Теоретическая механика

УДК 539.9

Кручение многослойного призматического анизотропного стержня, составленного из ортотропных материалов

А. У. Нуримбетов

Кафедра механики машин и механизмов
МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского
Россия, 117513, Москва, ул. Оршанская, 3

Проведено исследование особенности распределения напряжений и перемещений в отдельных слоях многослойного анизотропного стержня. Полученные результаты позволяет оценить работоспособность слоистой конструкции при кручении.

Ключевые слова: кручение; анизотропный ортотропный слоистый стержень.

1. Введение

Известно, что отыскание точного решения задачи о кручении анизотропных слоистых стержней произвольной формы поперечного сечения сопряжено с большими математическими трудностями.

В работах [1–3] изложены общие методы решения задач о кручении составных стержней, приведены решения ряда конкретных задач и дана обширная библиография. В [1] решена задача о кручении многослойного стержня, составленного из изотропных материалов, а в [2,3] — из ортотропных материалов для прямоугольного сечения. При решении задач о кручении многослойного стержня с поперечным сечением сложной формы в [2,3] материал стержня представляется в виде однородного анизотропного тела с «эффективными» по всему поперечному сечению механическими характеристиками. При этом, не учитывается слоистая структура материала стержня, не позволяя, тем самым, оценить влияние на характеристики деформирования при кручении месторасположения слоя с теми или иными свойствами. Интегральные характеристики не позволяют сформулировать и решить задачу о выборе оптимальной структуры сечения, обеспечивающей, например, ему наибольшую жёсткость на кручение. Формулировка задач об определении н.д.с. цилиндрических стержней, работающих на кручение, весьма мало отличается друг от друга [1–3]. Тем не менее в литературе трудно отыскать решения и формулировки этих задач для слоистых анизотропных стержней произвольного сечения. Поэтому в работе рассматривается общая постановка задачи о кручении составных анизотропных стержней произвольного поперечного сечения.

2. Постановка задачи

Пусть дано постоянное по длине поперечное сечение составного стержня, образованного из N слоев $R_1, R_2, \ldots, R_N$, которым соответствуют различные упругие постоянные C'^{i}_{44} и C'^{i}_{55} $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Боковая поверхность стержня свободна от нагрузки [4]

$$\mathrm{X}_\nu = \mathrm{У}_\nu = Z_\nu = 0, \tag{1}$$

а нагрузка, действующая по торцам, статически эквивалентна крутящему моменту M_t. Обозначим через L внешний контур всего сечения, L_i — контуры слоя R_i и L_{ij} линия раздела между слоями R_i и R_j. Линия раздела смежных слоев L_{ij}

Статья поступила в редакцию 19 марта 2009 г.

внутри сечения или пересекает внешний контур L под углом, не равным нулю (рис. 1). В этом случае граничные условия на боковой поверхности запишутся в виде [4]

$$\sigma_{11}l_1 + \sigma_{12}l_2 = X_\nu, \quad \sigma_{12}l_1 + \sigma_{22}l_2 = Y_\nu, \quad \sigma_{13}l_1 + \sigma_{23}l_2 = Z_\nu, \tag{2}$$

и на торцевых поверхностях [4]

$$\begin{gathered}\iint\limits_F \sigma_{33}\,\mathrm{d}f = P, \quad \iint\limits_F x\sigma_{33}\,\mathrm{d}f = -M_1, \quad \iint\limits_F y\sigma_{33}\,\mathrm{d}f = M_2,\\ \iint\limits_F \sigma_{13}\,\mathrm{d}f = 0, \quad \iint\limits_F \sigma_{23}\,\mathrm{d}f = 0, \quad \iint\limits_F (x\sigma_{23} - y\sigma_{13}\,\mathrm{d}f = M_t,\end{gathered} \tag{3}$$

где P, M_1, M_2, M_t — силы и моменты, действующие в поперечном сечении стержня, $l_1 = \cos(\mathbf{v}, x)$, $l_2 = \cos(\mathbf{v}, y)$ — направляющие косинусы.

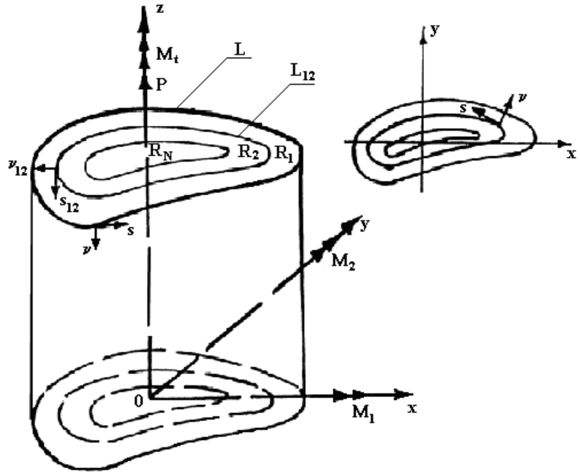


Рис. 1. **Цилиндрический стержень**

Для решения задачи, описываемой уравнениями [5]

$$\sigma^i_{mn} = C'^i_{mnri}\varepsilon^j_{kj} + \beta^i_{mn}T^i, \quad (m,\ n,\ k,\ j = 1, \ldots, 6) \tag{4}$$

с граничными условиями (1)–(3), используется полуобратный метод Сен-Венана [4].

