Математическое моделирование

УДК 519.216, 519.866

Непараметрическая модель стохастической динамики процентных ставок

В. А. Лапшин

Экономический факультет
Государственный университет — Высшая школа экономики
Покровский бульвар, д. 11, Москва, Россия, 109028

В работе предлагается новая непараметрическая модель стохастической динамики процентных ставок, основанная на подходе Heath–Jarrow–Morton и описываемая стохастическим дифференциальным уравнением в функциональном пространстве. Модель не допускает арбитражных возможностей, обеспечивает положительность мгновенных форвардных процентных ставок, учитывает ошибки наблюдений и имеет несложную вычислительную реализацию.

Ключевые слова: модель HJM, пространство Соболева, стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах, мягкое решение.

1. Введение

1.1. Основные понятия и определения

Срочная структура процентных ставок (бескупонная кривая доходности), лежащая в основе теории оценки активов с фиксированным доходом и являющаяся одним из наиболее дискуссионных вопросов проведения эффективной долговой и денежной политики, составляет предмет интенсивных зарубежных исследований уже более 30 лет. В России широко используется кривая доходности к погашению, а общепризнанной в мире модели построения кривой бескупонной доходности до сих пор не существует [1].

Под облигацией будет пониматься долговое обязательство, расписание платежей по которому заранее известно (т.е. мы рассматриваем облигации с фиксированным купоном), обращающееся на вторичном рынке. В настоящей работе анализируются кривые, построенные по группе облигаций, имеющих равную степень рискованности[1] и ликвидности. В качестве упрощающих, но общепринятых предположений, рассмотрим «идеальный» рынок, на котором торгуются облигации той же степени рискованности и ликвидности, что и данные, со всеми возможными номиналами и временами до погашения.

Рассмотрим бескупонную облигацию с единовременной выплатой основного долга со временем до погашения T и номиналом[2] 1. Обозначим её цену в текущий момент времени $\mathrm{d}(T)$. Эта зависимость называется функцией дисконтирования.

Часто вместо функции дисконтирования используют кривую (бескупонной) доходности $y(t)$ или кривую мгновенных форвардных процентных ставок $r(t)$, связанных с функцией дисконтирования $\mathrm{d}(t)$ формулами $\mathrm{d}(t) = \exp(-t\,y(t))$ и $\mathrm{d}(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right)$.

Задача состоит в определении одной из этих функций (связанных, очевидно, взаимно однозначным соответствием) по рыночным данным: заключённым сделкам и выставленным котировкам.

Статья поступила в редакцию 9 июня 2009 г.

[1]Кредитный риск, связанный с неисполнением эмитентом своих обязательств.
[2]Номинал обычно измеряют в процентах от основной суммы задолженности.

1.2. Классификация моделей

Существует много различных классификаций способов определения срочной структуры процентных ставок, однако для нашего изложения будет полезно разделить их на динамические (имеющие дело с эволюцией процентных ставок со временем) и статические (работающие в рамках «моментального снимка» рынка).

Статические модели обычно делят на параметрические (предполагающие a priori некоторую параметрическую форму кривой доходности) и непараметрические, среди которых стоит особо выделить сплайновые (предполагающие, что кривая доходности обладает неким экстремальным свойством, например, максимальной гладкостью, в своём классе, что обычно приводит к решениям в виде сплайна). Неплохой обзор статических методов можно найти в [2].

Динамические методы обычно задают стохастическую динамику одной или (реже) нескольких точек кривой доходности. Чаще всего это её левый конец, мгновенная процентная ставка, имеющая особый экономический смысл. Литература на эту тему более обширна и разнообразна. Неполный, но достаточно объёмный обзор можно найти в [2–4] и по ссылкам в этих работах.

Однако динамика и мгновенная форма кривой зависимы. Так, знание только лишь мгновенной ставки (значения $y(0) = r(0)$) и её динамики даёт возможность найти всю кривую (однако её форма чаще всего получается неудовлетворительной), а несоответствие динамики и формы кривой влечёт арбитражные возможности. Так, в [5] было показано, что параметрическая форма Нельсона–Зигеля [6] не совместима ни с какой нетривиальной динамикой коэффициентов. Чуть позже, в [7] и [8] был получен фундаментальный результат: все параметрические модели, для которых существует нетривиальная стохастическая динамика, не нарушающая безарбитражности, суть аффинные модели. Это было доказано в рамках подхода Heath–Jarrow–Morton [9], и так как настоящая работа использует тот же подход, остановимся на нём подробнее.

1.3. Концепция HJM

В работе [9] был предложен новый общий подход к моделированию динамики процентных ставок. Фазовой переменной являются форвардные ставки, действующие в момент времени t к сроку T, $f(t,T)$. Предполагается, что динамика $f(t,T)$ задаётся системой (бесконечного количества) стохастических дифференциальных уравнений

$$\mathrm{d}f(t,T) = \alpha(t,T,\omega)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{N} \sigma^i(t,T,\omega)\mathrm{d}\beta_t^i, \tag{1}$$

где β_t^i — независимые винеровские процессы.

В работах [10] и [11] этот подход был обобщён на бесконечное количество факторов. Краткая выжимка обобщения будет приведена ниже.

Там же (в [9] и [11] соответственно) было получено необходимое и достаточное условие совместности динамики и формы кривой доходности (в смысле отсутствия арбитражных возможностей), которое убирает один из параметров, $\alpha(t,T,\omega)$, явно указывая его зависимость от σ^i и рыночной цены риска (обобщение этого результата будет приведено в дальнейшем).

