Математика

УДК 517.965

Неподвижные точки h-вполне непрерывных многозначных отображений и неравенства в пространствах с конусом

А. Б. Гельман

Кафедра алгебры и топологических методов анализа
Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, Воронеж, Россия, 394693

В первой части статьи вводится и изучается новый класс многозначных отображений. Эти отображения имеют выпуклые замкнутые, но некомпактные образы. Для отображений из этого класса удаётся доказать теоремы о неподвижных точках, которые во второй части статьи применяются к изучению разрешимости неравенств в пространствах с конусом.

Ключевые слова: метрика Хаусдорфа, многозначные отображения, неподвижные точки, конус в банаховом пространстве.

1. Введение

Существенное место в теории многозначных отображений занимает проблема изучения неподвижных точек, которые в различных задачах интерпретируются как оптимальные стратегии, равновесные цены, оптимальные траектории и т.д. В настоящее время теория неподвижных точек многозначных вполне непрерывных отображений с выпуклыми компактными образами развита достаточно хорошо (см., например, [1]).

В работе [2] был введён и изучен новый класс многозначных отображений (h-вполне непрерывные отображения). Эти отображения имеют выпуклые замкнутые, но некомпактные образы. В ней полученные теоремы применялись к изучению проблемы разрешимости операторных уравнений с сюръективными операторами.

В настоящей статье продолжено изучение многозначных отображений из этого класса. В первой части статьи получены новые теоремы о неподвижных точках многозначных отображений, которые во второй части статьи применяются к изучению разрешимости неравенств в банаховом пространстве с конусом. Неравенства такого типа возникают в различных задачах математической экономики и других разделах современной математики.

Некоторые результаты о существовании решений у систем неравенств в банаховых пространствах получены в [3, 4] и др. В работах [5, 6] были доказаны теоремы о разрешимости неравенств в пространствах R^n и $C_{[a,b]}$ и была поставлена проблема доказательства аналогичной теоремы для произвольного банахова пространства с конусом. Решению этой проблемы и посвящена вторая часть работы.

Статья поступила в редакцию 28 мая 2009 г.

2. Неподвижные точки h-вполне непрерывных многозначных отображений

2.1. h-вполне непрерывные многозначные отображения

Пусть Y — метрическое пространство, $C(Y)$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств Y. Пусть $A, B \in C(Y)$. Величину (конечную или бесконечную)

$$\rho_*(A, B) = \sup_{a\in A} \rho(a, B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \rho(a, b)$$

называют полуотклонением множества A от множества B. Рассмотрим квазиметрику Хаусдорфа $h : C(Y) \times C(Y) \to \mathbb{R} \cup \infty$,

$$h(A, B) = \max\{\rho_*(A, B); \rho_*(B, A)\}.$$

В квазиметрическом пространстве $(C(Y), h)$ естественно определяется структура топологического пространства, базой которой является семейство множеств $\{V(A, r)\}$, где $V(A, r) = \{B \in C(Y) \,|\, h(B, A) < r\}$, $A \in C(Y)$, r — неотрицательное вещественное число.

Будем обозначать $\mathfrak{C}(Y)$ множество $C(Y)$, снабжённое этой топологией.

Пусть Y — подмножество нормированного пространства E. Обозначим $Cv(Y)$ множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств Y.

Если $F : X \to Cv(E)$ — некоторое многозначное отображение, то оно порождает однозначное отображение $\mathfrak{F} : X \to \mathfrak{C}(Y)$, где $\mathfrak{F}(x) = F(x) \in \mathfrak{C}(Y)$.

Определение 1. Будем говорить, что многозначное отображение F является h-непрерывным, если:
(1) отображение $\mathfrak{F}$, порождённое отображением F, является непрерывным.
Если кроме условия (1) отображение $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующему условию:
(2) для любого ограниченного множества $D \subset X$ множество $\overline{\mathfrak{F}(D)}$ является компактным множеством в $\mathfrak{C}(E)$, то будем говорить, что многозначное отображение F является h-вполне непрерывным.