Исходя из граничных условий (1) предполагается, что в слоистом стержне качественная картина распределения напряжений не отличается от картины в случае однородного тела, т. е. из шести компонент тензора напряжений σ^i_{kj} (k, $j = 1, 2, 3$), входящих в выражение (4), по-прежнему только две не равны нулю в любой точке сечения стержня — $\sigma^i_{\mathrm{x}z}$ и σ^i_{yz}. Тогда уравнения равновесия для слоя i запишутся в виде [6]

$$\frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} + \frac{C'^i_{44}}{C'^i_{55}}\frac{\partial^2 W^i}{\partial y^2} = Z^i_3(x, y), \tag{5}$$

$$Z^i_3(x, y) = \frac{2C'^i_{35}a'^i_{33}}{C'^i_{55}J^i_1}M_1 - \frac{2C'^i_{15}}{C'^i_{55}}\frac{\partial^2 U^i}{\partial x^2} - \frac{2C'^i_{46}}{C'^i_{55}}\frac{\partial^2 U^i}{\partial y^2} - \frac{C'^i_{46} + 2C'^i_{32}}{C'^i_{55}}\frac{\partial^2 V^i}{\partial x\partial y}.$$

Разница между уравнениями (5) и уравнениями для однородного тела с такой же упругой симметрией заключается в том, что в (5) параметры жёсткости C'^{i}_{44} и C'^{i}_{55} — для каждого слоя i имеют различные значения, тогда как у однородного тела они постоянны. Поэтому при переходе от слоя к слою скачком могут изменяться отдельные компоненты тензоров деформации и напряжений.

Таким образом, задача о кручении анизотропных составных стержней сводится к задаче определения N функции $W^i(x, y)$, удовлетворяющих внутри R_i уравнениям (5) и условиям на боковой поверхности [6]

$$\frac{\partial W^i}{\partial x} l_1 + \frac{C'^{i}_{44}}{2C'^{i}_{55}} \frac{\partial W^i}{\partial y} l_2 = Z^*_\nu, \tag{6}$$

$$Z^*_\nu = \frac{1}{C'^{i}_{55}} \Big[Z_\nu - C'^{i}_{35} M^i_z l_1 - 0{,}5(C'^{i}_{55} y l_1 - C'^{i}_{44} x l_2)\tau - \\ - \left(C'^{i}_{15} \frac{\partial U^i}{\partial x} l_1 + \frac{C'^{i}_{46}}{2} \frac{\partial U^i}{\partial x} l_2 \right) - \left(C'^{i}_{25} \frac{\partial V^i}{\partial y} l_1 + \frac{C'^{i}_{46}}{2} \frac{\partial V^i}{\partial x} l_2 \right) - \beta^i_{13} l_1 T^i \Big]$$

и линиях раздела слоев [6]

$$U^k = U^j, \quad V^k = V^j, \quad W^k = W^j. \tag{7}$$

Сравнивая методы решения задачи кручения в напряжениях [1, 2] и в перемещениях [3], следует заметить, что оба метода обладают достоинствами и недостатками. Введение функции напряжений $U(x, y)$ приводит к неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных, решение которого представляет большие трудности, в частности, для нерегулярных слоистых сечений, чем решение однородного уравнения, к которому сводится задача при решении в перемещениях. Граничные условия проще записываются через функцию напряжений. Кроме того, с помощью результатов, полученных для слоистых стержней, составленных из изотропных материалов, легче построить решение в напряжениях для регулярных сечений с изотропными слоями, чем в перемещениях. Однако решение в перемещениях для неоднородных анизотропных стержней нерегулярного сечения выгодно отличается от решения в напряжениях, в связи с простым условием на линиях раздела анизотропных слоев.

Решение задачи о кручении составных стержней с помощью функции кручения приведены в работах [1, 2, 7], а при применении функции напряжений получило отражение в обширной библиографии, приведённой в работах [1, 8].

Имеется довольно много приближённых методов решения задачи о кручении анизотропных слоистых стержней с поперечным сечением произвольной формы (МКЭ, метод сеток, метод малого параметра, энергетический метод, и др.). Однако для доказательства достоверности результатов, полученных приближёнными методами решения задачи о кручении анизотропных слоистых стержней, следует сопоставить их с точными решениями для регулярных многослойных сечений (в частности, с изотропными или ортотропными слоями) или с экспериментальными результатами. Поэтому в работе более подробно рассматриваются и обсуждаются результаты решения задачи о кручении многослойного стержня прямоугольного сечения, составленного из ортотропных материалов.

Аналитическое решение задачи о кручении призматического стержня прямоугольного сечения, составленного из различных ортотропных слоев, имеющих одинаковую ширину и удовлетворяющих условию непрерывности перемещений u^i, v^i, w^i и касательного напряжения σ^i_{yz} (рис. 2) при переходе от слоя к слою, было получено Лехницким С.Г. [7]. В этой задаче сначала напряжения в каждом слое i выражаются через контактные усилия. В свою очередь, контактные усилия определяются из условия непрерывности перемещения w^i при переходе от слоя к слою. При этом решается вспомогательная задача о равновесии стержня прямоугольного сечения, деформируемого касательными усилиями. В этом случае касательные напряжения σ^i_{yz} на двух поверхностях слоя i не равны нулю, а задаются в виде тригонометрических рядов с неопределёнными коэффициентами. Коэффициенты определяются из условий (7) на поверхностях контакта. В результате для определения трёх коэффициентов усилий, получается рекуррентная система уравнений. Для N-слойного стержня, составленного из ортотропных материалов, при определении контактных усилий решается система алгебраических уравнений $N-1$ порядка.