Именно это условие и определило отсутствие на сегодняшний день моделей с разумной стохастической динамикой кривой и удовлетворительными её формами. Большинство существующих моделей — параметрические, среди которых лишь аффинные могут не допускать арбитражных возможностей. Последним достижением в этой области является работа [12], где была построена почти безарбитражная модель, похожая на широко распространённую модель Нельсона–Зигеля [6].

Однако непараметрический подход получал недостаточно внимания исследователей. Можно отметить работы [13–15], авторы которых также сетуют на неразработанность темы. Первая рассматривает только детерминированную структуру волатильности и не допускает ошибок измерения, вторая тоже не допускает ошибок и рассматривает лишь один случайный фактор. Работа же [15] делает больший упор на теоретическую состоятельность оценки (там используется метод ядер) при увеличивающемся количестве наблюдений. В такой постановке модель не подходит для практических оценок ввиду неудовлетворительного качества оценки методом ядер при ограниченном количестве наблюдений.

1.4. Вывод и задача

Целью настоящей работы является построение модели динамики срочной структуры процентных ставок, пригодной для практического использования, обладающей следующими желаемыми свойствами:
– отсутствие арбитражных возможностей;
– положительность мгновенных форвардных процентных ставок;
– способность отражать сложные формы кривой доходности;
– способность отражать сложные формы срочной структуры волатильности;
– учёт ошибок наблюдений;
– возможность и простота практической реализации;
– наличие удовлетворительных алгоритмов оценки параметров модели (эта часть будет изложена позже, в другой статье).

2. Модель

2.1. Математическая основа

Чтобы формально задать стохастическую динамику нашей непараметрической модели, необходима теория стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах, в достаточном объёме изложенная в [16]. Однако для наших целей будет достаточно подхода, который будет изложен ниже.

Будем рассматривать (цилиндрический) бесконечномерный винеровский процесс W_t в сепарабельном гильбертовом пр-ве $\mathcal{H}$ как последовательность независимых одномерных винеровских процессов β^i_t, $i \in \mathbb{N}$. Ряд $\sum_{i\in\mathbb{N}} \beta^i e_i$, где e_i — ортонормированный базис $\mathcal{H}$, не сходится в $\mathcal{H}$, т.к. $\| \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta^i e_i\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\beta^i\|^2 = +\infty$. Тем не менее, предел (так называемый цилиндрический винеровский процесс) вполне существует в некотором большем пространстве, подробности см. в [16] или [11]. Кроме того, несмотря на то, что $\mathrm{d}W \notin \mathcal{H}$, выражению $X\mathrm{d}W$ может быть придан смысл для широкого класса X, откуда можно построить конструкцию стохастического интеграла в гильбертовом пространстве и другую необходимую теорию, которая повторяет конечномерный случай (см. там же). Исключение составляет понятие мягкого решения (mild solution), которое мы приведём здесь. Мы будем рассматривать X из пространства $L_2^0(\mathcal{H})$ — операторов Гильберта–Шмидта из l^2 в $\mathcal{H}$ с нормой $\|X\|^2_{L_2^0(\mathcal{H})} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|X^i\|^2_{\mathcal{H}}$, где $X^i := X(e_i)$.

Пусть $W = {\beta^i}_{i\in\mathbb{N}}$ — цилиндрический винеровский процесс в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть также имеется сильно непрерывная полугруппа $\{S(t)|t \in \mathbb{R}_+\}$, действующая на $\mathcal{H}$, с генератором A и измеримые отображения $F(t, \omega, h) : (\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{H}, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})) \to (\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и $\sigma(t, \omega, h) = (\sigma(t, \omega, h))_{i\in\mathbb{N}} : (\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{H}, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})) \to (L_2^0(\mathcal{H}), \mathcal{B}(L_2^0(\mathcal{H})))$, а также неслучайное начальное значение $h_0 \in \mathcal{H}$.

Тогда X_t называется мягким решением уравнения

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = (AX_t + F(t, X_t))\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W_t \\ X_0 = h_0, \end{cases} \tag{2}$$

если $\mathcal{P}\left[\int_0^t \left(\|X_s\|_{\mathcal{H}} + \|F(s,X_s)\|_{\mathcal{H}} + \|\sigma(s,X_s)\|_{L_2^0(\mathcal{H})}\right)\mathrm{d}s < \infty\right] = 1$ и

$$X_t = S(t)h_0 + \int\limits_0^t S(t-s)F(s,X_s)\mathrm{d}s + \sum_{i\in\mathbb{N}}\int\limits_0^t S(t-s)\sigma^i(s,X_s)\mathrm{d}\beta_s^i$$

почти наверное $\forall t \in \mathbb{R}_+$ (здесь и дальше явная зависимость F и σ от ω не указывается, хотя и допускается постановкой).

В [16] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если F и σ удовлетворяют условию Липшица по переменной h и условию линейного роста по ней же: $\|F(t,\omega,h)\|^2 + \|\sigma(t,\omega,h)\|^2 \leqslant C(1+\|h\|^2)$, то существует единственное непрерывное мягкое решение X_t уравнения (2), причём $\mathbb{E}[X_t^2] \leqslant K(T)(1+\|h_0\|^2)$.*

2.2. Динамика

Модифицируем уравнение динамики (1), включив в него бесконечномерный винеровский процесс. Пусть $\Delta^2 = \{(t,T)\in\mathbb{R}^2 | 0\leqslant t\leqslant T\}$, $\alpha(t,T,\omega)$ и $\sigma^i(t,T,\omega)$ — измеримые функции из $(\Delta^2\times\Omega,\, \mathcal{B}(\Delta^2)\otimes\mathcal{F})$ в $(\mathbb{R},\mathcal{B}(R))$, причём для каждого $T\in\mathbb{R}_+$ процессы $\alpha(t,T)_{t\in[0,T]}$ и $\sigma^i(t,T)_{t\in[0,T]}$ прогрессивно измеримы. И пусть также

$$\int\limits_0^T \left(|\alpha(t,T)| + \|\sigma(t,T)\|^2\right)\mathrm{d}t < \infty$$

почти наверное $\forall T\in\mathbb{R}_+$.