Рассмотрим примеры h-вполне непрерывных отображений.

Пример 1. Пусть X, Z — метрические пространства, $f : X \to Z$ — вполне непрерывное однозначное отображение, $G : Z \to Cv(E)$ — h-непрерывное многозначное отображение. Нетрудно проверить, что многозначное отображение $F = G \circ f : X \to Cv(E)$ является h-вполне непрерывным.

Рассмотрим частный случай этого примера, необходимый нам в дальнейшем.

Пример 2. Пусть X — метрическое пространство, E — нормированное пространство, K — замкнутое выпуклое подмножество в E, $f : X \to E$ — вполне непрерывное отображение. Рассмотрим многозначное отображение $F : X \to Cv(E)$, $F(x) = f(x) + K$. Это отображение является h-вполне непрерывным, так как $F = G \circ f$, где многозначное отображение $G : E \to Cv(E)$, $G(y) = y + K$.

2.2. Неподвижные точки h-вполне непрерывных отображений

Пусть E — банахово пространство, X — метрическое пространство, $F : X \to Cv(E)$ — h-вполне непрерывное многозначное отображение, A — ограниченное подмножество пространства X.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $f_\varepsilon : A \to E$ такое, что:*
(a) множество $\overline{f_\varepsilon(A)}$ является компактным;
(b) $\rho(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon$ для любой точки $x \in A$.

Для доказательства этой теоремы нам необходима следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть K — относительно компактное подмножество в $\mathfrak{C}(E)$, элементами которого являются замкнутые выпуклые подмножества E. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $p_\varepsilon : K \to E$ такое, что $\rho(p_\varepsilon(B), B)) < \varepsilon$ для любого множества $B \in K$.*

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем в K конечную ε-сеть $\tau = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$, т.е. такой набор множеств из K, что для любого $B \in K$ существует $B_i \in \tau$ такое, что $h(B, B_i) < \varepsilon$.

Определим функции $\alpha_i : K \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, условием:

$$\alpha_i(B) = \begin{cases} \varepsilon - h(B, B_i), \text{ если } h(B, B_i) < \varepsilon, \\ 0, \text{ если } h(B, B_i) \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что эти функции непрерывны, и $\alpha_i(B) > 0$ тогда и только тогда, когда $h(B, B_i) < \varepsilon$.

Пусть $\mu(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(B)$, а $\beta_i(B) = \frac{\alpha_i(B)}{\mu(B)}$. Тогда функции $\beta_i : K \to E$ обладают следующими свойствами:

1) для любого $i = 1, 2, ..., n$ функции β_i непрерывны и принимают значения между нулём и единицей;
2) для любого множества $B \in K$ справедливо равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(B) = 1$;
3) для любого $i = 1, 2, ..., n$ функции $\beta_i(B) > 0$ тогда и только тогда, когда $h(B, B_i) < \varepsilon$.

Выберем в каждом множестве B_i произвольную точку y_i и определим отображение $p_\varepsilon : K \to E$ по следующему правилу:

$$p_\varepsilon(B) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(B) y_i.$$

Очевидно, что отображение p_ε является непрерывным компактным отображением. Проверим, что $\rho(p_\varepsilon(B), B)) < \varepsilon$ для любого множества $B \in K$. Для этого выбросим из суммы $p_\varepsilon(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(B) y_i$ нулевые слагаемые, тогда $p_\varepsilon(B) = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_{i_j}(B) y_{i_j}$, где $\beta_{i_j}(B) > 0$ для любого $j = 1, 2, ..., m$. Так как $\beta_{i_j}(B) > 0$, то $h(B, B_{i_j}) < \varepsilon$. Следовательно, существует точка $\bar{y}_{i_j} \in B$ такая, что $||\bar{y}_{i_j} - y_{i_j}|| < \varepsilon$. Рассмотрим точку $\tilde{y} = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_{i_j}(B) \bar{y}_{i_j}$. В силу свойств 1-й и 2-й функций β_i и выпуклости множества B точка $\tilde{y} \in B$. Тогда