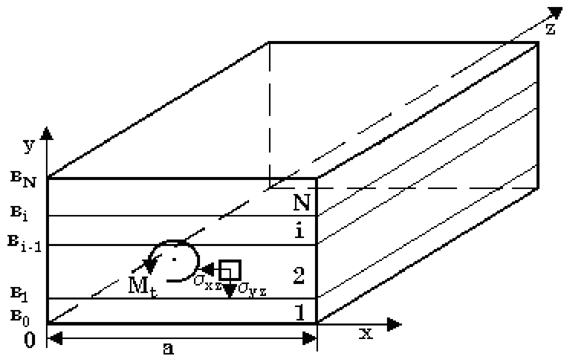


Рис. 2. **Слоистый стержень прямоугольного сечения**

В [7] касательные напряжения σ^i_{xz}, σ^i_{yz}, функция кручения $\varphi^i(\mathrm{x},\mathrm{y})$ в слое i определяются из соотношений

$$\sigma^i_{xz} = \sum_{k=1,3}^{\infty}\left[\frac{8C^i_{44}a\tau}{k^2\pi^2}B_{ki}B^*_{ki}\right]\cos\frac{k\pi x}{a}, \tag{8}$$

$$\sigma^i_{yz} = \sum_{k=1,3}^{\infty}\left[\frac{8f_i a\tau}{k^2\pi^2}(A_{ki}+1)+\mu_i A^*_{ki}\right]\sin\frac{k\pi x}{a}, \tag{9}$$

$$\varphi^i(x,y) = -\sum_{k=1,3}^{\infty}\left[\frac{8a^2}{k^3\pi^3\mu_i}A_{ki}+\frac{a}{k\pi f_i\tau}A^*_{ki}\right]\cos\frac{k\pi x}{a}. \tag{10}$$

Здесь $h = b_i - b_{i-1}$ — толщина, C'^i_{44}, C'^i_{55} — модули сдвига i-го слоя в плоскости yz и xz соответственно (см. рис. 2), b_i — расстояние от оси x до линии раздела слоев с номерами $i-1$ и i; a — ширина стержня; τ — относительный угол закручивания на единицу длины стержня. Кроме того,

$$\begin{gathered}
\beta_{i,k} = \frac{k\pi h_i}{a}\mu_i, \quad \mu_i^2 = \frac{C'^i_{44}}{C'^i_{55}}, \quad f_i^2 = C'^i_{44}C'^i_{55}, \\
A_{ki} = \frac{1}{\operatorname{sh}\beta_{i,k}}\left[\operatorname{ch}\frac{k\pi}{a}\mu_i(y-b_i) - \operatorname{ch}\frac{k\pi}{a}\mu_i(y-b_{i-1})\right], \\
B_{ki} = \frac{1}{\operatorname{sh}\beta_{i,k}}\left[\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}\mu_i(y-b_i) - \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}\mu_i(y-b_{i-1})\right], \\
A^*_{ki} = \frac{1}{\operatorname{sh}\beta_{i,k}}\left[\tau_{i-1,k}\operatorname{ch}\frac{k\pi}{a}\mu_i(y-b_i) - \tau_{i,k}\operatorname{ch}\frac{k\pi}{a}\mu_i(y-b_{i-1})\right], \\
B^*_{ki} = \frac{1}{\operatorname{sh}\beta_{i,k}}\left[\tau_{i-1,k}\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}\mu_i(y-b_i) - \tau_{i,k}\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}\mu_i(y-b_{i-1})\right].
\end{gathered} \tag{11}$$

В выражения (11) входят параметры жёсткости C'^{i}_{mn}, определяющиеся по формулам [4]:

$$
\begin{gathered}
C'^{i}_{kj} = (-1)^{j+k}\Delta_{kj}/\Delta, \quad (j,\, k = 1,2,3), \quad C'^{i}_{kj} = a'^{i}_{kj}/\Delta_*, \quad (j,\, k = 4,6), \\
C'^{i}_{k5} = -a'^{i}_{k5}C'^{i}_{kj}/a'^{i}_{55}, \quad C'^{i}_{55} = (1 - a'^{i}_{k5}C'^{i}_{k5})/a'^{i}_{55}, \\
\Delta = \begin{vmatrix} \gamma^i_{11} & \gamma^i_{12} & \gamma^i_{13} \\ \gamma^i_{12} & \gamma^i_{22} & \gamma^i_{23} \\ \gamma^i_{13} & \gamma^i_{23} & \gamma^i_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_* = \begin{vmatrix} a'^{i}_{66} & a'^{i}_{46} \\ a'^{i}_{46} & a'^{i}_{44} \end{vmatrix}.
\end{gathered} \tag{12}
$$

В определителе $\Delta - \gamma^i_{kj} = a'^{i}_{kj} - a'^{i}_{k5}a'^{i}_{j5}/a'^{i}_{55}$ $(k,j = 1,2,3)$; Δ_{kj} — миноры определителя Δ по элементам γ^i_{kj}. Параметры упругости C'^{i}_{kj} изотропного материала i-го слоя определяются через технические постоянные формулами

$$
\begin{gathered}
C^i_{11} = H \cdot E^i_1(1 - \mathbf{v}^i_{32}\mathbf{v}^i_{23}), \quad C^i_{22} = H \cdot E^i_2(1 - \mathbf{v}^i_{13}\mathbf{v}^i_{31}), \\
C^i_{33} = H \cdot E^i_3(1 - \mathbf{v}^i_{12}\mathbf{v}^i_{21}), \quad C^i_{23} = H \cdot E^i_3(\mathbf{v}^i_{23} - \mathbf{v}^i_{21}\mathbf{v}^i_{13}), \\
C^i_{13} = H \cdot E^i_1(\mathbf{v}^i_{13} - \mathbf{v}^i_{12}\mathbf{v}^i_{23}), \quad C^i_{12} = H \cdot E^i_1(\mathbf{v}^i_{12} + \mathbf{v}^i_{32}\mathbf{v}^i_{13}), \\
C^i_{44} = G'^{i}_{23}, \quad C^i_{55} = G'^{i}_{13}, \quad C^i_{66} = G'^{i}_{12}, \\
H = (1 - \mathbf{v}^i_{12}\mathbf{v}^i_{21} - \mathbf{v}^i_{13}\mathbf{v}^i_{31} - \mathbf{v}^i_{23}\mathbf{v}^i_{32} - 2\mathbf{v}^i_{12}\mathbf{v}^i_{23}\mathbf{v}^i_{31})^{-1}.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Контактные усилия между слоями $\tau_{i,k}$ находятся из решения системы $N-1$ алгебраических уравнений

$$
f_{i-1}\operatorname{sh}\beta_{i-1,k}\tau_{i,k} + s_{ik}\tau_{i-1,k} + f_i\operatorname{sh}\beta_{i,k}\tau_{i-2,k} = s^*_{ik}, \tag{14}
$$