Тогда для любого фиксированного T значение форвардной процентной ставки к сроку T — $f(t,T)$ — эволюционирует по закону

$$f(t,T) = f(0,T) + \int\limits_0^t \alpha(s,T)\mathrm{d}s + \sum_{i\in\mathbb{N}}\int\limits_0^t \sigma^i(s,T)\mathrm{d}\beta_s^i, \quad t\in[0,\,T], \tag{3}$$

где $f(0,\cdot)$ — неслучайная начальная форвардная кривая. Отметим, что это система бесконечного количества одномерных процессов Ито (с индексом $T\in\mathbb{R}_+$). В первую очередь, преобразуем её в один бесконечномерный процесс. В [10] предложена замена

$$r_t(x) = f(t,x+t), \quad t\in\mathbb{R}_+.$$

После формальной замены $T\to x+t$ получим

$$f(t,x+t) = S(t)f(0,x) + \int\limits_0^t S(t-s)\alpha(s,x+s)\mathrm{d}s + \\ + \sum_{i\in\mathbb{N}}\int\limits_0^t S(t-s)\sigma^i(s,x+s)\mathrm{d}\beta_s^i, \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

где $S(t)f(\cdot) = f(\cdot+t)$ действует по переменной x. Если пространство $\mathcal{H}$ удовлетворяет следующим аксиомам, то (4) можно рассматривать как динамику процесса в $\mathcal{H}$ (здесь и далее обозначения условий совпадают с таковыми в [11]):

(H1) Функции $h\in\mathcal{H}$ непрерывны, и вычисление значения в точке $\mathcal{J}_x(h) = h(x)$ — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{H}$.

(H2) Полугруппа $\{S(t)|t\in\mathbb{R}\}$ сильно непрерывна на $\mathcal{H}$ с генератором A.

(C1) Начальное значение $r_0 = f(0,\cdot)$ лежит в $\mathcal{H}$.

(C2) Процессы α и σ соответственно $\mathcal{H}$- и $L_2^0(\mathcal{H})$-значные предсказуемы, причём

$$\mathcal{P}\left[\int\limits_0^t \left(\|\alpha_s\| + \|\sigma_s\|^2_{L_2^0(\mathcal{H})}\right)\mathrm{d}s < \infty\right] = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

В этих предположениях можем переписать (4) как

$$\begin{cases} \mathrm{d}r_t = (Ar_t + \alpha_t)\mathrm{d}t + \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \sigma_t^i \mathrm{d}\beta_t^i, \\ r_0 = f(0,\cdot). \end{cases} \tag{5}$$

Предположим (C3) также, что существует непрерывная модификация r, которую мы и будем называть r. Это так, если, например, $S(t)$ образует сжимающую полугруппу в $\mathcal{H}$ или если наложить более строгое условие интегрируемости на σ (см. [16]). Отметим, что r_t, вообще говоря, не является $\mathcal{H}$-значным полумартингалом, а значит к нему неприменима напрямую формула Ито.

Цена единичной облигации с погашением в T будет равна

$$P(t,T) = \exp\left(-\int\limits_0^{T-t} r_t(x)\mathrm{d}x\right), \quad (t,T) \in \Delta^2,$$

а стоимость безрискового актива (банковского вклада) в момент t будет равна

$$B(t) = \exp\left(\int\limits_0^t r_s(0)\mathrm{d}s\right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В [11] показано, что условие “HJM drift”, отражающее условие отсутствия арбитражных возможностей, тем не менее, будет иметь тот же вид, что и для конечномерного случая:

$$\alpha = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{S}\sigma^i, \quad \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\mathcal{P} \tag{6}$$

— почти наверное, где $(\mathcal{S}f)(x) = f(x)\int_0^x f(\tau)\mathrm{d}\tau$, $x \in \mathbb{R}_+$. Чтобы удовлетворить этому условию, введём ещё 2 предположения:

(C4) Процессы $\mathcal{S}\sigma^i$ лежат в $\mathcal{H}$ и предсказуемы.

(H3) Существует K такое, что $\forall h \in \mathcal{H}, \mathcal{S}h \in \mathcal{H} \quad \|\mathcal{S}h\|_{\mathcal{H}} \leqslant K\|h\|^2_{\mathcal{H}}$.

Так как (6), вероятнее всего, не выполнено для реальной меры $\mathcal{P}$, нам необходимо позаботиться о существовании эквивалентной мартингальной меры (той, для которой будет верно (6)). Таковая будет существовать, если предположим (C5), что существует l^2-значный предсказуемый процесс рыночных цен риска $\gamma = (\gamma^i)_{i\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющий условию Новикова: $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+}\|\gamma_t\|^2_{l^2}\mathrm{d}t\right)\right] < \infty$, и для которого верно

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \gamma^i\sigma^i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{S}\sigma^i - \alpha, \quad \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\mathcal{P}$$

— почти наверное.

