1(t)\varPhi_2(t) + H_2(t)\varPsi_2(t) + \dot H_2(t) - H_3(t)G_2(t)\Big), \\ M_3 &= A_1H_3(t) - \Big(H_1(t)\varPhi_3(t) + H_2(t)\varPsi_3(t) + \dot H_3(t) - H_3(t)G_3(t)\Big), \\ M_4 &= A_1H_4(t) - \Big(H_1(t)\varPhi_4(t) + H_2(t)\varPsi_4(t) + \dot H_4(t) - H_3(t)G_4(t)\Big), \\ M_5 &= A_1h(t) - \Big(H_1(t)\varphi(t) + H_2(t)\psi(t) + \dot h(t) - H_3(t)g(t)\Big), \end{aligned}$$

$T_{2i}$ – $i$-й столбец матрицы $T = (T_{2\nu j})$, ($\nu = \overline{1,p_2},\ \ j = \overline{1,k}$).
Тем самым доказана Теорема 2:

**Теорема 2.** *Для того, чтобы стохастическая система линейных дифференциальных уравнений первого порядка Ито* (18), (19) *имела заданное линейное интегральное многообразие* (17), *необходимо и достаточно, чтобы при произвольно заданных непрерывных матрицах* $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)$, $G_4(t)$ *и вектор-функции* $g(t)$ *матрицы* $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$, $U_4(t)$, $T_2(t)$ *и вектор-функция* $u(t)$ *имели соответственно вид* (24).

## 3. Скалярный нелинейный случай обратной задачи замыкания

По заданному множеству

$$\varLambda(t):\ \eta(y,u,z,v,t) = 0, \quad \text{где} \quad \eta \in R^1, \tag{25}$$

и системе стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot y = w_1(y,u,z,v,t), \\ \dot u = w_2(y,u,z,v,t) + \gamma_1(y,u,z,v,t)\dot\xi \end{cases} \tag{26}$$

требуется достроить замыкающую систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot z = w_3(y,u,z,v,t), \\ \dot v = w_4(y,u,z,v,t) + \gamma_2(y,u,z,v,t)\dot\xi, \end{cases} \tag{27}$$

где $\xi = \xi(t,\omega)$ — скалярный винеровский процесс [11], так, чтобы множество (25) было интегральным многообразием системы уравнений (26), (27). Задача заключается в определении функций $w_3$, $w_4$ и $\gamma_2$ по заданным функциям $w_1$, $w_2$, $\gamma_1$ и заданному интегральному многообразию $\eta(y,u,z,v,t) = 0$.

Дифференцируя сложную функцию $\eta = \eta(y, u, z, v, t)$ по правилу стохастического дифференцирования Ито [11] в случае винеровского процесса имеем

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial y} w_1 + \frac{\partial \eta}{\partial u} w_2 + \frac{\partial \eta}{\partial z} w_3 + \frac{\partial \eta}{\partial v} w_4 = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right)\dot{\xi}. \quad (28)$$

Далее, следуя методу Еругина [1], введём скалярные функции $a = a(\eta, y, u, z, v, t)$ и $b = b(\eta, y, u, z, v, t)$, $a(0, y, u, z, v, t) \equiv b(0, y, u, z, v, t) \equiv 0$ такие, что имеет место равенство

$$\dot{\eta} = a + b\dot{\xi}. \quad (29)$$

Из (28) и (29) следуют соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} w_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial u} w_2 + \dfrac{\partial \eta}{\partial z} w_3 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v} w_4 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right) = a, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2 = b, \end{cases}$$

которые перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial z} w_3 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v} w_4 = a - \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} w_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial u} w_2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right)\right), \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2 = b - \dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1. \end{cases} \quad (30)$$

Положим $w_3 = w(y, u, z, v, t)$, где $w \in K$. Тогда из (30) следует справедливость соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial v} w_4 = a - \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} w_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial u} w_2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right) - \dfrac{\partial \eta}{\partial z} w_3\right), \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2 = b - \dfrac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1. \end{cases} \quad (31)$$

Из (31) в предположении, что $\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial v}\right)^{-1} \neq 0$, имеем

$$\begin{cases} w_4 = \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial v}\right)^{-1} a_1\,, \\ \gamma_2 = \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial v}\right)^{-1} b_1, \end{cases} \quad (32)$$

где

$$a_1 = a - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\omega_1 + \frac{\partial \eta}{\partial u}\omega_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\gamma_2\right) - \frac{\partial \eta}{\partial z}\omega_3\right),$$

$$b_1 = b - \frac{\partial \eta}{\partial u}\gamma_1.$$

Соотношения (32) представляют собой решение стохастической задачи замыкания — задачи построения замыкающих уравнений (27) по заданному интегральному многообразию (25) и заданному уравнению (26).

Таким образом, в обратной задаче замыкания при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов в общем нелинейном, линейном, а также скалярном нелинейном случаях построены множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка с вырождающейся по части переменных диффузией и обладающих заданным интегральным многообразием.

# Литература


1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. — Т. 10, вып. 16. — 1952. — С. 659–670.
2. Построение систем программного движения / А. С. Галиуллин, И. А. Мухаметзянов, Р. Г. Мухарлямов, В. Д. Фурасов. — М., 1971.
3. *Галиуллин А. С.* К задаче построения систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — Т. 6, № 8. — 1970. — С. 1343–1348.
4. *Галиуллин А. С.* Построение поля сил по заданному семейству траекторий // Дифференциальные уравнения. — Т. 7, № 8. — 1981. — С. 1487–1489.
5. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М., 1986.
6. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика». — № 1. — 1994. — С. 5–21.
7. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференциальные уравнения. — Т. 39, № 3. — 2003. — С. 343–353.
8. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной стохастической задаче динамики // Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика». — № 1. — 1999. — С. 48–51.
9. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. — Т. 37, № 5. — 2001. — С. 714–716.
10. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной стохастической задаче замыкания // Доклады МН–АН РК. — № 1. — 1999. — С. 53–60.
11. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М., 1990.


UDC 517.925.5:519.216

## To the Problem of Closure of Differential Systems with Degenerating Diffusion

**G. T. Ibraeva, M. I. Tleubergenov**

*Laboratory of Differential Equations*
*Institute of Mathematics*
*125, Pushkin str., Almaty, 050010, Kazakhstan*

Necessary and sufficient conditions of inverse problem of closure in the class of Ito stochastic first order differential systems with random disturbances are received.