где $i = 2,3,\ldots,N$; $k = 1,3,\ldots$; $\tau_{0,k} = \tau_{N,k} = 0$;

$$
\begin{gathered}
s_{ik} = -(f_{i-1}\operatorname{sh}\beta_{i-1,k}\operatorname{ch}\beta_{i,k} + f_i\operatorname{sh}\beta_{i,k}\tilde{n}h\beta_{i-1,k}); \\
s^*_{ik} = -\frac{8a\tau}{\pi^2k^2}C'^{i}_{44}C'^{i}_{55}\big[\mu_i\operatorname{sh}\beta_{i,k}(\operatorname{ch}\beta_{i-1,k} - 1) + \mu_{i-1}\operatorname{sh}\beta_{i-1,k}(\tilde{n}h\beta_{i,k} - 1)\big].
\end{gathered}
$$

Определение касательных напряжений σ^i_{xz} и σ^i_{yz}, а также функции кручения $\varphi^i(x,\text{y})$ и жёсткости на кручение C каждого слоя i и всего сечения в целом требует решения подобной системы алгебраических уравнений (14). Например, в [1,2,9] решается система из $2N$ алгебраических уравнений $(i = 1,2,\ldots,N)$. В этой связи в [1, 2, 9] приближённые оценки значений распределения касательных напряжений σ^i_{xz}, σ^i_{yz} приведены для сечения только с тремя чередующимися изотропными слоями. Это означает, что не достаточно подробно изучены особенности распределения касательных напряжений и перемещений в сечениях многослойных стержней.

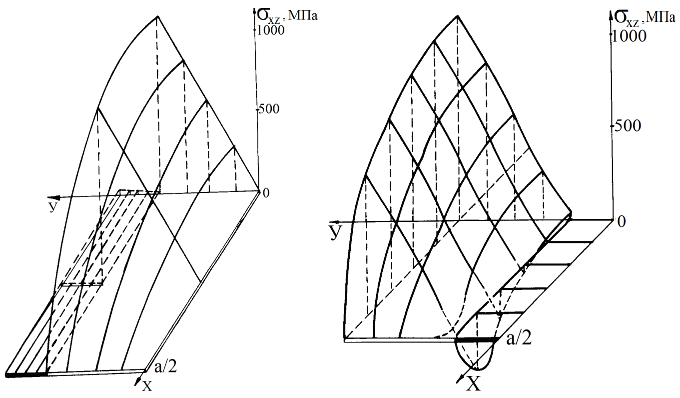
На основе соотношений (8)–(14) впервые была составлена программа расчёта на алгоритмическом языке Фортран и на её основе исследовались распределения касательных напряжений, перемещений в многослойных стержнях прямоугольного сечения, составленных из изотропных и ортотропных материалов. Следует отметить, что значения A^*_{ki}, B^*_{ki} из уравнения (8)–(11) зависят от значения контактных усилий, которые предварительно определяются из решения системы уравнений (14).

3. Особенности напряжённо-деформированного состояния (н.д.с.) многослойных стержней с изотропными слоями

На основе описанной выше программы были проведены исследования распределения касательных напряжений, перемещений и определены жёсткости на кручение многослойных стержней прямоугольного сечения со сторонами а = 120 мм,

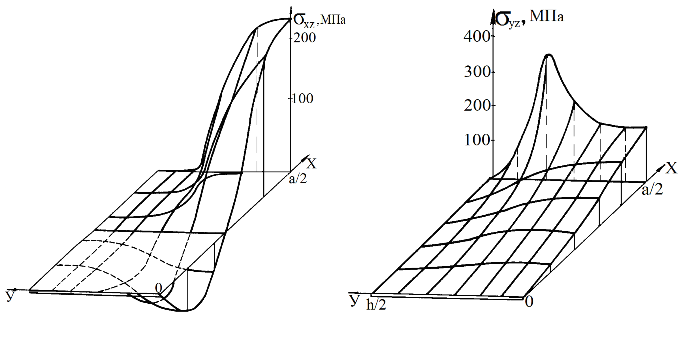
$h = 20$ мм. Изотропные слои, изготовленные из мягкого материала А типа эпоксидной смолы ($C'^{i}_{44} = C'^{i}_{55} = G_{\text{А}} = 1{,}1$ ГПа, зачернённые на рисунках слои) и жёсткого материала Б типа стали ($C'^{i}_{44} = C'^{i}_{55} = G_{\text{А}} = 78{,}74$ ГПа, светлые слои), чередовались. Каждый слой имеет свою постоянную толщину, подобранную таким образом, что относительное объёмное содержание материала А из эпоксидной смолы в обсуждаемых здесь результатах соответствовало $v_{\text{А}} = 0{,}3$. Ввиду симметрии изучаемого напряжённого и деформированного состояния на рисунках изображена лишь четверть сечения стержня.

На рис. 3–4 приведены результаты расчётов для трёхслойных стержней в случаях, когда мягкий слой находится внутри (случай а) и снаружи (случай б) сечения.



