УДК 517.911.5

О применении метода направляющих функций к задаче о бифуркации периодических решений дифференциальных включений

Н. В. Лой [*], В. В. Обуховский [†]

[*] *Кафедра алгебры и геометрии*
Воронежский государственный педагогический университет
ул. Ленина, д. 86, Воронеж, Россия, 394043

[†] *Кафедра алгебры и топологических методов анализа*
Воронежский государственный университет
Университетская пл., д. 1, Воронеж, Россия, 394006

В данной работе, применяя метод направляющих функций и метод интегральных направляющих функций, мы изучаем глобальную структуру множества периодических решений однопараметрического семейства дифференциальных включений первого порядка.

Ключевые слова: глобальная бифуркация, направляющая функция, дифференциальное включение, периодическое решение.

1. Введение

Изучение глобальной структуры множества периодических решений дифференциальных уравнений и включений является интересной задачей нелинейного анализа, основная трудность которой возникает при вычислении бифуркационного индекса. В работе В. Крышевского [1] изложено применение метода направляющих функций для изучения глобальной бифуркации периодических решений однопараметрического семейства дифференциальных включений первого порядка. Данная работа является дальнейшим развитием этого подхода. В отличие от результата работы [1, теорема 8.20], в котором глобальная бифуркация происходит из некоторой неопределённой точки, здесь, применяя другие направляющие функции, мы изучим глобальную бифуркацию в заданной точке. Основные результаты работы, установленные в теоремах 3 и 4, показывают, что метод направляющих функций является эффективным средством не только для решения задач о периодических колебаниях, но и для изучения глобальной структуры множества периодических решений.

2. Предварительные сведения

Пусть X, Y — банаховы пространства. Обозначим через $P(Y)\,[Cv(Y), Kv(Y)]$ множество всех непустых (соответственно, непустых замкнутых выпуклых, непустых компактных выпуклых) подмножеств Y.

Определение 1 (см., например [2–4]). Многозначное отображение (мультиотображение) $F\colon X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн.св.), если для каждого открытого множества $V \subset Y$ множество

$$F_+^{-1}(V) = \{x \in X\colon F(x) \subset V\}$$

открыто в X. Пн. св. мультиотображение F называется вполне непрерывным, если образ $F(X_1)$ любого ограниченного множества $X_1 \subset X$ относительно компактен в Y.

Статья поступила в редакцию 12 июня 2009 г.
Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00192, 07-01-00137 и 09-01-92003-ННС-а.

Напомним (см., например [2–4]), что если вполне непрерывное мультиотображение $F\colon \overline{U} \to Kv(X)$ не имеет неподвижных точек на границе ∂U открытого ограниченного множества $U \subset X$, то *топологическая степень многозначного векторного поля* $deg(i - F, \overline{U})$, где i обозначает оператор вложения, корректно определена и обладает всеми обычными свойствами топологической степени.

Определение 2 (см., например [5]). Линейное ограниченное отображение $L\colon X \to Y$ называется фредгольмовым оператором нулевого индекса, если
(1i) $\mathrm{Im}\ L$ замкнуто в Y;
(2i) $\mathrm{Ker}\ L$ и $\mathrm{Coker}\ L$ имеют конечные размерности и $\dim \mathrm{Ker}\ L = \dim \mathrm{Coker}\ L$.

Пусть $L\colon \mathrm{dom}\ L \subseteq X \to Y$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Тогда существуют проекции $P\colon X \to X$ и $Q\colon Y \to Y$ такие, что $\mathrm{Im}\ P = \mathrm{Ker}\ L$ и $\mathrm{Ker}\ Q = \mathrm{Im}\ L$. Если оператор

$$L_P\colon \mathrm{dom}\ L \cap \mathrm{Ker}\ P \to \mathrm{Im}\ L$$

определяется как сужение оператора L на $\mathrm{dom}\ L \cap \mathrm{Ker}\ P$, то L_P является линейным изоморфизмом, и мы можем определить оператор $K_P\colon \mathrm{Im}\ L \to \mathrm{dom}\ L$, $K_P = L_P^{-1}$.

Теперь пусть $\mathrm{Coker}\ L = Y/\mathrm{Im}\ L$; $\Pi\colon Y \to \mathrm{Coker}\ L$ — канонический оператор проектирования

$$\Pi(z) = z + \mathrm{Im}\ L$$

и $\Lambda\colon \mathrm{Coker}\ L \to \mathrm{Ker}\ L$ — линейный непрерывный изоморфизм, тогда уравнение

$$Lx = y, \quad y \in Y$$

эквивалентно уравнению

$$(i - P)x = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})y,$$

где $K_{P,Q}\colon Y \to X$ определяется равенством

$$K_{P,Q} = K_P(i - Q),$$

а i — тождественное отображение.