Разумно будет считать параметрами модели именно $\sigma^i_{i\in\mathbb{R}}$ — волатильности — и $-\gamma^i_{i\in\mathbb{R}}$ — рыночные цены риска, а α определять по (6).

Нам потребуется ещё 3 предположения:

(D1) Функции $\sigma^i(t,\omega,r_t(\omega))$ и $\gamma^i(t,\omega,r_t(\omega))$ должны быть измеримыми отображениями из $(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{H},\, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ в $(L_2^0(\mathcal{H}),\, \mathcal{B}(L_2^0(\mathcal{H})))$ и $(l^2, \mathcal{B}(l^2))$ соответственно.

(D2) Отображения $\mathcal{S}\sigma^i : (\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{H},\, \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})) \to (\mathcal{H},\, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ измеримы.

(D3) Существует функция $\Gamma \in L_2(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\|\gamma(t,\omega,h)\|_{l^2} \leqslant \Gamma(t), \quad \forall (t,\omega,h) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{H}.$$

Динамика r_t в эквивалентной мартингальной мере Q, существование которой обеспечивается нашими предположениями, будет иметь вид

$$\begin{cases} \mathrm{d}r_t = (Ar_t + F_{HJM}(t,r_t))\mathrm{d}t + \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i_t(t,r_t)\mathrm{d}\beta^i_t, \\ r_0 = h_0, \end{cases} \tag{7}$$

где $F_{HJM}(t,\omega,h) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{S}\sigma^i(t,\omega,h)$.

Для применения теоремы 1 нам необходимо проверить выполнение условий Липшица и линейного роста для функций F_{HJM} и σ^i. Если для последней можно просто постулировать необходимые свойства, то для первой их наличие будет зависеть от пространства $\mathcal{H}$. В следующей главе рассмотрим этот вопрос подробнее.

2.3. Пространство $\mathcal{H}$

В качестве пространства $\mathcal{H}$ возьмём пространство Соболева $W^2_1[0,T]$. В отличие от подхода, предложенного в [11], будем работать с конечным горизонтом, учитывая то, что реальные данные заданы на конечном и вполне определённом отрезке. Полугруппа сдвигов $S(t)$ будет действовать следующим образом: $(S(t)h)(x) = h(x + t \wedge T)$, что весьма разумно с экономической точки зрения: есть все основания полагать, что за горизонтом моделирования форвардные ставки постоянны. Для начала покажем, что пространство $\mathcal{H}$ обладает свойствами (H1)–(H3). Заметим, что $\|h\|_{L_\infty} \leqslant C_1\|h\|_{\mathcal{H}}$.

(H1) верно, так как $\mathcal{H}$ состоит из непрерывных функций и оператор $J_x(h)$ определён на $\mathcal{H}$. Ввиду только что показанного свойства он ограничен.

Чтобы показать (H2), заметим, что $(S(t)h)' = S(t)h'$. Найдём

$$\|S(t)h\|^2_{\mathcal{H}} = \int\limits_0^{T-t} h(x+t)^2\mathrm{d}x + th^2(T) + \int\limits_0^{T-t} h'(x+t)^2\mathrm{d}x \leqslant \|h\|^2_{\mathcal{H}} + T\|h\|^2_{L_\infty} \leqslant C_2\|h\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Таким образом, $S(t)h \in \mathcal{H}$ и ограничено.

Теперь рассмотрим функцию $g \in C^2[0,T]$.

$$\|S(t)g - g\|^2_{\mathcal{H}} = \int\limits_0^{T-t} |g(x+t) - g(x)|^2\mathrm{d}x + \int\limits_0^{T-t} |g'(x+t) - g'(x)|^2\mathrm{d}x +$$

$$+ \int\limits_{T-t}^{T} |g(T) - g(x)|^2\mathrm{d}x + \int\limits_{T-t}^{T} |g'(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \ (\xi \in [T-t,T]) \ \leqslant$$

$$\leqslant t^2 \int\limits_0^{T-t}\int\limits_0^1 |g'(x+st)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x + t^2 \int\limits_0^{T-t}\int\limits_0^1 |g''(x+st)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x +$$

$$+ t|g(T) - g(\xi)|^2 + t|g'(\xi)|^2 \leqslant t^2 \int\limits_0^1 \|S(st)g'\|^2_{\mathcal{H}}\mathrm{d}s + t|g(T) - g(\xi)|^2 + t|g'(\xi)|^2 \to 0$$

при $t \to 0$.

Таким образом, $S(t)$ сильно непрерывна на $C^2[0,T]$. Но $C^2[0,T]$ плотно в $\mathcal{H}$, что вкупе с ограниченностью $S(t)$ даёт сильную непрерывность на всём $\mathcal{H}$:

$$\|S(t)h - h\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|S(t)(h-g)\|_{\mathcal{H}} + \|S(t)g - g\|_{\mathcal{H}} + \|g - h\| \leqslant \\ \leqslant (C_2+1)\|h-g\|_{\mathcal{H}} + \|S(t)g - g\|_{\mathcal{H}} \to 0$$

при достаточно малых t и g, достаточно близких к h.

