# Математика

УДК 517.917

## О построении неавтономной системы дифференциальных уравнений по заданной совокупности частных интегралов

**О. В. Ибушева**

*Кафедра автоматизации технологических процессов и производств*
*Нижнекамский химико-технологический институт*
*Россия, Татарстан, 423570, г. Нижнекамск, ул.Строителей, 47*

Предлагается метод построения неавтономной системы дифференциальных уравнений с заданными свойствами решений. Определяются условия устойчивости множества решений системы. Рассматривается задача построения системы дифференциальных уравнений второго порядка по заданным частным решениям на плоскости.

**Ключевые слова:** построение, структура, дифференциальные уравнения, множество, неавтономная, устойчивость, функция Ляпунова.

## Введение

Задача построения системы дифференциальных уравнений по заданным частным интегралам рассмотрена в [1, 2]. В [1] дан метод построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую на плоскости, и проведён подробный анализ построенной системы. В [2] строится множество систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегральные многообразия, и определяется конструкция систем дифференциальных уравнений из условия устойчивости этих многообразий. В [3, 4] решается задача построения автономных систем дифференциальных уравнений по заданному распределению фазовых траекторий. В частности, в [4] определяются условия устойчивости интегральных многообразий, предложен метод выбора коэффициентов, предусмотренных в конструкции системы, исходя из вида интегральных кривых и особых точек. В данной работе рассматривается задача построения неавтономной системы дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы. Определяется структура системы уравнений второго прядка из условий устойчивости решений относительно заданных подвижных точек и кривых на плоскости.

## 1. Определение структуры множества систем дифференциальных уравнений

Как известно, первым интегралом системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi(x, t) \tag{1}$$

является функция $\omega(x, t) = C$, для которой выполняется равенство

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\varphi(x, t) + \frac{\partial \omega}{\partial t} \equiv 0$$

Статья поступила в редакцию 10.11.2007 г.

при любых начальных условиях $x(t_0) = x^0$ из области значений переменной $x$. Если выполняется равенство

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\varphi(x,t) + \frac{\partial \omega}{\partial t} = F(\omega, x, t), \tag{2}$$

$$F(0,x,t) = 0 \quad \text{при } C = 0,$$

то функция $\omega(x,t) = 0$ представляет собой частный интеграл системы (1).

Пусть функция $\omega(x,t) = 0$ представляет собой произведение $n$ функций $\omega = \omega_0\omega_1 \ldots \omega_n\omega_{n+1}$, где $\omega_0 \equiv 1$, $\omega_{n+1} \equiv 1$. Тогда каждая функция $\omega_i(x,t) = 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ является частным интегралом системы (1), если $F(\omega,x,t)$ обращается в нуль при выполнении условий $\omega_i(x,t) = 0$ для всех $i = 1,\ldots,n$.

Пусть в некоторой области $G$ плоскости $xOy$ заданы непрерывные, дифференцируемые функции $\omega_i(x,y,t) = 0$ $(i = 1,\ldots,n)$, определяющие либо замкнутые кривые, либо отдельные кривые, которые могут пересекаться, либо отдельные точки. Рассмотрим задачу построения системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= X(x,y,t), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= Y(x,y,t), \end{aligned} \tag{3}$$

имеющей заданные функции $\omega_i(x,y,t)$ $(i = 1,\ldots,n)$ своими частными интегралами. Если начальные условия $x(t_0) = x^0$, $y(t_0) = y^0$ удовлетворяют соотношению $\omega_i(x_0,y_0,t_0) = 0$, то в силу единственности решения при $t > t_0$ решение системы (3) будет удовлетворять условию

$$\omega_i(x(t),y(t),t) = 0, \quad (i = 1,\ldots,n). \tag{4}$$

Если начальные условия не удовлетворяют этому соотношению, то в зависимости от того, как будет определяться функция $F(\omega,x,y,t)$ в уравнении (2), траектории будут либо приближаться к кривой (4), либо удаляться от неё.