Пусть $\mathcal{O} \subset X \times \mathbb{R}$ — открытое множество, содержащее некоторую замкнутую окрестность $B_X(0, r_1) \times [\mu_0 - r_2, \mu_0 + r_2]$ точки $(0, \mu_0)$, где

$$B_X(0, r_1) = \{x \in X\colon \|x\|_X \leqslant r_1\}.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство включений

$$x \in \mathcal{F}(x, \mu), \tag{1}$$

где $\mathcal{F}\colon \mathcal{O} \to Kv(X)$ — мультиотображение.

Предположим, что
($\mathcal{F}1$) мультиотображение $\mathcal{F}$ вполне непрерывно и $0 \in \mathcal{F}(0, \mu)$ для всех $(0, \mu) \in \mathcal{O}$;
($\mathcal{F}2$) для каждого μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leqslant r_2$ существует $\pi_\mu > 0$ такое, что $x \notin \mathcal{F}(x, \mu)$ при $0 < \|x\| \leqslant \pi_\mu$;
($\mathcal{F}3$) для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$h(\mathcal{F}(x, \mu), \mathcal{F}(x, \mu')) < \varepsilon$$

для всех (x, μ), $(x, \mu') \in B_X(0, r_1) \times [\mu_0 - r_2, \mu_0 + r_2]$, $|\mu - \mu'| < \delta$, где h — метрика Хаусдорфа (см., например [2]).

Из $(\mathcal{F}1)$–$(\mathcal{F}2)$ следует, что для каждого μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leqslant r_2$ топологическая степень

$$\deg\,(i - \mathcal{F}(\cdot,\mu), B_X(0,\pi_\mu))$$

корректно определена. *Бифуркационный индекс мультиотображения* $\mathcal{F}$ в точке $(0,\mu_0)$ определяется следующим образом

$$\mathrm{Bi}\,\big(\mathcal{F}(0,\mu_0)\big) = \lim_{\mu\to\mu_0^+} \deg\,(i - \mathcal{F}(\cdot,\mu), B_X(0,\pi_\mu)) - \lim_{\mu\to\mu_0^-} \deg\,(i - \mathcal{F}(\cdot,\mu), B_X(0,\pi_\mu)).$$

Через $\mathcal{S}$ обозначим множество всех нетривиальных решений семейства (1), т.е.,

$$\mathcal{S} = \{(x,\mu) \in \mathcal{O}\colon x \neq 0 \text{ и } x \in \mathcal{F}(x,\mu)\}.$$

Справедливо следующее утверждение (см. [6]).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $(\mathcal{F}1)$–$(\mathcal{F}3)$. *Предположим, что*

$$\mathrm{Bi}\,\big(\mathcal{F}(0,\mu_0)\big) \neq 0.$$

Тогда существует связное подмножество $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *такое, что* $(0,\mu_0) \in \overline{\mathcal{R}}$ *и выполнено хотя бы одно из следующих условий:*
а) $\mathcal{R}$ *неограничено;*
б) $\overline{\mathcal{R}} \cap \partial\mathcal{O} \neq \emptyset$*;*
в) $(0,\mu_*) \in \overline{\mathcal{R}}$ *для некоторого* $\mu_* \neq \mu_0$.

3. Постановка задачи

Обозначим через $\mathcal{C}$ пространство всех непрерывных функций $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ и через $\mathcal{L}^p$ пространство всех p-суммируемых функций $L^p([0,T];\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$. Для любого $x \in \mathcal{C}$ и любого $f \in \mathcal{L}^p$ их соответствующие нормы определяются обычным образом:

$$\|x\|_{\mathcal{C}} = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \;\text{ и }\; \|f\|_p = \left(\int_0^T \|f(s)\|^p_{\mathbb{R}^n}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Шар радиуса r в пространстве $\mathbb{R}^n$ $[\mathcal{C}]$ обозначается символом $\overline{U}_r(0)$ (соответственно, $B_{\mathcal{C}}(0,r)$). Через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначим скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство дифференциальных включений типа

$$x^{'}(t) \in F(t,x(t),\mu) \;\text{ для почти всех }\; t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Предположим, что

(F_T) мультифункция $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ T-периодична по первому аргументу, т.е., $F(t,y,\mu) = F(t+T,y,\mu)$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$, и любого $(y,\mu) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$;

$(F1)$ для каждого $(y,\mu) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ мультифункция $F(\cdot,y,\mu)\colon [0,T] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ имеет измеримое сечение;

$(F2)$ для $t = 0$ и почти всех $t \in (0,T]$ мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху;

$(F3)$ для любого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ существует такая неотрицательная функция $h_\Omega \in L^p([0,T];\mathbb{R})$, что

$$\|F(t,y,\mu)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant h_\Omega(t)$$