$$\rho(p_\varepsilon(B), B)) \leqslant ||p_\varepsilon(B) - \tilde{y}|| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \beta_{i_j}(B) ||y_{i_j} - \bar{y}_{i_j}|| < \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Доказательство (теоремы 1). Пусть A произвольное ограниченное множество, принадлежащее X. Обозначим $K = \mathfrak{F}(A) \subset \mathfrak{C}(E)$. Так как отображение F является h-вполне непрерывным, то множество K является относительно компактным в $\mathfrak{C}(E)$. Пусть ε — произвольное положительное число. Рассмотрим отображение $p_\varepsilon : K \to E$, удовлетворяющее условиям леммы 1. Пусть отображение $f_\varepsilon = p_\varepsilon \circ \mathfrak{F} : A \to E$. Очевидно, что это отображение является компактным непрерывным отображением и

$$\rho(f_\varepsilon(x), F(x)) = \rho(p_\varepsilon(F(x)), F(x)) < \varepsilon.$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. Пусть A — ограниченное подмножество в банаховом пространстве E, $F : A \to Cv(E)$ — h-вполне непрерывное отображение, T — выпуклое подмножество E такое, что $F(x) \bigcap T \neq \emptyset$ для любого $x \in A$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $f_\varepsilon : A \to E$ такое, что:

(a) множество $\overline{f_\varepsilon(A)}$ является компактным;

(b) $\rho(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon$ для любой точки $x \in A$;

(c) $f_\varepsilon(x) \in T$ для любого $x \in A$.

Доказательство. Обозначим $K = \mathfrak{F}(A) \subset \mathfrak{C}(E)$. Так как отображение F является h-вполне непрерывным, то множество K является относительно компактным в $\mathfrak{C}(E)$. Пусть ε — произвольное положительное число. Рассмотрим отображение $p_\varepsilon : K \to E$, удовлетворяющее условиям леммы 1, т.е. $p_\varepsilon(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(B) y_i$, только точки y_i будем выбирать из $B_i \bigcap T$. Тогда отображение p_ε будет действовать в множестве T, так как это множество выпукло. Теперь отображение f_ε определим равенством $f_\varepsilon = p_\varepsilon \circ \mathfrak{F}$. Это и доказывает следствие. □

Пусть T — ограниченное выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства E, $F : T \to Cv(E)$ — многозначное h-вполне непрерывное отображение.

Теорема 2. *Если $F(x) \bigcap T \neq \emptyset$ для любой точки $x \in T$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_\varepsilon \in T$ такая, что $\rho(x_\varepsilon, F(x_\varepsilon)) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Рассмотрим отображение $f_\varepsilon : T \to E$, удовлетворяющее условиям следствия 1. Так как отображение f_ε вполне непрерывно, то по теореме Шаудера оно имеет неподвижную точку x_ε. Тогда $\rho(x_\varepsilon, F(x_\varepsilon)) = \rho(f(x_\varepsilon), F(x_\varepsilon)) < \varepsilon$. Теорема доказана. □

В общем случае, при выполнении условий теоремы 2 многозначное h-вполне непрерывное отображение может не иметь неподвижных точек. Однако в некоторых специальных случаях существование неподвижных точек можно установить. Нам понадобится следующая лемма.

Пусть Y — метрическое пространство, E — банахово пространство, $G : Y \to Cv(E)$ — h-непрерывное многозначное отображение. Пусть многозначное отображение $H : Y \to V(E)$ имеет выпуклые образы и график $\Gamma(H)$ является открытым множеством в $Y \times E$. Пусть для любого $y \in Y$ пересечение $H(y) \cap G(y) \neq \emptyset$. Обозначим $H \cap G$ многозначное отображение, определённое условием $(H \cap G)(y) = H(y) \cap G(y)$.

Лемма 2. *При сделанных предположениях существует непрерывное отображение $g : Y \to E$ такое, что $g(y) \in (H \cap G)(y)$ для любого $y \in Y$.*

Доказательство этой леммы содержится в [7].