Общая структура систем дифференциальных уравнений, допускающих частные интегралы (4), определяется в виде [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= P_1(x,y,t) - Q(x,y,t)\omega_y - \frac{\omega_x\omega_t}{\omega_x^2 + \omega_y^2}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} &= P_2(x,y,t) + Q(x,y,t)\omega_x - \frac{\omega_y\omega_t}{\omega_x^2 + \omega_y^2}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $P_1(x,y,t)$, $P_2(x,y,t)$ — непрерывные функции, обращающиеся в нуль вдоль кривых (4), $Q(x,y,t)$ — произвольная непрерывная функция, $\omega_x = \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$, $\omega_y = \dfrac{\partial \omega}{\partial y}$, $\omega_t = \dfrac{\partial \omega}{\partial t}$. Рассмотрим систему уравнений (5), где функции $P_1(x,y,t)$, $P_2(x,y,t)$ определены в виде [4]:

$$\begin{aligned} P_1(x,y,t) &= P(x,y,t)\sum_{s=1}^{n} \omega_0\omega_1 \ldots \omega_{s-1}(\alpha_s\omega_{sx} + \beta_s\omega_{sy})\omega_{s+1}\ldots\omega_n\omega_{n+1}, \\ P_2(x,y,t) &= P(x,y,t)\sum_{s=1}^{n} \omega_0\omega_1 \ldots \omega_{s-1}(\gamma_s\omega_{sx} + \delta_s\omega_{sy})\omega_{s+1}\ldots\omega_n\omega_{n+1}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $P(x,y,t)$ — произвольная непрерывная функция, $\alpha_s$, $\beta_s$, $\gamma_s$, $\delta_s$ — произвольные коэффициенты.

# 2. Определение условий устойчивости интегральных многообразий

Выбором коэффициентов, введённых в выражения (6), кривую или точку, определяемые уравнением $\omega_i(x,y,t)=0$, можно сделать устойчивой или неустойчивой. Для этого составим функцию Ляпунова

$$V_i = \frac{1}{2}[\omega_i(x,y,t)]^2$$

и вычислим её производную с учётом (5), (6). Она будет равна:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i \Bigg[ P(x,y,t)\omega_i \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} (\alpha_s\omega_{sx}\omega_{ix} + \beta_s\omega_{sy}\omega_{ix} + \gamma_s\omega_{sx}\omega_{iy} + \delta_s\omega_{sy}\omega_{iy})\omega_{(is)} + \\ + P(x,y,t)(\alpha_i\omega_{ix}^2 + (\beta_s+\gamma_s)\omega_{ix}\omega_{iy} + \delta_i\omega_{iy}^2)\omega_{(i)} + \\ + Q(x,y,t)\omega_i \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} (\omega_{sx}\omega_{iy} - \omega_{sy}\omega_{ix})\omega_{is} + \omega_{it} - \\ - \frac{(1 - U(\omega_i,\omega_i^2) + U(\omega_i,\omega_i^2)^2 - \ldots)}{(\omega_{ix}^2+\omega_{iy}^2)\omega_{(i)}^2}\left(\omega_{it}\omega_{(i)} + \omega_i\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n}\omega_{st}\omega_{is}\right)\times \\ \times\left((\omega_{ix}^2+\omega_{iy}^2)\omega_{(i)} + \omega_i\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n}(\omega_{sx}\omega_{ix} + \omega_{xy}\omega_{iy})\omega_{(is)}\right)\Bigg],\end{aligned}$$

где $\omega_i = \omega_0\omega_1\ldots\omega_{i-1}\omega_{i+1}\ldots\omega_n\omega_{n+1}$,

$$\begin{aligned}U(\omega_i,\omega_i^2) = \frac{2\omega_i}{(\omega_{ix}^2+\omega_{iy}^2)\omega_{(i)}}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n}(\omega_{sx}\omega_{ix} + \omega_{xy}\omega_{iy})\omega_{(is)} + \\ + \frac{\omega_i^2}{(\omega_{ix}^2+\omega_{iy}^2)\omega_{(i)}^2}\left[\Big(\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n}\omega_{sx}\omega_{(is)}\Big)^2 + \big(\omega_{xy}\omega_{(is)}\big)^2\right].\end{aligned}$$

Коэффициенты $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$ можно выбрать так, чтобы

$$P(x,y,t)(\alpha_i\omega_{ix}^2 + (\beta_s+\gamma_s)\omega_{ix}\omega_{iy} + \delta_i\omega_{iy}^2)\omega_{(i)} = \lambda_i\omega_i, \tag{7}$$