для всех $(y,\mu) \in \Omega$ и почти всех $t \in [0,T]$, где

$$\|F(t,y,\mu)\|_{\mathbb{R}^n} = \max\{\|z\|_{\mathbb{R}^n} : z \in F(t,y,\mu)\};$$

$(F4)$ $0 \in F(s, 0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$ и почти всех $s \in [0, T]$;
$(F5)$ существует $r_0 > 0$ такое, что для каждого $\kappa > 0$ найдётся $\eta > 0$ такое, что

$$h(F(t, y, \mu), F(t, y, \mu')) < \kappa$$

для всех (y, μ), $(y, \mu') \in \overline{U}_{r_0}(0) \times [\mu_0 - r_0, \mu_0 + r_0]$, $|\mu - \mu'| < \eta$ и почти всех $t \in [0, T]$, где $\mu_0 \in \mathbb{R}$ — заданное число.

Определение 3. Назовём T-периодическим решением семейства (2) такую пару (x, μ), которая удовлетворяет включению (2) и граничному условию: $x(0) = x(T)$.

Замечание 1. Из (F_T) следует, что множество T-периодических решений семейства (2) совпадает с множеством решений следующей задачи

$$x'(t) \in F(t, x(t), \mu) \text{ для почти всех } t \in [0, T], \tag{3}$$
$$x(0) = x(T). \tag{4}$$

Напомним (см., например [2–4]), что при выполнении условий $(F1)$–$(F3)$ мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F \colon \mathcal{C} \times \mathbb{R} \to Cv(\mathcal{L}^p),$$
$$\mathcal{P}_F(x, \mu) = \big\{ f \in \mathcal{L}^p \colon f(s) \in F(s, x(s), \mu) \text{ для почти всех } s \in [0, T] \big\}$$

замкнут, т.е., $\mathcal{P}_F$ имеет замкнутый график.

Обозначим через $W^{1,p}$ пространство всех функций $x \colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$, первые производные которых существуют почти всюду на $[0, T]$ и являются элементами пространства $\mathcal{L}^p$ с нормой

$$\|x\|_W = \|x\|_p + \|x'\|_p.$$

Напомним (см., например [7]), что вложение $W^{1,2} \hookrightarrow \mathcal{C}$ компактно. Пусть $W_T^{1,p}$ обозначает подпространство всех функций $x \in W^{1,p}$ таких, что $x(0) = x(T)$.

Под решением задачи (3)–(4) будем понимать пару $(x, \mu) \in W_T^{1,p} \times \mathbb{R}$ такую, что найдётся функция $f \in \mathcal{P}_F(x, \mu)$, для которой $x'(t) = f(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Из $(F4)$ следует, что $(0, \mu)$ является решением задачи (3)–(4) для любого $\mu \in \mathbb{R}$. Такие решения называем тривиальными. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиальных T-периодических решений семейства (2).

4. Метод направляющих функций и глобальная структура $\mathcal{S}$ при $p = 1$

4.1. Метод направляющих функций

В этом разделе, применяя метод направляющих функций, мы изучим глобальную структуру множества T-периодических решений семейства (2) при $\mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^1$. Заметим, что решениями задачи (3)–(4) являются неподвижные точки следующего семейства интегральных мультиоператоров

$$\mathcal{J}_T \colon \mathcal{C} \times \mathbb{R} \to Kv(\mathcal{C}),$$
$$\mathcal{J}_T(x, \mu) = \left\{ u \colon u(t) = x(T) + \int\limits_0^t f(s)\, \mathrm{d}s, \ f \in \mathcal{P}_F(x, \mu) \right\}.$$

Нетрудно проверить, что $\mathcal{J}_T$ является вполне непрерывным мультиоператором.

Определение 4. (ср. [8,9]). При фиксированном μ точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой T-невозвращаемости траекторий включения (3), если для любого нетривиального решения x включения (3) выполнены условия $x(0) = x_0$ и $x(t) \neq x_0$ для любого $t \in (0, T]$.

Следующее утверждение играет ключевую роль в обосновании применения метода направляющих функций к задаче о глобальной бифуркации периодических решений, доказательство которого является модификацией доказательства теоремы 3.3.10 из [2].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $(F1)$–$(F5)$ *и* (F_T). *Предположим, что для каждого* μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leqslant r_0$, *где* r_0 — *коэффициент в* $(F5)$, *выполнены следующие условия:*

$(F6)$ *существует достаточно малое* $\varepsilon_\mu > 0$ *такое, что если* (x, μ) *является нетривиальным решением семейства* (3) *с начальным условием* $x(0) = 0$, *то* $\|x\|_{\mathcal{C}} \geqslant \varepsilon_\mu$;

$(H1)$ *существует такое* $\delta_\mu \in (0, \varepsilon_\mu)$, *где* ε_μ — *коэффициент в* $(F6)$, *что любая точка*

$$y \in \overline{U}_{\delta_\mu}(0) \setminus \{0\} = \{0 \neq v \in \mathbb{R}^n \colon \|v\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \delta_\mu\}$$

является точкой T*-невозвращаемости траекторий включения* (3);

$(H2)$ *мультиполе* $\mathcal{Q}_\mu \colon \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{Q}_\mu(y) = -F(0, y, \mu)$ *не имеет особых точек на* $\overline{U}_{\delta_\mu}(0) \setminus \{0\}$.