Пусть Y — метрическое пространство, E — банахово пространство, U — ограниченное открытое выпуклое подмножество E, $f : \overline{U} \to Y$ — вполне непрерывное отображение, $G : Y \to Cv(E)$ — h-непрерывное многозначное отображение. Тогда $F = G \circ f : \overline{U} \to Cv(E)$ является h-вполне непрерывным отображением (см. пример 2).

Теорема 3. *Пусть для любой точки $x \in \overline{U}$ множество $G(x)$ компактно в слабой топологии. Если существует такое открытое выпуклое множество $V \subset \overline{V} \subset U$, что для любого $x \in \overline{U}$ пересечение $F(x) \bigcap V \neq \emptyset$, то многозначное отображение F имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $B = \overline{f(\partial U)}$, тогда для любой точки $\bar{y} \in f(\partial U)$ существует точка $x \in \partial U$ такая, что $\bar{y} = f(x)$. Следовательно, $G(\bar{y}) \bigcap V \neq \emptyset$.

Покажем теперь, что $G(y) \cap \overline{V} \neq \emptyset$ для любой точки $y \in B$. Предположим противное, тогда существует точка $y_0 \in B$ такая, что $G(y_0) \cap \overline{V} = \emptyset$. Пусть

$\{y_n\} \in f(\partial U)$, $\{y_n\} \to y_0$, $z_n \in (G(y_n) \bigcap V)$. В силу h-непрерывности многозначного отображения G расстояние $\rho(z_n, G(y_0)) \to 0$. Выберем последовательность $\{\bar{z}_n\} \subset G(y_0)$ так, чтобы $\rho(z_n, \bar{z}_n) \to 0$. В силу слабой компактности множества $G(y_0)$ без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\bar{z}_n\} \to z_* \in G(y_0)$ в слабой топологии. Очевидно, что тогда и последовательность $\{z_n\} \to z_*$ в слабой топологии. Так как множество V выпукло, то $\overline{V}$ также выпукло, а следовательно, замкнуто в слабой топологии. Тогда в силу того, что $z_n \in V$, точка $z_* \in \overline{V}$. Следовательно, $(G(y_0) \cap \overline{V}) \ni z_*$. Получаем противоречие.

Тогда
$$(G(y) \cap U) \supset (G(y) \cap \overline{V}) \neq \emptyset$$
для любой точки $y \in B$.

Рассмотрим многозначное отображение $H : Y \to P(E)$, определённое условием:
$$H(y) = \begin{cases} U, \text{ если } \ y \in B, \\ E, \text{ если } \ y \notin B. \end{cases}$$
Очевидно, что это многозначное отображение имеет выпуклые образы и его график открыт в $Y \times E$. Очевидно также, что $H(y) \bigcap G(y) \neq \emptyset$ для любого $y \in Y$.

Следовательно, в силу леммы 2 существует непрерывное отображение $g : Y \to E$ такое, что $g(y) \in (H(y) \bigcap G(y))$. Рассмотрим отображение $\varphi : \overline{U} \to E$ определённое по правилу: $\varphi(x) = g(f(x))$. Так как f является компактным отображением, то отображение φ также компактно и $\varphi(\overline{U}) \subset \overline{U}$. Тогда по теореме Шаудера отображение φ имеет неподвижную точку x_*, т.е. $x_* = g(f(x_*)) \in G(f(x_*)) = F(x_*)$. Теорема доказана. □

Для изучения вопроса о существовании неподвижных точек h-вполне непрерывных многозначных отображений может быть применена теория топологической степени вполне непрерывных векторных полей [8].

Пусть $U \subset E$ — ограниченное открытое множество, $F : \partial U \to Cv(E)$ — h-вполне непрерывное отображение.

Теорема 4. *Пусть существуют вполне непрерывные отображения $f_1, f_2 : \partial U \to E$, удовлетворяющие следующим условиям:*
(1) f_1 и f_2 являются непрерывными сечениями F;
(2) $x \neq f_1(x)$, $x \neq f_2(x)$ для любой точки $x \in \partial U$.

Если $\deg(i - f_1, \partial U) \neq \deg(i - f_2, \partial U)$, то отображение F имеет неподвижную точку на ∂U.