а) б)

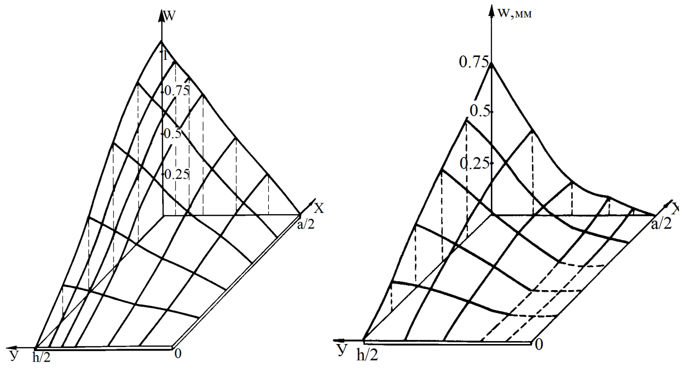
Рис. 3. **Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении трёхслойного стержня с мягким (случай а) и жёстким (случай б) наружными слоями**



а) б)

Рис. 4. **Распределение касательных напряжений σ_{yz} в сечении трёхслойного стержня с мягким (случай а) и жёстким (случай б) наружными слоями**

Результаты расчётов показывают, что касательные напряжения σ^{i}_{xz} при переходе от слоя к слою претерпевают разрыв первого рода. При переходе от слоя к слою значения разрыва увеличиваются или уменьшаются пропорционально отношению модулей $G^{i}_{\text{А}}/G^{i+1}_{\text{Б}} < 1$ или $G^{i}_{\text{А}}/G^{i+1}_{\text{Б}} < 1$ (рис. 3). При более жёстких наружных слоях наибольшие напряжения σ^{i}_{xz} достигаются на серединах длинных сторон внешнего контура (рис. 3,а). При менее жёстких наружных слоях наибольшие значения получаются в точках соприкосновения слоев на середине длинных сторон прямоугольника (рис. 3,б). Для стержня с жёсткими наружными слоями (рис. 4,а) наибольшие значения напряжений σ^{i}_{yz} реализуются на серединах жёсткого слоя коротких сторон внешнего контура, а при менее жёстких наружных слоях наблюдается неравномерное распределение по сечению (рис. 4,б). При более жёстких наружных слоях осевые перемещения w^i достигают наибольших значений на контуре (рис. 5,а), а при менее жёстких наружных слоях её значения как на контуре, так и во внутренних точках сечения увеличиваются (рис. 5,б).



а) б)

Рис. 5. **Распределение осевых перемещений в сечении трёхслойного стержня с жёстким (случай б) и мягким (случай а) наружными слоями**

Качественная картина распределения касательных напряжений и осевых перемещений находится в соответствии с общими представлениями о кручении изотропных стержней прямоугольного сечения [4]. Однако, если учесть незначительность модуля мягкого слоя, то в этих слоях градиенты напряжений (рис. 4,а) являются довольно большими. С изменением положения мягких и жёстких слоев характер распределения, а также величины касательных напряжений и осевых перемещений изменяются.

Характер распределения величин касательных напряжений σ^i_{xz}, σ^i_{yz} и осевых перемещений w^i по сечению 39-й слойного стержня с более жёстким наружным слоем незначительно отличается от их распределения в стержне с менее жёстким наружным слоем. Однако здесь более наглядно демонстрируется скачкообразное изменение касательных напряжений σ^i_{xz} при переходе от слоя к слою (см. рис. 6).

Из-за непрерывности касательных напряжений σ^i_{yz} и осевых перемещений w^i при переходе от слоя к слою и малой толщины мягких слоев в многослойных стержнях уровень напряжений σ^i_{yz} и значение перемещений w^i в этих слоях достаточно высок (рис. 7, 8). Это может привести к тому, что мягкие слои с относительно низкой прочностью на сдвиг достаточно быстро (уже при малых углах относительного угла закручивания τ) достигают предельных состояний или пластических деформаций. Жёсткость мягких слоев при этом уменьшается и эффект разрыва градиентов напряжений σ^i_{yz} и значений w^i усиливается.

4. Особенности н.д.с. многослойного стержня с ортотропными слоями

На основе разработанной программы проведены исследования распределения касательных напряжений, перемещений в многослойных стержнях прямоугольного сечения со сторонами $a = 120$ мм, $h = 20$ мм. Изотропные слои изготовлены из материала А типа алюминия ($C'^i_{44} = C'^i_{55} = G_{\text{А}} = 26{,}31$ ГПа, зачернённые на рисунках слои), а ортотропные слои — из композиционных материалов Б (упругие свойства, которых приведены в [10] табл. 1, заштрихованные на рисунках слои). Каждый слой имеет свою постоянную толщину, подобранную

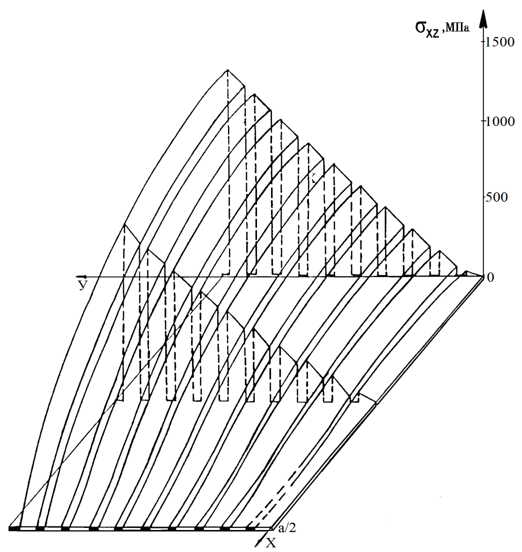


Рис. 6. **Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении 39-й слойного стержня мягким наружными слоями**