Тогда $x \notin \mathcal{J}_T(x, \mu)$ *при* $0 < \|x\|_{\mathcal{C}} \leqslant \delta_\mu$ *и*

$$\deg\,(i - \mathcal{J}_T(\cdot, \mu), B_{\mathcal{C}}(0, \delta_\mu)) = \deg\,(\mathcal{Q}_\mu, \overline{U}_{\delta_\mu}(0)).$$

Непрерывно дифференцируемую функцию $V \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ будем называть *невырожденным потенциалом*, если её градиент

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\right)$$

не обращается в нуль при $0 < \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant r$, где $r > 0$ достаточно мало.

Из свойств топологической степени вытекает, что степень невырожденного потенциала $\deg\,(\nabla V, \overline{U}_{r'}(0))$ не зависит от $r' \in (0, r)$. Это общее значение степени называется *индексом невырожденного потенциала* и обозначается $\operatorname{ind} V$.

Определение 5 (см. [2], определение 3.3.12). При каждом $\mu \in \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемая функция $V_\mu \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется направляющей функцией для включения (3), если существует достаточно малое $\tau_\mu > 0$ такое, что для любого $y \in F(t, x, \mu)$:

$$\begin{cases} \langle \nabla V_\mu(x), y \rangle > 0 \text{ при } t = 0 \ \text{ и почти всех } \ t \in (0, \tau_\mu),\ 0 < \|x\|_{\mathbb{R}^n} < \tau_\mu, \\ \langle \nabla V_\mu(x), y \rangle \geqslant 0 \text{ при почти всех } \ t \in [\tau_\mu, T]. \end{cases}$$

Из данного определения сразу следует, что если V_μ — направляющая функция включения (3), то V_μ является невырожденным потенциалом, и поля $-\nabla V_\mu$ и $\mathcal{Q}_\mu$ не допускают противоположных направлений на сфере $\partial \overline{U}_r(0)$ при любых $0 < r < \tau_\mu$. Поэтому

$$\deg\,(\mathcal{Q}_\mu, \overline{U}_r(0)) = \deg\,(-\nabla V_\mu, \overline{U}_r(0)) = (-1)^n \operatorname{ind}\ V_\mu.$$

4.2. Глобальная структура $\mathcal{S}$ при $p = 1$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $(F1)$–$(F6)$ *и* (F_T). *Предположим, что для каждого* μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leqslant r_0$, *где* r_0 — *коэффициент в* $(F5)$, *существует направляющая функция* V_μ *для включения* (3) *такая, что*

$$\lim_{\mu \to \mu_0^+} \operatorname{ind} V_\mu - \lim_{\mu \to \mu_0^-} \operatorname{ind} V_\mu \neq 0.$$

Тогда существует связное множество $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *такое, что* $(0, \mu_0) \in \overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограничено, либо* $(0, \mu_*) \in \overline{\mathcal{R}}$ *для некоторого* $\mu_* \neq \mu_0$.

Доказательство. Мы покажем, что мультиотображение $\mathcal{J}_T$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Действительно, выполнение условий $(\mathcal{F}1)$ и $(\mathcal{F}3)$ нетрудно проверить. Теперь покажем, что мультиотображение $\mathcal{J}_T$ удовлетворяет условию $(\mathcal{F}2)$ и подсчитаем бифуркационный индекс $\mathcal{B}\big(\mathcal{J}_T(0, \mu_0)\big)$. Для этого зафиксируем μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leqslant r_0$, и пусть

$$0 < \delta_\mu < \min\{\varepsilon_\mu, \tau_\mu\},$$

где $\varepsilon_\mu, \tau_\mu$ — коэффициенты в $(F6)$ и в определении 5, соответственно.

