Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 1. 2009. С. 85–95

УДК 530.12: 531.51

Статические цилиндрически-симметричные конфигурации идеальной жидкости

К. А. Бронников [1], Е. Н. Чудаева [2], Валид Абдель-Саттар [2], Г. Н. Шикин [2]

[1] *Институт гравитации и космологии*
[2] *Кафедра теоретической физики*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Исследованы свойства статических цилиндрически-симметричных конфигураций идеальной жидкости в ОТО с уравнением состояния $p = w\varepsilon$ при произвольном значении $w = \mathrm{const}$. Наряду с обычной материей рассмотрены типы идеальной жидкости, которые в настоящее время активно изучаются в космологии (тёмная материя, космические струны, доменные стенки, квинтэссенция, космический вакуум, фантомная материя). Получены точные решения уравнений Эйнштейна и идеальной жидкости при произвольном значении w. Для произвольного w доказано отсутствие плоской пространственной асимптотики, а также асимптотики типа космической струны. Показано, что все подобные распределения при некотором условии на константы интегрирования имеют регулярную ось и пространственную бесконечность, на которой плотность энергии стремится к нулю (за исключением конфигураций с $w = -1/3$ — газа космических струн); при этом система обладает конечной энергией на единицу длины вдоль оси симметрии. В частности, в случае жёсткой материи ($w = 1$) эта величина равна планковскому значению энергии на единицу длины.

Ключевые слова: идеальная жидкость, уравнения Эйнштейна, уравнение состояния.

1. Введение

Статические конфигурации идеальной жидкости с цилиндрической и плоской симметриями достаточно активно обсуждаются в литературе. Рассмотрение таких симметрий позволяет изучить поля изолированных тел, по форме значительно отличающихся от сферической (диски и стержни), избегая значительных математических трудностей. В наиболее общем виде решения уравнений Эйнштейна с источником в виде идеальной жидкости (как с произвольным уравнением состояния $p = p(\varepsilon)$, так и для случая $p = w\varepsilon, w = \mathrm{const}$) получены в [1, 2]; там же см. ссылки на полученные ранее более специальные решения.

Позднее появился ряд работ, в которых обсуждаются глобальные свойства статических цилиндрически-симметричных конфигураций идеальной жидкости [3–5]. Заметим, что такое обсуждение начато в работе [2], где, кроме цилиндрических, рассматриваются плоские и псевдоплоские конфигурации.

В последние годы, в связи с новыми открытиями в астрономии, привлекают интерес распределения материи с необычными уравнениями состояния, в частности, с отрицательными давлениями. В данной работе мы анализируем некоторые глобальные свойства цилиндрических конфигураций идеальной жидкости с уравнением состояния $p = w\varepsilon$ при произвольных значениях w, включая $w < 0$ (отрицательные давления, соответствующие тёмной энергии в виде квинтэссенции) и даже $w < -1$ (что соответствует так называемой «фантомной материи»).

2. Основные уравнения и их решение

Статическая цилиндрически-симметричная метрика записывается в виде

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2\gamma}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{2\alpha}\mathrm{d}x^2 - \mathrm{e}^{2\beta}\mathrm{d}\varphi^2 - \mathrm{e}^{2\mu}\mathrm{d}z^2, \qquad (1)$$

Статья поступила в редакцию 27 октября 2008 г.

где x — радиальная координата, z — продольная координата, $\varphi \in [0, 2\pi)$ — полярный угол.

Выберем координатное условие [2], соответствующее гармонической координате x,

$$\alpha(x) = \gamma(x) + \beta(x) + \mu(x). \tag{2}$$

Уравнения Эйнштейна $R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = -\varkappa T_\mu^\nu$ для метрики (1) имеют следующий вид:

$$\beta'' + \mu'' - \mu'\beta' - \mu'\gamma' - \beta'\gamma' = -\varkappa T_0^0 \mathrm{e}^{2\alpha}, \tag{3}$$

$$\mu'\beta' + \mu'\gamma' + \beta'\gamma' = -\varkappa T_1^1 \mathrm{e}^{2\alpha}, \tag{4}$$

$$\mu'' + \gamma'' - \mu'\beta' - \mu'\gamma' - \beta'\gamma' = -\varkappa T_2^2 \mathrm{e}^{2\alpha}, \tag{5}$$

$$\gamma'' + \beta'' - \mu'\beta' - \mu'\gamma' - \beta'\gamma' = -\varkappa T_3^3 \mathrm{e}^{2\alpha}, \tag{6}$$