где $\lambda_i$ — некоторый коэффициент. Учитывая (7), выражение $\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}$ можно записать в виде:

$$\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = h_i(x,y,t)\omega_i^2 + \Omega_i^{(3)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}h_i(x,y,t) = P(x,y,t)\omega_i \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} (\alpha_s\omega_{sx}\omega_{ix} + \beta_s\omega_{sy}\omega_{ix} + \gamma_s\omega_{sx}\omega_{iy} + \delta_s\omega_{sy}\omega_{iy})\omega_{(is)} + \\ + \lambda_i + Q(x,y,t)\omega_i \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n} (\omega_{sx}\omega_{iy} - \omega_{sy}\omega_{ix})\omega_{is} +\end{aligned}$$

$$+\frac{\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{n}(\omega_{sx}\omega_{ix}\omega_{it}+\omega_{sy}\omega_{iy}\omega_{it}-\omega_{ix}^2\omega_{st}-\omega_{iy}^2\omega_{st})\omega_{(si)}}{(\omega_{ix}^2+\omega_{iy}^2)\omega_{(i)}},$$

где $\Omega_i^{(3)}$ — совокупность членов, содержащих множитель $\omega_i$ в степени не ниже третьей.

Из полученного выражения видно, что судить об устойчивости интегральной кривой $\omega_i = 0$ можно по знаку выражения $h_i(x, y, t)$. Если функции $P(x, y, t)$, $Q(x, y, t)$ и коэффициенты $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$ выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие $h_i(x, y, t) < 0$, то производная $\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}$ отрицательна всюду в $\varepsilon$-окрестности кривой $\omega_i = 0$ и равна нулю на этой кривой. Таким образом, выполнены условия теоремы об устойчивости интегрального многообразия [5], и интегральная кривая будет устойчива.

Если произвольная функция $h_i(x, y, t)$ является непрерывной и ограниченной при всех $t \geqslant t_0$, то функция $V_i$ ограничена, допускает бесконечно малый высший предел и $V_i > 0$ всюду в $\varepsilon$-окрестности кривой $\omega_i = 0$. При выполнении условия $h_i(x, y, t) > 0$ производная $\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}$ принимает отрицательные значения. Следовательно, удовлетворяются условия асимптотической устойчивости многообразия [5] и интегральная кривая $\omega_i = 0$ будет устойчива асимптотически.

Пусть теперь $\lambda_i$ выбрано так, что

$$h_i(x, y, t) \geqslant v_i > 0,$$

где $v_i$ — некоторая постоянная. Тогда производная $\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}$ может быть представлена в виде

$$\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = v_i V_i + \Omega_i,$$

где $\Omega_i = h_i(x, y, t)\omega_i^2 + \Omega_i^{(3)}$ есть неотрицательная в $\varepsilon$-окрестности кривой $\omega_i = 0$ функция. Так как функция $V_i$ допускает бесконечно малый высший предел и $V_i > 0$ всюду в $\varepsilon$-окрестности кривой $\omega_i = 0$, то выполнены условия неустойчивости многообразия [5] и рассматриваемая интегральная кривая $\omega_i = 0$ в этом случае является неустойчивой.

В случае, если две кривые пересекаются в точке $A_{jk}$, то функции $P(x, y, t)$, $Q(x, y, t)$ и коэффициенты $\alpha_j$, $\beta_j$, $\gamma_j$, $\delta_j$, $\alpha_k$, $\beta_k$, $\gamma_k$, $\delta_k$ можно выбрать так, чтобы производные $\frac{\mathrm{d}\omega_j}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\omega_k}{\mathrm{d}t}$ были представлены в виде [4]:

$$\frac{\mathrm{d}\omega_j}{\mathrm{d}t} = \lambda_j\omega_j + \Omega_j^{(2)},$$
$$\frac{\mathrm{d}\omega_k}{\mathrm{d}t} = \lambda_k\omega_k + \Omega_k^{(2)}.$$

Тогда при $\lambda_j, \lambda_k < 0$ подвижная точка $A_{jk}$ является устойчивой, при $\lambda_j > 0$ или $\lambda_k > 0$ — неустойчивой.