Покажем теперь (H3).

$$(\mathcal{S}h)'(x) = h'(x)\int\limits_0^x h(s)\mathrm{d}s + h^2(x),$$

$$\int\limits_0^T (\mathcal{S}h)(x)^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^T h^2(x)\left(\int\limits_0^x h(s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}x \leqslant T^3\|h\|^4_{L_\infty}$$

$$\int\limits_0^T (\mathcal{S}h)'(x)^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^T \left(h'(x)^2\left[\int\limits_0^x h(s)\mathrm{d}s\right]^2 + 2h'(x)h^2(x)\int\limits_0^x h(s)\mathrm{d}s + h^4(x)\right)\mathrm{d}x \leqslant \\ \leqslant T^2\|h\|^2_{L_\infty}\|h'\|^2_{L_2} + 2T\|h\|^3_{L_\infty}\|h\|_{L_1} + T\|h\|^4_{L_\infty},$$

$$\|\mathcal{S}h\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant T^3\|h\|^4_{L_\infty} + T^2\|h\|^2_{L_\infty}\|h'\|^2_{L_2} + 2T\|h\|^3_{L_\infty}\|h\|_{L_1} + T\|h\|^4_{L_\infty} \leqslant C_3\|h\|^4_{\mathcal{H}},$$

т.е. $\mathcal{S}h \in \mathcal{H}$ и $\|\mathcal{S}h\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_3^{1/2}\|h\|^2_{\mathcal{H}}$.

Также при помощи несложного анализа можно показать, что отображение $\mathcal{S} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ локально липшицево, т.е.

$$\|\mathcal{S}g - \mathcal{S}h\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_4\left(\|g\|_{\mathcal{H}} + \|h\|_{\mathcal{H}}\right)\|g-h\|_{\mathcal{H}},\ \forall g,h \in \mathcal{H}$$

Из этого сразу следует, что (D1) влечёт (D2).

Лемма 1. *Пусть отображение σ удовлетворяет (D1), обладает свойством Липшица по h и равномерно ограничено: $\|\sigma\|_{L_2^0(\mathcal{H})} \leqslant C\,\forall(t,\omega,h) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathcal{H}$. Тогда то же самое верно и для $F_{HJM}(t,\omega,h)$.*

Доказательство. Для краткости опустим в доказательстве зависимость от (t,ω) всех функций.

$$\|F_{HJM}(h_1) - F_{HJM}(h_2)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}}\|\mathcal{S}\sigma^i(h_1) - \mathcal{S}\sigma^i(h_2)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \\ \leqslant C_4\sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\|\sigma^i(h_1)\|_{\mathcal{H}} + \|\sigma^i(h_2)\|_{\mathcal{H}}\Big)\|\sigma^i(h_1) - \sigma^i(h_2)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \\ \leqslant C_4\Big(\|\sigma(h_1)\|_{L_2(\mathcal{H})} + \|\sigma(h_2)\|_{L_2^0(\mathcal{H})}\Big)\|\sigma(h_1) - \sigma(h_2)\|_{L_2(\mathcal{H})} \leqslant C_5\|h_1 - h_2\|_{\mathcal{H}}.$$

Ограниченность F_{HJM} прямо вытекает из (H3). □

Наконец, завершим этот раздел основной теоремой, которая непосредственно следует из предыдущей леммы и теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть σ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда существует единственное мягкое решение уравнения (7).*

2.4. Спецификация и наблюдения

Вопрос выбора функции волатильности σ был исследован для одномерного случая в [17], хотя к однозначному выводу авторы этой работы не пришли. Для обеспечения положительности форвардных процентных ставок, а также для сохранения гибкости модели возьмём пропорциональные функции $\sigma^i(t,\omega,h)(x) = \sigma^i(x)h(x)$, где $\sigma^i(x)$ — заданные функции из $\mathcal{H}$, параметры модели. Они не обладают свойством равномерной ограниченности, поэтому потребуется их исправить. Первое исправление – ограничение сверху — выполняется путём рассмотрения функции $\sigma^i(x)\left(\chi_K(h(x))\right)$, где $\chi_K(x) = \frac{x}{|x|}\left(x \wedge K\right)$ для достаточно большого K. Ограничение на сверхбольшие процентные ставки выглядит весьма разумным. Кроме того, оно позволяет решить проблему бесконечного математического ожидания в модели геометрического броуновского движения (см. [18]). Однако этим проблема неограниченности $\|\sigma\|_{L^0_2(\mathcal{H})}$ не решается, так как при $\|h\|_{L_\infty} \leqslant K$, но $\|h\|_{\mathcal{H}} \to \infty$ вполне возможно $\|\sigma(h)\|_{L^0_2(\mathcal{H})} \to \infty$. Эту проблему решим в практической реализации путём выбора такого представления h, которое накладывает ограничение на $\|h'\|_{L_\infty}$ a priori, что влечёт $\|h\|_{\mathcal{H}} < K_1$. После этого можно выбрать $\sigma^i(\cdot)$ такими, чтобы $\sigma \in L^0_2(\mathcal{H})$. В этом случае

$$\|\sigma^i(t,\omega,h)\|_{\mathcal{H}} = \|\sigma^i(\chi_K(h))\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|\sigma^i\|_{\mathcal{H}}\|\chi_K(h)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|\sigma^i\|_{\mathcal{H}}K_1$$

и $\|\sigma\|^2_{L^0_2(\mathcal{H})} \leqslant K_1^2 \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\sigma^i\|^2_{\mathcal{H}}$.

В соответствии с теоремой 2, вкупе с начальным значением $h_0 \in \mathcal{H}$ это полностью определяет риск-нейтральную динамику мгновенной форвардной процентной ставки r_t. Следующий элемент, подлежащий спецификации, — рыночная цена риска γ^i, $i \in \mathbb{N}$. В [19] в одномерном случае были исследованы различные варианты задания рыночной цены риска. В соответствии с рекомендациями, данными там, а также для простоты, примем постоянную цену риска $\gamma = {\gamma^i}_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$, где $\gamma^i \in \mathbb{R}$ — параметры модели.