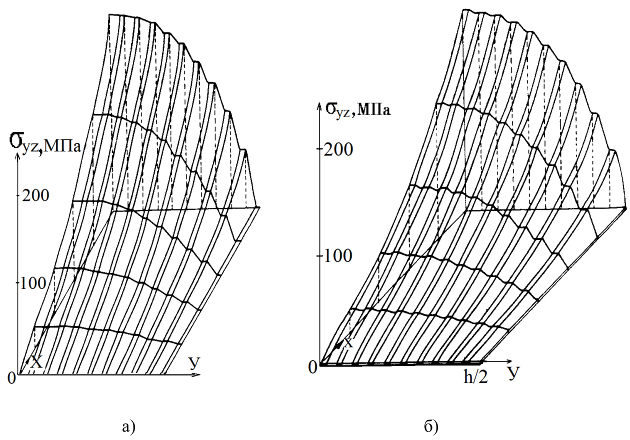
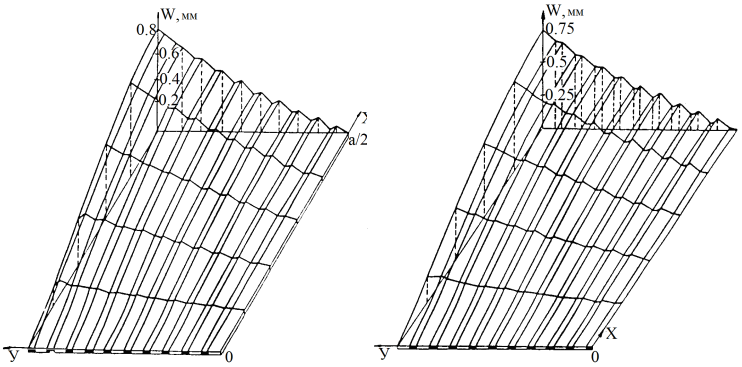


Рис. 7. **Распределение касательных напряжений σ_{yz} в сечении 39-й слойного стержня с жёстким (случай б) и мягким (случай а) наружными слоями**

таким образом, что относительное объёмное содержание материала матрицы A из алюминия в обсуждаемых результатах соответствовало $v = 0{,}2$. Ввиду симметрии напряжённо-деформированного состояния на рисунках изображена лишь четверть прямоугольного сечения стержня.

На рис. 9 приведены результаты расчётов касательных напряжений и перемещений в виде поверхностей для трёхслойных стержней в случаях, когда слой из материала А находится внутри (случай а) и снаружи (случай б) сечения. Качественная картина распределения касательных напряжений находится в соответствии с представлениями о кручении слоистых стержней прямоугольного сечения, составленных из изотропных материалов (см. пункт 1).

Результаты расчётов показывают, что с изменением положения слоев из материала А и Б характер распределения, а также величины касательных напряжений σ^i_{xz}, σ^i_{yz} и осевых перемещений w^i изменяются незначительно в связи с малым отличием значений модулей сдвига материалов слоев $G_{\text{А}}$ и $G_{\text{Б}}$ (рис. 9).



а) б)

Рис. 8. **Распределение осевых перемещений в сечении 39-и слойного стержня с жёстким (случай б) и мягким (случай а) наружными слоями**

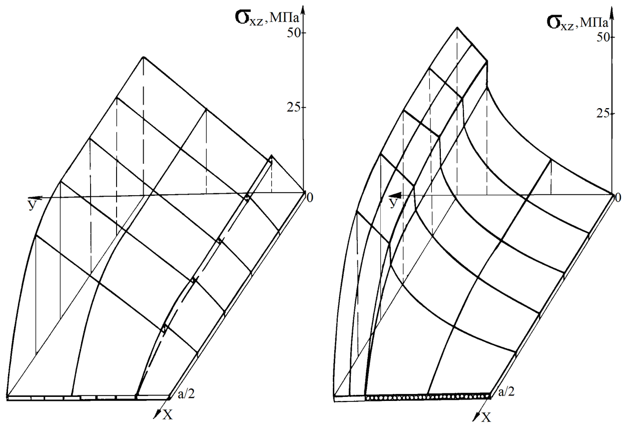
Таблица 1

Упругие постоянные некоторых типов композиционных материалов

Свойства	Материалы					
	углепластик	CAL	BAL	CFRP	GFRP	ТЖ-07 и ЭТД-13
E_1, ГПа	15,7	27	104	30	4	29,3
E_1, ГПа	15,7	427	104	30	4	18,3
E_3, ГПа	112,5	300	213	140	20	35,9
G_{12}, ГПа	3,3	103,85	32,6	11,28	1,52	6,29
G_{13}, ГПа	5,3	21,6	25,4	9,38	1,37	7,62
G_{23}, ГПа	5,3	21,6	26,1	9,38	1,37	6,64
ν_{13}	0,48	0,03	0,529	0,33	0,33	0,371
ν_{23}	0,03	0,18	0,226	0,3	0,3	0,144
ν_{12}	0,03	0,18	0,226	0,3	0,3	0,157

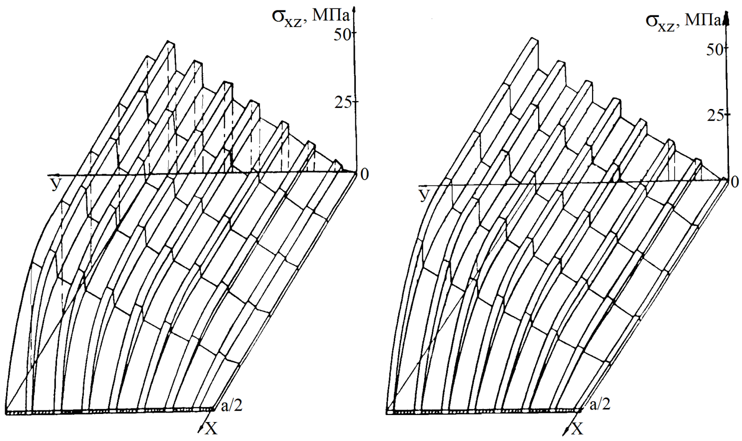
На рис. 10–11 приведены распределения величин касательных напряжений по сечению 29-й слойного стержня. Здесь более наглядно демонстрируется скачкообразное изменение касательных напряжений σ^i_{xz} при переходе от слоя к слою (рис. 10). Из-за малой толщины слоев из материала матрицы A в многослойных стержнях уровни напряжений σ^i_{yz} в этих слоях большие (рис. 10, 11), что может привести слои из материала с относительно низкой прочностью на сдвиг к предельному состоянию или пластическим деформациям. Поэтому для уменьшения градиентов касательных напряжений σ^i_{yz} и значений осевых перемещений w^i в слое с малой толщиной необходимо для этих слоев подбирать материалы со свойствами более прочными на сдвиг.