Покажем, что $\overline{U}_{\delta_\mu}(0) \setminus \{0\}$ является множеством точек T-невозвращаемости траекторий включения (3). Действительно, пусть $x_0 \in \overline{U}_{\delta_\mu}(0) \setminus \{0\}$ и x — любое нетривиальное решение включения (3) такое, что $x(0) = x_0$. Предположим, что существует $t_* \in (0, T]$ такое, что $x(t_*) = x(0)$. Так как $\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \tau_\mu$, то мы можем выбрать $t_\mu \in (0, \tau_\mu)$ такое, что $t_\mu < t_*$ и $\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \tau_\mu$ для любого $t \in (0, t_\mu)$. Но тогда имеем

$$\begin{aligned} 0 = V_\mu(x(t_*)) - V_\mu(x(0)) = \int_0^{t_*} \langle \nabla V_\mu(x(s)), x'(s) \rangle \ \mathrm{d}s = \\ = \int_0^{t_\mu} \langle \nabla V_\mu(x(s)), x'(s) \rangle \ \mathrm{d}s + \int_{t_\mu}^{t_*} \langle \nabla V_\mu(x(s)), x'(s) \rangle \ \mathrm{d}s > 0, \end{aligned}$$

что есть противоречие. Заметим, что для каждого μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leqslant r_0$, из существования направляющей функции V_μ включения (3) следует, что поле $\mathcal{Q}_\mu = -F(0, y, \mu)$ невырождено на $\overline{U}_{\delta_\mu}(0) \setminus \{0\}$. Из теоремы 2 следует, что $x \notin \mathcal{J}_T(x, \mu)$ при $0 < \|x\|_{\mathcal{C}} \leqslant \delta_\mu$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{Bi}\big(\mathcal{J}_T(0, \mu_0)\big) = \lim_{\mu \to \mu_0^+} \deg\,(i - \mathcal{J}_T(\cdot, \mu), B_{\mathcal{C}}(0, \delta_\mu)) - \lim_{\mu \to \mu_0^-} \deg\,(i - \mathcal{J}_T(\cdot, \mu), B_{\mathcal{C}}(0, \delta_\mu)) = \\ = \lim_{\mu \to \mu_0^+} \deg\,(\mathcal{Q}_\mu, \overline{U}_{\delta_\mu}(0)) - \lim_{\mu \to \mu_0^-} \deg\,(\mathcal{Q}_\mu, \overline{U}_{\delta_\mu}(0)) = \\ = (-1)^n \big(\lim_{\mu \to \mu_0^+} \operatorname{ind}\ V_\mu - \lim_{\mu \to \mu_0^-} \operatorname{ind}\ V_\mu \big) \neq 0. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства нам достаточно применять теорему 1 с замечанием, что множество $\mathcal{C} \times \mathbb{R}$ неограничено, поэтому случай (b) теоремы 1 не может иметь места. □

5. Метод интегральных направляющих функций. Глобальная структура $\mathcal{S}$ при $p = 2$

5.1. Интегральная направляющая функция

В этом разделе мы изучим задачу о глобальной структуре T-периодических решений семейства (2) при $\mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^2$. Пусть мультиотображение F удовлетворяет условиям (F_T), $(F1)$ и $(F3)$–$(F5)$. Дополнительно предположим, что

$(F2)'$ для почти всех $t \in [0, T]$ мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху;

Определим оператор $\ell\colon W_T^{1,2} \to \mathcal{L}^2$ следующим образом

$$\ell x = x'.$$

Известно, что ℓ является линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса и

$$\mathrm{Ker}\ \ell \cong \mathbb{R}^n \cong \mathrm{Coker}\ \ell.$$

Заменим проблему (3)–(4) включением

$$\ell x \in \mathcal{P}_F(x, \mu),$$

или эквивалентным ему

$$x \in G(x, \mu), \tag{5}$$

где

$$G\colon \mathcal{C} \times \mathbb{R} \multimap \mathcal{C}, \quad G(x, \mu) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\mathcal{P}_F(x, \mu).$$

Напомним, что проекция $\Pi\colon \mathcal{L}^2 \to \mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\Pi f = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds$$

и гомоморфизм $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является тождественным оператором.

Определение 6 (см. [10]). При каждом $\mu \in \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемая функция $V_\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется интегральной направляющей функцией для включения (3), если существует достаточно малое $\pi_\mu > 0$ такое, что для любого $x \in W_T^{1,2}$ из $0 < \|x\|_2 \leqslant \pi_\mu$ и $\|x'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \|F(t, x(t), \mu)\|_{\mathbb{R}^n}$ для почти всех $t \in [0, T]$ следует

$$\int_0^T \langle \nabla V_\mu(x(s)), f(s)\rangle\, ds > 0$$

для $f \in \mathcal{P}_F(x, \mu)$ таких, что $\|x'\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

Заметим, что интегральная направляющая функция V_μ является невырожденным потенциалом. В самом деле, для любого $y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \|y\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{\pi_\mu}{\sqrt{T}}$, считая y постоянной функцией, имеем

$$\int_0^T \langle \nabla V_\mu(y), f(s)\rangle\ \mathrm{d}s = \left\langle \nabla V_\mu(y), \int_0^T f(s)\mathrm{d}s \right\rangle = T\,\langle \nabla V_\mu(y), \Pi f\rangle > 0$$

для любого $f \in \mathcal{P}_F(y, \mu)$. Отсюда следует, что $\nabla V_\mu(y) \neq 0$ при $0 < \|y\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{\pi_\mu}{\sqrt{T}}$.