Предположим, что наблюдения (сделки) происходят в моменты времени t_i и информация, заключённая в наблюдении, состоит из: цен облигаций P^i_k, $k = 1,...,N_i$, котировок спроса и предложения на них b^i_k, a^i_k, $k = 1,...,N_i$ и информации об облигациях, т.е. о расписании (общем для всех облигаций) τ^i_s, $n = 0,...,n_i$ и объёмах платежей: $F^i_{s,k}$ (введём фиктивные нулевые платежи, где необходимо, чтобы обеспечить единое расписание платежей). В этих предположениях уравнение ценообразования облигаций будет выглядеть так (чтобы не загромождать запись, опустим индекс i, показывающий, что информация относится к i-му наблюдению): $P_k = \sum\limits_{s=0}^{n} F_{s,k} \exp\left[-\int_0^{\tau_s} r_{t_i}(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$.

Предположим также, что истинные цены наблюдаются с нормально распределённым шумом $\epsilon_k \sim N(0,\delta_k^2)$. Среднеквадратичное отклонение выберем равным разнице котировок спроса и предложения (так называемому bid-ask спрэду), чтобы связать точность с ликвидностью рынка. И наконец, последнее предположение относительно наблюдений заключается в том, что кривые доходности, используемые участниками рынка для расчёта цены сделки, являются достаточно гладкими. Подобно статистической механике, будем считать, что правдоподобность того, что восприятие рынком сделки приведёт к кривой h, будет пропорциональна $e^{-\alpha E(h)}$, где $E(h)$ — некоторая мера негладкости кривой h. Если предположить, что у участников рынка есть среднее мнение относительно того, насколько гладкой должна быть форвардная кривая, то наше предположение соответствует распределению негладкости с максимальной энтропией при фиксированном среднем значении α^{-1}. В качестве меры негладкости выберем $E(h) = \|(\ln h)'\|^2_{L_2}$, что соответствует относительной негладкости: неважно, какие единицы измерения отложены на оси y, нам важна лишь визуальная негладкость самого графика.

Разумеется, возможны и другие формализации негладкости. Распределение наблюдаемой цены P_k будет равно

$$P_k \sim N\left(\sum_{s=0}^{n} F_{s,k} \exp\left[-\int_0^{\tau_s} r_{t_i}(\xi)\mathrm{d}\xi\right], \quad a_k - b_k\right).$$

Таким образом, наблюдение формализуется в терминах функции правдоподобия следующим образом:

$$-\ln \frac{\mathrm{d}P_{r_{t_i}}}{\mathrm{d}P_{r_{t_i-0}}} \propto \sum_{k=1}^{N} w_k \left(\sum_{s=0}^{n} F_{s,k} \exp\left[-\int_0^{\tau_s} r_{t_i}(\xi)\mathrm{d}\xi\right] - P_k\right)^2 + \alpha \int_0^T (\ln r_{t_i}(\xi))'^2 \mathrm{d}\xi,$$

где $w_k = (a_k - b_k)^{-1}$. Единственный параметр, подлежащий заданию, — α, мера желаемой гладкости кривой. Будем считать его заданным извне (например, пользователем системы).

В уравнении динамики (7) сделаем замену $\xi_t(\tau) = \ln r_t(\tau)$. Ввиду того, что решение уравнения (7) не является полумартингалом, к нему неприменима формула Ито, и невозможно сразу выписать уравнение динамики ξ_t. Но можно сделать замену $g(t,T) = \ln f(t,T)$ в каждом из уравнений (3) (подходящую версию леммы Ито для интеграла по бесконечномерному броуновскому движению можно найти в [11]).

$$g(t,T) = g(0,T) + \int_0^t \left(\frac{1}{g(s,T)}\alpha(s,T) - \frac{1}{2g(s,T)^2}\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i(s,T)^2\right)\mathrm{d}s + \\ + \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_0^t \frac{1}{g(s,T)}\sigma^i(s,T)\mathrm{d}\beta_s^i, \quad t \in [0,\, T].$$

Тогда все последующие выкладки, будучи проведёнными с этой функцией, дадут после подстановки $\alpha_t = \sum_i \mathcal{S}\sigma_t^i$ и $\sigma_t^i = f_t\sigma^i$ следующее уравнение динамики:

$$\mathrm{d}\xi_t(x) = \left(\xi_t'(x) + \sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i(x) \int_0^x e^{\xi_t(s)}\sigma^i(s) - \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i(x)^2\right)\mathrm{d}s + \\ + \sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i(x)\mathrm{d}\beta_t^i, \quad x \in [0, T-t].$$

Прежде чем переписывать его в бесконечномерном виде, разложим e^{ξ} в ряд в окрестности ξ_0:

$$\mathrm{d}\xi_t(x) = \left(\xi_t'(x) + \sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i(x) \int_0^x \left[r_0(s)\xi_t(s) + r_0(s)(1-\xi_0(s))\right]\sigma^i(s) - \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i(x)^2\right)\mathrm{d}s + \\ + \sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i(x)\mathrm{d}\beta_t^i, \quad x \in [0,\, T-t].$$

При небольших t $\xi_t = \ln r_t$ будет близко к $\xi_0 = \ln r_0$. На самом деле, при надлежащем выборе точки ξ_0 это разложение даёт достаточную точность при всех разумных (ведь r_t имеет физический смысл форвардной процентной ставки) значениях ξ_t. Кроме того, выбирать новое значение для ξ_0 в случае, если ξ_t по каким-то причинам сильно изменилось, можно сколь угодно часто. В любом случае «узкое место» по точности находится отнюдь не здесь.