Доказательство. Рассмотрим отображение $g : [0,1] \times \partial U \to E$,
$$g(t,x) = (1-t)f_1(x) + tf_2(x).$$
Очевидно, что это отображение вполне непрерывно. Если бы $g(t,x) \neq x$ для любой точки $x \in \partial U$ и $t \in [0,1]$, тогда отображение $\psi(t,x) = x - g(t,x)$ являлось бы невырожденной гомотопией, соединяющей поля $\phi_1 = i - f_1$ и $\phi_2 = i - f_2$. Тогда бы $\deg(i - f_1, \partial U) = \deg(i - f_2, \partial U)$. Так как по условию теоремы это не выполнено, то $g(t_0, x_0) = x_0$ для некоторой точки $x_0 \in \partial U$ и $t_0 \in [0,1]$. По условию теоремы $f_1(x_0) \in F(x_0)$ и $f_2(x_0) \in F(x_0)$, тогда
$$x_0 = g(t_0, x_0) = (1-t_0)f_1(x_0) + t_0 f_2(x_0) \in F(x_0),$$
т.е. точка x_0 является неподвижной точкой отображения F. Теорема доказана. □

3. О неравенствах в пространствах с конусом

3.1. K-неподвижные точки непрерывных отображений

Пусть E — банахово пространство, $X \subset E$, $f : X \to E$ — вполне непрерывное отображение, K — фиксированное замкнутое выпуклое подмножество в E.

Определение 2. *Точка $x_* \in X$ называется K-неподвижной точкой отображения f если $x_* \in f(x_*) + K$.*

Таким образом, если точка x_* является K-неподвижной точкой отображения f, то она является неподвижной точкой h-вполне непрерывного многозначного отображения $F(x) = f(x) + K$ (см. пример 2). Обозначим $\mathrm{Fix}(f, K)$ множество K-неподвижных точек отображения f.

Первым утверждением о существовании K-неподвижной точки (без введения этого термина) была лемма Иохвидова (см. [9]). Другие теоремы о существовании K-неподвижных точек могут быть получены из некоторых результатов предыдущего раздела. Нам будет необходимо следующее утверждение.

Пусть $U \subset E$ — ограниченное открытое множество, $f : \overline{U} \to E$ — вполне непрерывное отображение, $K \subset E$ — неограниченное выпуклое замкнутое множество. Тогда из теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Если существует такая точка $u_0 \in K$, что векторное поле $\varphi : \overline{U} \to E$, $\varphi(x) = x - f(x) - u_0$ является невырожденным на ∂U и $\deg(\varphi, \overline{U}) \neq 0$, то отображение f имеет K-неподвижные точки на ∂U.*

Доказательство. Так как множество U ограничено и отображение f вполне непрерывно, то существует такое положительное число R, что $||x|| + ||f(x)|| < R$ для любого $x \in \overline{U}$.

Так как множество K неограничено, то существует точка $u_1 \in K$ такая, что $||u_1|| > R$. Тогда

$$||x - f(x) - u_1|| \geqslant ||u_1|| - ||x|| - ||f(x)|| > 0$$

для любой точки $x \in \overline{U}$, т.е. отображение $f(x) + u_1$ не имеет неподвижных точек на множестве $\overline{U}$. Следовательно $\deg(\varphi_1, \overline{U}) = 0$, где $\varphi_1(x) = x - f(x) - u_1$. Таким образом существуют два сечения $f_1(x) = f(x) + u_0$ и $f_2(x) = f(x) + u_1$ многозначного отображения $F(x) = f(x) + K$ такие, что поля $\varphi_0(x) = x - f_0(x)$ и $\varphi_1(x) = x - f_1(x)$ имеют различные топологические степени. Следовательно, в силу теоремы 4 отображение f имеет K-неподвижные точки на ∂U. Теорема доказана. □

3.2. О разрешимости неравенств в банаховом пространстве

Пусть E — банахово пространство, $K \subset E$ — выпуклый замкнутый конус, X — подмножество в E, $f : X \to E$ — вполне непрерывное отображение. Полуупорядоченность в E вводится следующим образом: $x \leqslant y$ если $y - x \in K$. Рассмотрим неравенство:

$$f(x) \leqslant x. \tag{1}$$

Очевидно, что $f(x_*) \leqslant x_*$ тогда и только тогда, когда точка x_* является K-неподвижной точкой отображения f.