5.2. Глобальная структура $\mathcal{S}$ при $p = 2$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* $(F1)$, $(F2)'$, $(F3)$–$(F5)$ *и* (F_T). *Предположим, что для каждого* μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leqslant r_0$, *где* r_0 *— коэффициент в* $(F5)$, *существует интегральная направляющая функция* V_μ *для включения* (3) *такая, что*

$$\lim_{\mu\to\mu_0^+} \operatorname{ind} V_\mu - \lim_{\mu\to\mu_0^-} \operatorname{ind} V_\mu \neq 0.$$

Тогда существует связное множество $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *такое, что* $(0, \mu_0) \in \overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограничено, либо* $(0, \mu_*) \in \overline{\mathcal{R}}$ *для некоторого* $\mu_* \neq \mu_0$.

Доказательство. Мы покажем, что мультиотображение G удовлетворяет условиям теоремы 1.

Пространства $W_T^{1,2}$ и $\mathcal{L}^2$ допускают следующие разложения

$$W_T^{1,2} = W_0 \oplus W_1, \quad \text{и} \quad \mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1,$$

где $W_0 = \operatorname{Ker}\ \ell$, $W_1 = W_0^\perp$, $\mathcal{L}_0 = \operatorname{Coker}\ \ell$, $\mathcal{L}_1 = \operatorname{Im}\ \ell$. Соответствующие разложения элементов $u \in W_T^{1,2}$ и $f \in \mathcal{L}^2$ обозначаются следующим образом

$$u = u_0 + u_1, \quad u_0 \in W_0, \quad u_1 \in W_1, \quad \text{и} \quad f = f_0 + f_1, \quad f_0 \in \mathcal{L}_0, \quad f_1 \in \mathcal{L}_1.$$

Шаг 1. Из $(F4)$ следует, что $0 \in G(0, \mu)$ для любого $\mu \in \mathbb{R}$. Пусть

$$\Phi\colon \mathcal{C} \times \mathbb{R} \times [0, 1] \to Cv(\mathcal{L}^2),$$
$$\Phi(x, \mu, \lambda) = \alpha(\mathcal{P}_F(x, \mu), \lambda),$$

где $\alpha\colon \mathcal{L}^2 \times [0, 1] \to \mathcal{L}^2$ определяется равенством

$$\alpha(f_0 + f_1, \lambda) = f_0 + \lambda f_1.$$

Покажем, что мультиоператор

$$\Sigma\colon \mathcal{C} \times \mathbb{R} \times [0, 1] \to Cv(\mathcal{C}),$$
$$\Sigma(x, \mu, \lambda) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\Phi(x, \mu, \lambda)$$

вполне непрерывен.

Действительно, из непрерывности линейного оператора α следует, что оператор

$$(\Lambda\Pi + K_{P,Q}) \circ \alpha\colon \mathcal{L}^2 \to \mathcal{C}$$

непрерывен. Тогда, применяя теорему 1.5.30 из [2], мы получаем, что мультиоператор $(\Lambda\Pi + K_{P,Q})\Phi$ замкнут.

Далее, для любого ограниченного множества $U \subset \mathcal{C} \times \mathbb{R} \times [0, 1]$ в силу $(F3)$ множество $\Phi(U)$ ограничено в $\mathcal{L}^2$. Но тогда множество $(\Lambda\Pi + K_{P,Q})\Phi(U)$ ограничено в $W_T^{1,2}$ и из теоремы вложения Соболева вытекает относительная компактность множества $(\Lambda\Pi + K_{P,Q})\Phi(U)$ в пространстве $\mathcal{C}$. Замкнутое и компактное мультиотображение $(\Lambda\Pi + K_{P,Q})\Phi$ полунепрерывно сверху (см., например [2–4]). Наконец, утверждение следует из того, что оператор P непрерывен и принимает значения в конечномерном пространстве. В частности, мультиотображение $G = \Sigma(\cdot, \cdot, 1)$ вполне непрерывно. Условие $(\mathcal{F}1)$ выполнено.

Шаг 2. Покажем теперь, что для каждого μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leqslant r_0$, найдётся $r_\mu > 0$ такое, что $x \notin G(x, \mu)$ при $0 < \|x\|_{\mathcal{C}} \leqslant r_\mu$.

В самом деле, выбираем произвольное $0 < r_\mu \leqslant \min\left\{\pi_\mu, \frac{\pi_\mu}{\sqrt{T}}\right\}$, где π_μ — коэффициент в определении 6, и предположим, что $x \in B_{\mathcal{C}}(0, r_\mu)$ — нетривиальное решение включения (3). Тогда существует $f \in \mathcal{P}_F(x,\mu)$ такое, что $x'(t) = f(t)$ для почти всех $t \in [0,T]$.