После этого можно записать линейное уравнение динамики в $\mathcal{H}$:

$$\mathrm{d}\xi = (A\xi + b)\mathrm{d}s + \sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i(x)\mathrm{d}\beta^i_t,$$

где

$$b(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i(x) \int\limits_0^x r_0(s)(1-\xi_0(s))\sigma^i(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i(x)^2,$$

а оператор A действует на функцию ξ по закону

$$(A\xi)(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma^i \int\limits_0^x r_0(s)\sigma^i(s)\xi(s)\mathrm{d}s + \xi'(x).$$

Следующим этапом на пути к практической реализации является указание конкретного базиса в $\mathcal{H}$, такого, чтобы первые члены разложения по этому базису были разумным приближением функции r_t с учётом её физической сущности. Для этого идеально подходит аппарат вейвлет-анализа. Рассмотрим разложение $L_2 = A_n + \sum_{i=-\infty}^n D_n$ и для регуляризации оставим только A_n. Тогда первые N членов разложения по базису будут отвечать фиксированному уровню детализации. Это имеет смысл, так как кривая процентных ставок должна быть гладкой. Кроме того, это наложит естественное ограничение на $\|r_t'\|_{L_2}$, что обеспечит глобальное существование решения уравнения (7). Ортогональные в L_2 функции не будут являться таковыми в $\mathcal{H}$, но это просто решается ортогонализацией.

Итак, положим $r_t = \sum_{i=1}^N c_k e_k$ и перепишем уравнение динамики покоординатно.

$$\mathrm{d}c = (Ac + b)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^N \sigma^i \mathrm{d}\beta^i = (Ac+b)\mathrm{d}s + B\,\mathrm{d}W.$$

Оно имеет явное решение

$$c \sim N\left(e^{tA}c_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}b\,\mathrm{d}s,\ \int\limits_0^t e^{(t-s)A}BB^T\left(e^{(t-s)A}\right)^T\mathrm{d}s\right).$$

Таким образом, нахождение оценки максимального правдоподобия значения c после следующего наблюдения в момент времени t при условии известного c_0 сводится к минимизации функционала

$$J(c) = \langle c - m_t, B_t^{-1}(c-m_t)\rangle + \\ + \sum_{k=1}^N w_k\left(\sum_{s=0}^n F_{s,k}\exp\left[-\int\limits_0^{\tau_s} r_c(\tau)\mathrm{d}\tau\right] - P_k\right)^2 + \alpha\langle c, Dc\rangle, \quad (8)$$

где

$$m_t = e^{tA}c_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}b\mathrm{d}s,$$

$$B_t = \int\limits_0^t e^{(t-s)A}BB^T\left(e^{(t-s)A}\right)^T\mathrm{d}s, \quad D_{i,j} = \int\limits_0^T e_i'(s)e_j'(s)\mathrm{d}s.$$

В случае, если доступны несколько наблюдений, выражение аналогично. Минимизация этого функционала для 100–200 наблюдений вполне доступна современным компьютерам в разумное время. Однако для вычислений в реальном времени это слишком трудоёмкая задача. Поэтому для приближённой оценки изменения кривой процентных ставок за одно (или несколько) наблюдений был разработан другой, приближённый, алгоритм.

Пусть известно значение $c_0 = c(t_0)$. Эта оценка получена в результате минимизации функционала (8) или его аналога для нескольких измерений.Будем считать, что оценка c в момент t_0 имеет нормальное распределение со средним c_0 и матрицей ковариаций $[J''(c_0)]^{-1}$. До следующего наблюдения в момент t_1 среднее станет равным m_{t_1}, а к матрице ковариаций добавится величина B_{t_1}. Дальше мы найдём c_1 — результат минимизации функционала (8) с другой матрицей B_{t_1} и положим дисперсию оценки c_1 равной $[J''(c_1)]^{-1}$. Для последующих наблюдений повторим аналогично. Практические эксперименты показывают, что при небольших изменениях c этот алгоритм может давать качественную оценку достаточно долго. Результаты численных экспериментов не приводятся из-за нехватки места.

Отметим также следующее свойство модели: предположим, что предыдущие наблюдения отсутствуют, но зато текущее наблюдение достаточно информативно (наблюдаются цены сразу многих бумаг). Тогда оценка максимального правдоподобия будет доставлять минимум

$$J(\xi) = \sum_{k=1}^{N} w_k \left(\sum_{s=0}^{n} F_{s,k} \exp\left[-\int_0^{\tau_s} e^{\xi(\tau)} \mathrm{d}\tau \right] - P_k \right)^2 + \alpha \int_0^T \xi'(\tau)^2 \mathrm{d}\tau$$

что практически совпадает с кривой, построенной в [20]: кривая, построенная там, минимизирует функционал

$$J(f) = \sum_{k=1}^{N} w_k \left(\sum_{s=0}^{n} F_{s,k} \exp\left[-\int_0^{\tau_s} f^2(\tau) \mathrm{d}\tau \right] - P_k \right)^2 + \alpha \int_0^T f'(\tau)^2 \mathrm{d}\tau.$$

Эти постановки отличаются лишь способами формализации негладкости кривой: рассматривается негладкость $\ln r_t$ вместо $\sqrt{r_t}$. В [20] указано, что возможен и такой вариант. Это означает решение глобальной задачи: мы построили модель стохастической динамики кривой доходности, которая в мгновенном срезе даёт известную (и адекватную) модель «моментального снимка».