Пусть конус $K \subset E$ является миниэдральным, тогда для любого $x \in E$ единственным образом определяются элементы $x_+ = \sup\{x, 0\}$, $x_- = \sup\{-x, 0\}$ и модуль $|x| = x_+ + x_-$. Очевидны следующие неравенства $x \leqslant x_+ \leqslant |x|$.

Предположим, что в пространстве E задан миниэдральный конус K такой, что выполнено следующее условие:
(I) для любых элементов $x, y \in E$ из неравенства $|x| \leqslant |y|$ вытекает неравенство $||x|| \leqslant ||y||$.

Лемма 3. *Если в пространстве E задан минеэдральный конус K такой, что выполнено условие (I), то отображение $P : E \to K$, $P(x) = x_+$ является непрерывным.*

Доказательство вытекает из теоремы VII.1.2 из [10].

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 3. В пространстве R^n рассмотрим конус положительных векторов K. Нетрудно видеть, что этот конус является миниэдральным и выполнено условие (I). Тогда отображение $P(x) = (a(x_1), a(x_2), ..., a(x_n))$, где функция

$$a(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \ t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \ t < 0. \end{cases}$$

Пример 4. В пространстве $C_{[a,b]}$ рассмотрим конус положительных функций

$$K = \{x \in C_{[a,b]} \mid x(t) \geqslant 0 \text{ для любого } \ t \in [a,b]\}.$$

Этот конус также является миниэдральным и выполнено условие (I). Тогда отображение

$$P(x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } \ x(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \ x(t) < 0, \end{cases}$$

Аналогично определяются отображения P в пространствах $L^p_{[a,b]}$, $p \geqslant 1$.

Пусть $U \subset E$ — выпуклое ограниченное открытое множество, содержащее нуль пространства E, ∂U — граница множества U, $S = \partial U \bigcap K$. Обозначим $K^* = \{\psi \in E^* \mid \psi(x) \geqslant 0 \text{ для любого } x \in K\}$.

Теорема 5. *Пусть E — банахово пространство, $K \subset E$ — миниэдральный конус, удовлетворяющей свойству (I). Пусть $f : S \to E$ — вполне непрерывное отображение, удовлетворяющее условию: для любой точки $x \in S$ существует функционал $\psi \in K^*$ такой, что $\psi(x)\psi(x - P(f(x)) > 0$. Тогда существует точка $x_0 \in S$, являющаяся решением неравенства (1).*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\tilde{f} : S \to K$, $\tilde{f}(x) = P(f(x))$. Нетрудно видеть, что это отображение вполне непрерывно.

Докажем, что для любой точки $x \in S$ точка $\tilde{f}(x) \not\geqslant x$. Действительно, пусть существует точка $x \in S$ такая, что $\tilde{f}(x) \geqslant x$, т.е. $x - \tilde{f}(x) \in (-K)$. Тогда $\psi(x - \tilde{f}(x)) \leqslant 0$ для любого функционала $\psi \in K^*$. Так как $x \in S \subset K$, то $\psi(x) \geqslant 0$. Следовательно, $\psi(x)\psi(x - P(f(x)) \leqslant 0$, что противоречит условию.