Из $0 < \|x\|_2 \leqslant \pi_\mu$ и $\|x'(s)\|_{\mathbb{R}^n} = \|f(s)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \|F(s,x(s),\mu)\|_{\mathbb{R}^n}$ для почти всех $s \in [0,T]$ следует

$$\int\limits_0^T \langle \nabla V_\mu(x(s)), f(s)\rangle \,\mathrm{d}s = \int\limits_0^T \langle \nabla V_\mu(x(s)), x'(s)\rangle \,\mathrm{d}s = V_\mu\big(x(T)\big) - V_\mu\big(x(0)\big) > 0,$$

что даёт противоречие. Условие $(\mathcal{F}2)$ выполнено. Условие $(\mathcal{F}3)$ непосредственно следует из $(F5)$.

Шаг 3. На этом шаге мы подсчитаем бифуркационный индекс для мультиотображения G в точке $(0,\mu_0)$. Для этого фиксируем μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leqslant r_0$, и выбираем r_μ как и на шаге 2. Рассмотрим следующее семейство включений

$$x \in \Sigma_\mu(x,\lambda), \tag{6}$$

где

$$\Sigma_\mu \colon \mathcal{C} \times [0,1] \to Kv(\mathcal{C}), \quad \Sigma_\mu(x,\lambda) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\Phi(x,\mu,\lambda).$$

Как показано на шаге 1, мультиотображение Σ_μ вполне непрерывно. Теперь мы покажем, что Σ_μ не имеет неподвижных точек на $\partial B_{\mathcal{C}}(0,r_\mu) \times [0,1]$.

Предположим противное и пусть $(x^*,\lambda^*) \in \partial B_{\mathcal{C}}(0,r_\mu) \times [0,1]$ есть решение (6), тогда существует функция $f^* \in \mathcal{P}_F(x^*,\mu)$ такая, что

$$x^* = Px^* + (\Lambda\Pi + K_{P,Q}) \circ \alpha(f^*,\lambda^*),$$

или эквивалентно

$$\begin{cases} \ell x^* = \lambda^* f_1^* \\ 0 = f_0^*, \end{cases}$$

где $f_0^* + f_1^* = f^*$, $f_0^* \in \mathcal{L}_0$ и $f_1^* \in \mathcal{L}_1$.

Так как $0 < \|x^*\|_2 \leqslant \pi_\mu$, $\|x^{*\prime}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \|f^*(t)\|_{\mathbb{R}^n}$ для почти всех $t \in [0,T]$, то

$$\int\limits_0^T \langle \nabla V_\mu(x^*(s)), f^*(s)\rangle \,\mathrm{d}s > 0.$$

Если $\lambda^* \neq 0$, то

$$\int\limits_0^T \langle \nabla V_\mu(x^*(s)), f^*(s)\rangle \, ds = \int\limits_0^T \left\langle \nabla V_\mu(x^*(s)), \frac{1}{\lambda^*} x^{*\prime}(s) \right\rangle \mathrm{d}s =$$
$$= \frac{1}{\lambda^*}\Big(V_\mu(x^*(T)) - V_\mu(x^*(0))\Big) = 0,$$

что есть противоречие.

Если $\lambda^* = 0$, то $\ell x^* = 0$. Это значит, что $x^* \in \operatorname{Ker}\ \ell$, т.е., $x^* \equiv a$ для некоторого $a \in \mathbb{R}^n$, $\|a\|_{\mathbb{R}^n} = r_\mu$. Из того, что $\|x'\|_2 = 0 \leqslant \|f\|_2$ для любого $f \in \mathcal{P}_F(a,\mu)$, следует

$$\int\limits_0^T \langle \nabla V_\mu(a), f(s)\rangle \,\mathrm{d}s > 0$$

для любого $f \in \mathcal{P}_F(a,\mu)$.

С другой стороны,

$$\int\limits_0^T \langle \nabla V_\mu(a), f(s)\rangle \, \mathrm{d}s = \left\langle \nabla V_\mu(a), \int\limits_0^T f(s)\, ds \right\rangle = T \langle \nabla V_\mu(a), \Pi f\rangle .$$

Поэтому

$$T \langle \nabla V_\mu(a), \Pi f\rangle > 0. \tag{7}$$

Следовательно, $\Pi f \neq 0$ для любого $f \in \mathcal{P}_F(a,\mu)$, в частности $\Pi f^* \neq 0$. Но, $\Pi f^* = \Pi f_0^* = 0$ в силу того, что $f_0^* = 0$, что даёт противоречие.