3. Заключение

В результате построена непараметрическая модель динамики кривой доходности в $W_1^2[0; T]$, удовлетворяющая условию отсутствия арбитражных возможностей. Помимо уравнений динамики также формализованы наблюдения и определена роль гладкости кривой доходности в нашей задаче (провели её регуляризацию). Помимо отсутствия арбитражных возможностей, модель обладает важным свойством неотрицательности мгновенных форвардных процентных ставок. Кроме того, в модель естественным образом включены ошибки наблюдения, добавляемые во многие модели искусственно.

Была также выписана оценка максимального правдоподобия для кривой и проведён ряд преобразований для того, чтобы эта оценка могла быть найдена численным алгоритмом минимизации на компьютере.

При наличии информации, относящейся только к текущему моменту времени, наша оценка вырождается в подобие известного способа нахождения кривой доходности, описанного в [20]. Таким образом, можно считать, что преодолено несоответствие между динамическими моделями и моделями «моментального снимка».

Цена преодоления — возросшая сложность как самой модели, её теоретического обоснования, так и сопутствующих вопросов: оценки кривой доходности согласно модели и оценки параметров модели (функций $\sigma^i(\cdot)$). И если оценка кривой согласно модели вполне выполнима любым алгоритмом численной минимизации на современном компьютере, то вопрос оценки параметров нуждается в дополнительном исследовании, которое проводится в настоящее время.

Литература

1. *Балабушкин А., Гамбаров Г., Шевчук И.* Оценка срочной структуры процентных ставок // Рынок ценных бумаг. — 2004. — С. 44–52.
2. *Chapman D., Pearson N.* Recent Advances in Estimating Term-Structure Models // Financial Analysts Journal. — 2001. — Vol. 57, No 4. — Pp. 77–95.
3. *Dai Q., Singleton K.* Fixed Income Pricing: Techrep / Working paper, New York University. — 2002.
4. *Dai Q., Singleton K.* Term Structure Dynamics in Theory and Reality // Review of Financial Studies. — 2003. — Vol. 16, No 3. — Pp. 631–678.
5. *Bjork T., Christensen B.* Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves // Mathematical Finance. — 1999. — Vol. 9. — Pp. 323–348.
6. *Nelson C., Siegel A.* Parsimonious Modeling of Yield Curves // Journal of Business. — 1987. — Pp. 473–489.
7. *Bjork T., Svensson L.* On the Existence of Finite-Dimensional Realizations for Nonlinear Forward Rate Models // Mathematical Finance. — 2001. — Vol. 11, No 2. — Pp. 205–243.
8. *Filipović D., Teichmann J.* Existence of Invariant Manifolds for Stochastic Equations in Infinite Dimension // Journal of Functional Analysis. — 2003. — Vol. 197, No 2. — Pp. 398–432.
9. *Heath D., Jarrow R., Morton A.* Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation // Econometrica: Journal of the Econometric Society. — 1992. — Pp. 77–105.
10. *Brace A., Musiela M.* A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow, and Morton // Mathematical Finance. — 1994. — Vol. 4, No 3. — Pp. 259–283.
11. *Filipović D.* Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models. — Springer, 2001.
12. *Christensen J., Diebold F., Rudebusch G.* The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models // NBER working paper. — 2007.
13. *Pearson N., Zhou A.* A Nonparametric Analysis of the Forward Rate Volatilities: Techrep / Working paper, Office for Futures and Options Research, University of Illinois. — 1999.
14. *Jeffrey A., Linton O., Nguyen T.* Nonparametric Estimation of Heath-Jarrow-Morton Models and a Test for Path Independence: Techrep / Working paper, Yale University. — 1999.
15. Nonparametric Estimation of a Multifactor Heath-Jarrow-Morton Model: an Integrated Approach / A. Jeffrey, D. Kristensen, O. Linton et al // Journal of Financial Econometrics. — 2004. — Vol. 2, No 2. — Pp. 251–289.
16. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic Equations in Infinite Dimensions. — Cambridge University Press, 1992.
17. *Chiarella C., Hung H., Tô T.* The Volatility Structure of the Fixed Income Market under the HJM Framework: a Nonlinear Filtering Approach // Computational Statistics and Data Analysis. — 2009. — Vol. 53, No 6. — Pp. 2075–2088.
18. *Goldys B., Musiela M., Sondermann D.* Lognormality of Rates and Term Structure Models // Stochastic Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 18, No 3. — Pp. 375–396.
19. *Cheridito P., Filipović D., Kimmel R.* Market Price of Risk Specifications for Affine Models: Theory and Evidence // Journal of Financial Economics. — 2007. — Vol. 83, No 1. — Pp. 123–170.
20. *Лапшин В.* О задачах, связанных с определением срочной структуры процентных ставок // Вестник молодых ученых «Ломоносов». — М.: Макс-пресс, 2007. — Т. 3. — С. 66–71.

UDC 519.216, 519.866

A Nonparametric Stochastic Dynamics Model of Interest Rates

V. A. Lapshin

Economics Department
State University — Higher School of Economics
11, Pokrovsky blv., Moscow, 109028, Russia

We propose a new arbitrage-free nonparametric stochastic dynamics model of interest rates within the Heath–Jarrow–Morton framework using infinite dimensional stochastic calculus. The model yields strictly positive spot forward rates, allows for observation errors and has a straightforward algorithmic implementation.

Key words and phrases: HJM model, Sobolev space, SDEs in Hilbert spaces, mild solution.