Продолжим по теореме Титце-Урысона отображение $\tilde{f}$ на $\overline{U}$. Пусть $f_1 : \overline{U} \to K$ это продолжение. Рассмотрим векторное поле $\varphi = i - f_1$, построенное по отображению f_1. Покажем, что $\deg(\varphi, \overline{U}) = 1$. Для этого рассмотрим гомотопию $\omega(\lambda, x) = x - \lambda f_1(x)$ и покажем, что $\omega(\lambda, x) \neq 0$ на ∂U. Предположим противное, тогда существуют точка $x_* \in \partial U$ и $\lambda_* \in [0,1]$ такие, что $x_* = \lambda_* f_1(x_*)$, тогда $x_* \in (\partial U \bigcap K) = S$ и $x_* \leqslant f_1(x_*) = \tilde{f}(x_*)$, а этого не может быть по доказанному. Следовательно, поле φ гомотопно полю $\varphi_0 = i$, где i — отображение вложения множества $\overline{U}$ в E. Так как область U содержит нуль, то $\deg(\varphi_0, \overline{U}) = 1$. Тогда

$$\deg(\varphi, \overline{U}) = \deg(\varphi_0, \overline{U}) = 1.$$

Так как множество $K \ni 0$, то в силу следствия 2 отображение f_1 имеет K-неподвижную точку на ∂U, т.е. неравенство $f_1(x) \leqslant x$ имеет решение на множестве ∂U. Так как для любой точки x, не лежащей в S, это неравенство выполняться не может (в силу того, что $f_1(x) \in K$), то существует точка $x_0 \in S$ такая, что $f_1(x_0) = \tilde{f}(x_0) \leqslant x_0$. Замечая, что $f(x_0) \leqslant \tilde{f}(x_0)$, получаем утверждение теоремы. □

Рассмотрим некоторые следствия из этой теоремы.

Пусть $K \subset R^n$ — конус положительных векторов, $S_R(0)$ — сфера радиуса R с центром в нуле пространства R^n, $S = S_R(0) \bigcap K$.

Теорема 6. *Пусть $f = (f_1, f_2, ..., f_n) : S \to R^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему условию: для любой точки $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$ существует номер i_0 такой, что $x_{i_0} > 0$ и $x_{i_0} \geqslant f_{i_0}(x)$. Тогда неравенство (1) имеет решение на множестве S.*

Доказательство. Рассмотрим сначала следующий случай: пусть для любой точки $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$ существует номер i_0 такой, что $x_{i_0}(x_{i_0} - f_{i_0}(x)) > 0$. Так как это произведение больше нуля, то $x_{i_0} > 0$. Так как

$$P(f(x) = (a(f_1(x)), a(f_2(x)), ..., a(f_n(x))),$$

где функция

$$a(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

то $x_{i_0} - (P \circ f)_{i_0}(x) > 0$. Таким образом, $x_{i_0}(x_{i_0} - (P \circ f)_{i_0}(x)) > 0$.

Проверим, что отображение f удовлетворяет условиям теоремы 5. Пусть точка $x \in S$, тогда в качестве функционала ψ рассмотрим $\psi(x) = x_{i_0}$. Так как

$$\psi(x)\psi(x - P(f(x)) = x_{i_0}(x_{i_0} - (P \circ f)_{i_0}(x)) > 0,$$

то мы находимся в условиях доказанной теоремы, следовательно, неравенство (1) имеет решение на множестве S. Это и доказывает утверждение в этом случае.

Пусть теперь для любой точки $x \in S$ существует номер i_0 такой, что $x_{i_0} > 0$ и $x_{i_0} \geqslant f_{i_0}(x)$. Рассмотрим вспомогательное отображение $f^n(x) = f(x) - \frac{1}{n}x$. Тогда

$$x_{i_0}(x_{i_0} - f^n_{i_0}(x)) = x_{i_0}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x_{i_0} - f_{i_0}(x)\right) > 0.$$

Следовательно, в силу доказанного, существует точка $x^n \in S$ такая, что $x^n \in S$ и $x^n \geqslant f^n(x^n)$, т.е. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^n \geqslant f(x^n)$.

Построим такую точку x^n для любого натурального n, тогда получим последовательность $\{x^n\} \in S$. В силу компактности множества S без ограничения общности можно считать, что $\{x^n\} \to x_*$. Так как точки $\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^n - f(x^n) \in K$, а множество K замкнуто, то $x_* - f(x_*) \in K$, т.е. точка x_* является решением неравенства (1). Теорема доказана. □

Эта теорема обобщает аналогичную теорему, полученную в [6, (гл.5, теор. 2.1)].