Таким образом, мультиотображение Σ_μ является гомотопией, соединяющей мультиотображения $\Sigma_\mu(\cdot,1) = G(\cdot,\mu)$ и $\Sigma_\mu(\cdot,0) = P + \Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu)$ (так как оператор Λ является тождественным и $\Pi g = 0$ для любого $g \in \mathcal{L}_1$). В силу свойства гомотопической инвариантности топологической степени получаем

$$\deg\,\big(i - G(\cdot,\mu), B_{\mathcal{C}}(0,r_\mu)\big) = \deg\,\big(i - P - \Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu), B_{\mathcal{C}}(0,r_\mu)\big).$$

Мультиотображение $P + \Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu)$ принимает значения в $\mathbb{R}^n$, поэтому

$$\deg\,\big(i - P - \Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu), B_{\mathcal{C}}(0,r_\mu)\big) = \deg\,\big(i - P - \Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu), \overline{U}_{r_\mu}(0)\big),$$

где $\overline{U}_{r_\mu}(0) = B_{\mathcal{C}}(0,r_\mu) \cap \mathbb{R}^n$.
В пространстве $\mathbb{R}^n$ мультиполе $i - P - \Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu)$ имеет вид

$$i - P - \Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu) = -\Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu),$$

поэтому

$$\deg\,\big(i - P - \Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu), \overline{U}_{r_\mu}(0)\big) = \deg\,\big(-\Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu), \overline{U}_{r_\mu}(0)\big).$$

Из (7) следует, что мультиполя $\Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu)$ и $\nabla_\mu V$ гомотопны на $\overline{U}_{r_\mu}(0)$, поэтому

$$\deg\,\big(-\Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu), \overline{U}_{r_\mu}(0)\big) = \deg\,\big(-\nabla V_\mu, \overline{U}_{r_\mu}(0)\big) = (-1)^n \mathrm{ind}\; V_\mu.$$

Теперь бифуркационный индекс подсчитывается следующим образом

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Bi}\,\big(G(0,\mu_0)\big) = \\
&\quad= \lim_{\mu\to\mu_0^+} \deg\,(i - G(\cdot,\mu), B_{\mathcal{C}}(0,r_\mu)) - \lim_{\mu\to\mu_0^-} \deg\,(i - G(\cdot,\mu), B_{\mathcal{C}}(0,r_\mu)) = \\
&\quad= \lim_{\mu\to\mu_0^+} \deg\,\big(-\Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu), \overline{U}_{r_\mu}(0)\big) - \lim_{\mu\to\mu_0^-} \deg\,\big(-\Pi\mathcal{P}_F(\cdot,\mu), \overline{U}_{r_\mu}(0)\big) = \\
&\qquad\qquad= (-1)^n \big(\lim_{\mu\to\mu_0^+} \mathrm{ind}\; V_\mu - \lim_{\mu\to\mu_0^-} \mathrm{ind}\; V_\mu\big) \neq 0.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства нам нужно только применить теорему 1 с замечанием, что множество $\mathcal{C} \times \mathbb{R}$ неограничено, поэтому случай (b) теоремы 1 не может иметь места. $\square$

6. Заключение

В настоящей работе исследована глобальная бифуркация периодических решений семейства дифференциальных включений в заданной точке. С помощью метода направляющих функций и интегральных направляющих функций мы показали, что ветвь нетривиальных T-периодических решений семейства либо уходит к бесконечности, либо переходит к другой точке бифуркации.

Литература

1. *Kryszewski W.* Homotopy Properties of Set-Valued Mappings. — Torun: Univ. N. Copernicus Publishing, 1997.
2. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — Москва: КомКнига, 2005. — 216 с.
3. *Deimling K.* Multivalued Differential Equations. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.
5. *Gaines R. E., Mawhin J. L.* Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. — Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977.
6. *Alexander J. C., Fitzpatrick P. M.* Global Bifurcation for Solutions of Equations Involving Several Parameter Multivalued Condensing Mappings // Fixed Point Theory. Lecture Notes in Mathematics / Ed. by E. Fadell, G. Fornier. — 1981. — Vol. 886. — Pp. 1–19.
7. *Denkowski Z., Migórski S., Papageorgiou N. S.* An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory. — Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 2003.
8. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1966.
9. *Красносельский М. М., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — Москва: Наука, 1966.
10. *Kornev S. V., Obukhovskii V. V.* On Some Developments of the Method of Integral Guiding Functions // Functional Differential Equat. — 2005. — T. 12, № 3-4. — C. 303.

UDC 517.911.5

Application of the Method of Guiding Functions to Problem of Bifurcation of Periodic Solutions of Differential Inclusions

N. V. Loi *, **V. V. Obukhovskii** †

* *Voronezh state pedagogical university*
ul. Lenina, 86, Voronezh, Russian, 394043

† *Voronezh state university*
Universitetskaya pl., 1, Voronezh, Russian, 394006

In this paper, applying the method of guiding functions and of integral guiding functions we consider the problem of global bifurcation of periodic solutions of the family of one-parameter ordinary differential inclusions.

Key words and phrases: global bifurcation, guiding function, differential inclusion, periodic solution.