## 3. Пример

Построить систему дифференциальных уравнений, обеспечивающую движение из произвольной точки $(x_0, y_0)$ плоскости $xOy$ к точке, совершающей движение по закону $x = -2kt$, $y = 0$. Траектория движения должна огибать препятствие, уравнение движения которого задано в виде:

$$(x - 2 + kt)^2 + 4y^2 = 1.$$

Частными интегралами искомой системы являются функции:

$$\omega_1(x,y,t) \equiv x + 2kt = 0, \quad \omega_2(x,y,t) \equiv y = 0,$$
$$\omega_3(x,y,t) \equiv \frac{1}{2}((x-2+kt)^2 + 4y^2 - 1) = 0.$$

Функция $\omega(x,y,t)$ примет вид $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3$.

Система уравнений (5) с учётом (6) запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Q\dfrac{\partial\omega}{\partial y} - \dfrac{\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\dfrac{\partial\omega}{\partial t}}{\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2} + \\ \qquad + P\left(\left(\alpha_1\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x} + \beta_1\dfrac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)\omega_2\omega_3 + \omega_1\left(\alpha_2\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x} + \beta_2\dfrac{\partial\omega_2}{\partial y}\right)\omega_3\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - \dfrac{\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\dfrac{\partial\omega}{\partial t}}{\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2} + \\ \qquad + P\left(\left(\gamma_1\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x} + \delta_1\dfrac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)\omega_2\omega_3 + \omega_1\left(\gamma_2\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x} + \delta_2\dfrac{\partial\omega_2}{\partial y}\right)\omega_3\right). \end{cases} \tag{8}$$

Учитывая, что

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\omega_1}{\partial x} = 1, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial\omega_3}{\partial x} = x - 2 + k\,, \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial y} = 1, & \dfrac{\partial\omega_3}{\partial y} = 4y\,, \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial t} = k, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial k} = 0, & \dfrac{\partial\omega_3}{\partial y} = k(x-2+k), \end{array}$$

уравнение (8) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{(\omega_2\omega_3 + (x-2+kt)\omega_1\omega_2)(k\omega_2\omega_3 + k(x-2+kt)\omega_1\omega_2)}{(\omega_2\omega_3 + (x-2+kt)\omega_1\omega_2)^2 + (\omega_1\omega_3 + 4y\omega_1\omega_2)^2} + \\ \qquad + P(\alpha_1\omega_2 + \beta_2\omega_1)\omega_3 - Q(\omega_1\omega_3 + 4y\omega_1\omega_2), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{(\omega_1\omega_3 + 4y\omega_1\omega_2)(k\omega_2\omega_3 + k(x-2+kt)\omega_1\omega_2)}{(\omega_2\omega_3 + (x-2+kt)\omega_1\omega_2)^2 + (\omega_1\omega_3 + 4y\omega_1\omega_2)^2} + \\ \qquad + P(\gamma_1\omega_2 + \delta_2\omega_1)\omega_3 - Q(\omega_2\omega_3 + (x-2+kt)\omega_1\omega_2). \end{cases} \tag{9}$$

Определим значения коэффициентов $\alpha_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\delta_2$, следуя [4]. Чтобы точка пересечения прямых $\omega_1(x,y,t) = 0$, $\omega_2(x,y,t) = 0$ была устойчивой, коэффициенты $\alpha_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\delta_2$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ необходимо подчинить условиям:

$$\alpha_1 = \delta_2 = 0, \quad \gamma_1 = -\beta_1, \quad \gamma_2 = -\beta_2,$$
$$(Q - P\beta_1)\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\frac{\partial\omega_2}{\partial y} - \frac{\partial\omega_1}{\partial y}\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)\omega_3(0,-2kt,0) = \lambda_2,$$
$$(Q - P\beta_2)\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\frac{\partial\omega_2}{\partial y} - \frac{\partial\omega_1}{\partial y}\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)\omega_3(0,-2kt,0) = \lambda_1,$$
$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Полагая $P = 2$, $Q = 1$ и $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, получим:

$$\beta_2 = \frac{1}{6}, \quad \gamma_1 = -\frac{7}{6}.$$

Подставляя значения $P$, $Q$ и коэффициентов $\alpha_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\delta_2$ в (9), можно получить окончательный вид системы. Фазовый портрет системы и её решение при $k = 0,1$ изображены на рис. 1, 2. При $k = 0$ система (8) приобретает стационарный вид. Соответствующий такому случаю пример рассмотрен в [6].