На рис. 12 приведены результаты расчётов для трёхслойного стержня, когда наружные слои из материала Б армированы под углом $\pm 45°$ (случай а) относительно центра кручения. Результаты расчётов показывают, что с изменением положения слоев из материала Б характер распределения, а также величины касательных напряжений σ^i_{xz}, σ^i_{yz} изменяются (рис. 12). В связи с тем, что отношение модулей сдвига $G^i_{\text{А}}/G^{i+1}_{\text{Б}}$ значительно и из-за малой толщины слоя из материала матрицы А в этих слоях, значения касательных напряжений σ^i_{xz} (рис. 13,б) и



а) б)

Рис. 9. **Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении трёхслойного стержня с ортотропными (случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями**



а) б)

Рис. 10. **Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении 29-й слойного стержня с ортотропными (случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями**

σ^i_{yz} достаточно высоки в сравнении со случаем (рис. 9,б), когда угол армирования слоя из материала Б был равным нулю ($\psi^i = 0$). Для того, чтобы не было предельных состояний или пластических деформаций в этих слоях, необходимо чередующиеся слои из материала Б армировать под углом ψ^i так, чтобы отношение $G^i_{\text{А}}/G^{i+1}_{\text{Б}}$ было не столь большим.

На рис. 13–14 приведены распределения касательных напряжений σ^i_{xz}, σ^i_{yz} для 29-и слойного стержня, когда слои из материала Б армированы под углом $\pm 45^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 15^\circ$, 0° относительно центра кручения (случай *а*, когда наружные слои из материала Б, и случай *б*, когда наружные слои из материала А). С изменением положение слоев из армированного материала Б характер распределения касательных напряжений σ^i_{xz}, σ^i_{yz} (рис. 13, 14) изменяется.

Здесь скачкообразное изменение касательных напряжений σ^i_{xz} при переходе от слоя к слою существенно в слоях, армированных под углом $\pm 45^\circ$ и $\pm 30^\circ$ (рис. 14). Поэтому в слоях из материала, чередующегося со слоями, армированными под углами $\psi^i = \pm 45^\circ$ и $\psi^i = \pm 30^\circ$, достигается предельное состояние или возникают

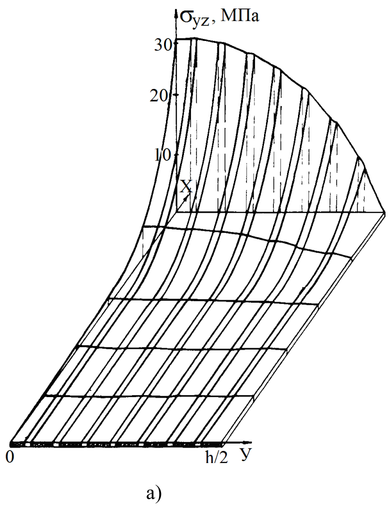


Рис. 11. **Распределение касательных напряжений σ_{yz} в сечении 29-й слойного стержня с ортотропными (случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями**

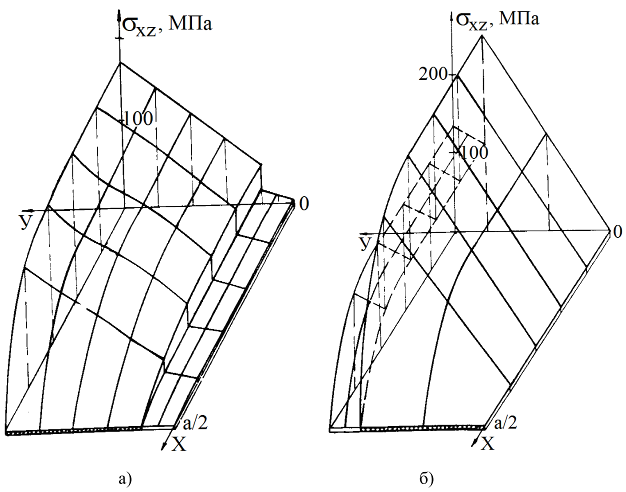


Рис. 12. **Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении трёхслойного стержня с ортотропными (угол армирования $\pm 45°$, случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями**

пластические деформации ($\tau = 0{,}001$). Из-за непрерывности касательных напряжений σ^i_{yz} при переходе от слоя к слою и малой толщины слоя из материала А, чередующегося с армированными слоями под углом $\pm 45°$, $\pm 30°$, градиенты напряжений σ^i_{yz} в этих слоях велики.