Рассмотрим ещё одно следствие из доказанной теоремы. Пусть K — конус положительных функций в пространстве $C_{[a,b]}$, $S_R(0)$ — сфера радиуса R в пространстве $C_{[a,b]}$, множество $S = S_R(0) \bigcap K$, $f : S \to C_{[a,b]}$ — вполне непрерывное отображение.

Теорема 7. *Если для любой функции $x \in S$ существует точка $t_0 \in [a, b]$ такая, что*

$$x(t_0)(x(t_0) - f(x)(t_0)) > 0,$$

то существует функция $x_* \in S$, для которой неравенство $f(x_*)(t) \leqslant x_*(t)$ справедливо для любого $t \in [a, b]$.

Доказательство. Для любой функции $x \in S$ рассмотрим точку t_0 такую, что выполнено неравенство $x(t_0)(x(t_0) - f(x)(t_0)) > 0$. Заметим, что в этом случае справедливо неравенство $x(t_0)(x(t_0) - P(f(x))(t_0)) > 0$. Пусть функционал $\psi \in K^*$ определён условием, $\psi(x) = x(t_0)$. Очевидно, что этот функционал удовлетворяет условиям теоремы 7, что и доказывает утверждение. □

Эта теорема является обобщением аналогичной теоремы, полученной в [6, стр. 170].

Рассмотрим ещё одно следствие из теоремы 7. Пусть K — конус положительных функций в пространстве $L^p_{[a,b]}$, $p \geqslant 1$. Пусть $S_R(0)$ — сфера радиуса R в пространстве $L^p_{[a,b]}$, $S = S_R(0) \bigcap K$, $f : S \to L^p_{[a,b]}$ — вполне непрерывное отображение.

Теорема 8. *Если для любой функции $x \in S$ существует измеримое множество $A \subset [a, b]$ такое, что*

$$\int\limits_A x(t)\mathrm{d}t \int\limits_A (x(t) - P(f(x))(t))\mathrm{d}t > 0,$$

то существует функция $x_* \in S$, для которой неравенство $f(x_*)(t) \leqslant x_*(t)$ справедливо для почти всех $t \in [a, b]$.

Доказательство. Для любой функции $x \in S$ рассмотрим функционал $\psi \in K^*$, определённый условием $\psi(x) = \int\limits_A x(t)\mathrm{d}t$. Очевидно, что в силу сделанных предположений условия теоремы 5 выполнены, что и доказывает утверждение. $\square$

Литература

1. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: Комкнига, 2005.
2. *Гельман А. Б.* Об одном классе многозначных отображений с некомпактными образами // Вестник ВГУ, серия «Физика, математика». — 2008. — Вып. 1. — С. 162–169.
3. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физ.-мат. лит, 1962.
4. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988.
5. *Опойцев В. И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. — М.: Наука, 1977.
6. *Опойцев В. И.* Нелинейная системостатика. — М.: Наука, 1986.
7. *Гельман Б. Д.* Непрерывные аппроксимации многозначных отображений и неподвижные точки // Математические заметки. — 2005. — Т. 78, вып. 2. — С. 212–222.
8. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.
9. *Иохвидов И. С.* О лемме Ки-Фаня, обобщающей принцип неподвижной точки А.Н.Тихонова // ДАН СССР. — 1964. — Т. 159. — С. 501–504.
10. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. — М.: Физматлит, 1961.

UDC 517.965

Fixed Points of h-completely Continuous Multivalued Mappings and Inequalities in Spaces with the Cone

A. B. Gel'man

Department of Algebra and Topological Methods of Analysis
Voronezh State University
Universitetskaya pl., 1, Voronezh, Russia, 394006

In the first part of the paper a new class of multivalued mappings is introduced and studied. This mappings have convex but non-compact images. For the mappings of this particular class we are proving fixed points theorems, which are used in the second part of the paper to study solvability of inequalities in spaces with the cone.

Key words and phrases: Hausdorf metric, multivalued mappings, fixed points, cone in Banach space.