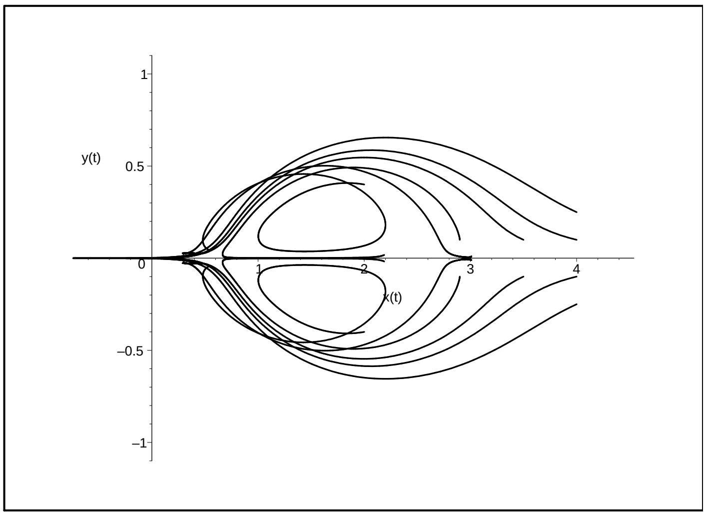


Рис. 1. Фазовый портрет системы

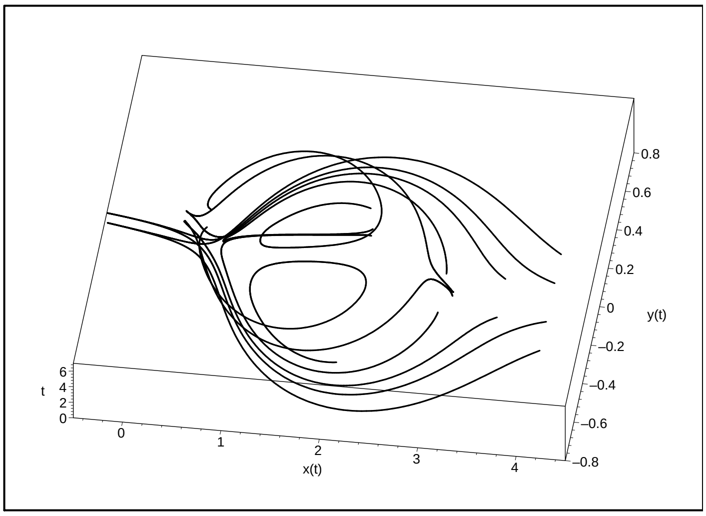


Рис. 2. Решение системы при $k = 0,1$

# Заключение

Таким образом, множество систем дифференциальных уравнений, определённых структурой (5), имеет заданные подвижные особые точки и предельные множества. Варьируя коэффициентами в выражениях (6), можно добиться выполнения условий устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости рассматриваемых интегральных кривых.

# Литература

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. — Т. 10, вып. 16. — 1952. — С. 659–670.
2. *Мухарлямов Р. Г.* Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы // Дифференциальные уравнения. — Т. 3, № 2. — 1967.
3. *Альмухамедов М. И.* О конструировании дифференциального уравнения, имеющего своими предельными циклами заданные кривые // Изв. вузов. Математика. — № 1. — 1965.
4. *Мухарлямов Р. Г.* К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — Т. 3, № 10. — 1967.
5. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференциальные уравнения. — Т. 5, № 4. — 1969.
6. *Мухарлямов Р. Г.* Уравнения движения механических систем. Учеб. пособие. — М.: Изд–во РУДН, 2001. — 99 с.

UDC 517.917

## About Construction of No Autonomous System of Differential Equations on Given Particular Integrals

**O. V. Ibusheva**

*Department of Automation and Control System*
*Chemist-Technological Institute of Nizhnekamsk*
*47, Stroiteley str., Nizhnekamsk, Tatarstan, 423570, Russia*

The present paper recommends method of construction of no autonomous system of differential equations with given properties of particular solutions. The conditions of stability of the set of system's solutions are defined. The problem of construction of two-order system of differential equations on given particular solution is considered.