5. Выводы

Из-за непрерывности касательных напряжений σ^i_{yz} и осевых перемещении w^i при переходе от слоя к слою и малой толщины мягких слоев в многослойных стержнях мягкие слои с относительно низкой прочностью на сдвиг достаточно быстро (уже при малых углах относительного угла закручивания τ) достигают предельных состояний или пластических деформаций, и жёсткость мягких слоев при этом уменьшается, а эффект разрыва градиентов напряжений σ^i_{yz} и значений

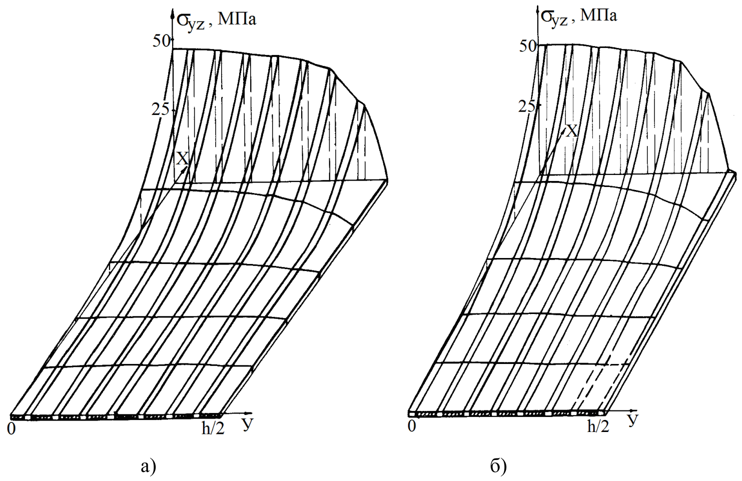


Рис. 13. **Распределение касательных напряжений $\sigma_{\mathrm{y}z}$ в сечении 29-й слойного стержня с ортотропными (угол армирования ±45°, ±30°, ±15°, 0°, случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями**

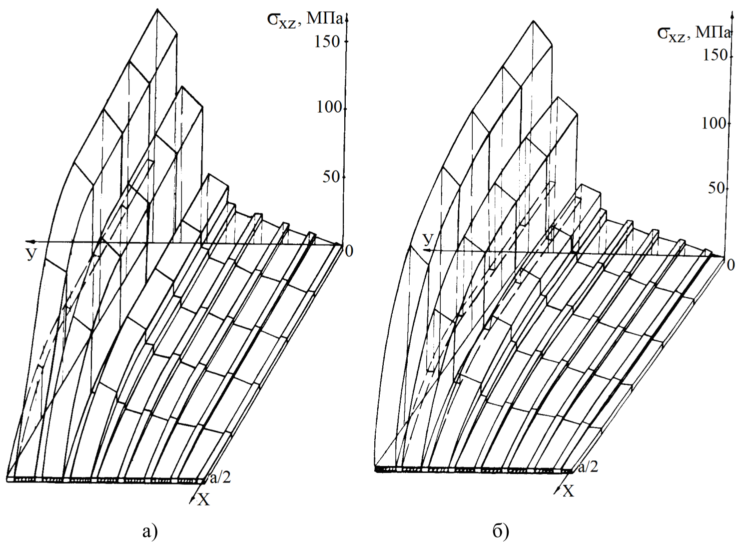


Рис. 14. **Распределение касательных напряжений $\sigma_{\mathrm{x}z}$ в сечении 29-й слойного стержня с ортотропными (угол армирования ±45°, ±30°, ±15°, 0°, случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями**

w^i усиливается. Для того, чтобы не было предельных состояний или пластических деформаций в этих слоях, необходимо чередующиеся слои из материала Б армировать под углом ψ^i так, чтобы отношение $G^i_{\mathrm{А}}/G^{i+1}_{\mathrm{Б}}$ было не столь большим. Для уменьшения градиентов касательных напряжений σ^i_{yz} и значений осевых перемещений w^i в слое с малой толщиной необходимо подбирать материалы со свойствами более прочными на сдвиг.

Чтобы заметно уменьшить градиенты касательных напряжений в слоях из материала матрицы А, чередующихся со слоями, армированными под углами ±45°, ±30°, для этих слоев необходимо подобрать материалы, модули сдвига которых близки по значению с модулями сдвига материала Б, армированного под определённым углом ψ^i.

Исследование особенности распределения напряжений и перемещений в отдельных слоях стержня позволяет оценить работоспособность слоистой конструкции при кручении.

Литература

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. — М.: Физматгиз, 1963. — 636 с.
2. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. — Ереван: Изд. Ер.ГУ, 1970. — 443 с.
3. *Лехницкий С. Т.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. — М.: Наука, 1971. — 240 с.
4. *Сен-Венан Б.* Мемуары о кручении призм. Мемуары об изгибе призм. — М.: Мир, 1961. — 530 с.
5. *Нуримбетов А. У.* Особенности деформирования естественно-закрученных многослойных анизотропных стержней // Механика и моделирование процессов технологии. — 2000. — № 1. — С. 92–97.
6. *Нуримбетов А. У.* Решение задачи обобщенного кручения многослойных стержней, составленных из анизотропных материалов // Механика и моделирование процессов технологии. — 2002. — № 1. — С. 3–25.
7. *Лехницкий С. Т.* Кручение многослойного стержня прямоугольного сечения // Инженерный сборник. — 1956. — Т. XXIII. — С. 63–76.
8. *Чудаев Я. Ф.* Приближённый метод расчета призматических стержней на кручение. — Новокузнецк, 1975. — 244 с.
9. *Дехтярь Л. И., Шпигель Б. М.* Упрощение расчета на кручение неоднородных стержней прямоугольного сечения // Изв. АН Молд.ССР, сер. Физ.-тех.-мат. — 1984. — № 9. — С. 71–72.
10. *Лехницкий С. Т.* Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1975. — 415 с.

UDC 539.9

Torsion of a Multilayer Prismatic an Anisotropic Rod of Rectangular Cut, Composed from Orthotropic Materials

A. U. Nurimbetov

Mechanics of machines and mechanisms Department
«MATI» — the Russian state technological university of K.E.Tsiolkovsky
3, Orshansky str., Moscow, 117513, Russia

Properties of distribution of pressure and displaycements is carried out for separate layers of a multilayered anisotropic rod. Efficiency of a layered design under the torsion can be estimated through the received results.

Key words and phrases: torsion, anisotropic orthotropic layered rod.