где $\varkappa = 8\pi G$ — эйнштейновская постоянная тяготения; штрих означает $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

В качестве материального источника гравитации предполагаем идеальную жидкость с уравнением состояния $p = w\varepsilon$, $w = \mathrm{const}$, для которой тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_\beta^\alpha = (p + \varepsilon)u_\beta u^\alpha - \delta_\beta^\alpha p, \quad u_\alpha u^\alpha = u_0 u^0 = 1, \quad u^i = 0, \tag{7}$$

где ε — плотность энергии жидкости, p — давление, u^μ — 4-скорость.

Из уравнения движения

$$\nabla_\alpha T_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\alpha}(\sqrt{-g} T_\beta^\alpha) - \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}g_{\gamma\delta}}{\mathrm{d}x^\beta} T^{\gamma\delta} = 0 \tag{8}$$

при $\beta = 1$ получаем уравнение, связывающее давление идеальной жидкости с её плотностью энергии:

$$p' + \gamma'(p + \varepsilon) = 0. \tag{9}$$

С учётом уравнения состояния $p = w\varepsilon$ уравнение (9) имеет решение

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{\frac{-(w+1)}{w}\gamma(x)}, \quad p = w\varepsilon_0 \mathrm{e}^{\frac{-(w+1)}{w}\gamma(x)}, \quad \varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{10}$$

Здесь, очевидно, $w \neq 0$. При $w = 0$ тензор (7) соответствовал бы пылевидному веществу, которое, как известно, не может находиться в статическом равновесии в гравитационном поле.

В силу (10) известны все компоненты тензора энергии-импульса:

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p. \tag{11}$$

Рассмотрим решения уравнений Эйнштейна. Разность уравнений (5) и (6) приводит к уравнению

$$\mu'' - \beta'' = 0, \tag{12}$$

имеющему решение

$$\mu(x) = \beta(x) + c_1 x + \bar{c}_1, \quad c_1,\ \bar{c}_1 = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Константу интегрирования $\bar{c}_1$ полагаем равной нулю за счёт выбора масштаба по оси z.

Сумма уравнений (3) и (4) приводит к уравнению

$$\beta'' + \mu'' = -\varkappa\varepsilon(1 - w)\mathrm{e}^{2\alpha}, \tag{14}$$

а сумма уравнений (4) и (5) даёт

$$\gamma'' + \mu'' = 2\varkappa\varepsilon w \mathrm{e}^{2\alpha}. \tag{15}$$

С учётом (12) нетрудно исключить $\beta'' = \mu''$ из уравнений (14) и (15), что даёт в результате

$$2\gamma'' = (3w-1)\varkappa\varepsilon e^{2\alpha}. \tag{16}$$

Кроме того, с учётом (12) отношение (14) и (15) даёт:

$$\frac{2\beta''}{\beta''+\gamma''} = \frac{(1-w)}{2w} \quad \Rightarrow \quad \beta'' = \frac{w-1}{3w+1}\gamma'' \tag{17}$$

при условии $w \neq -1/3$. Из (17) находим связь между $\beta(x)$ и $\gamma(x)$:

$$\beta(x) = \frac{(w-1)}{(3w+1)}\gamma(x) + c_2 x + \bar{c}_2, \quad c_2,\ \bar{c}_2 = \mathrm{const}, \tag{18}$$

где полагаем $\bar{c}_2 = 0$ за счёт выбора начала отсчёта координаты x.

С учётом (13) выразим $\mu(x)$ через $\gamma(x)$:

$$\mu(x) = \beta(x) + c_1 x = \frac{w-1}{3w+1}\gamma(x) + (c_1+c_2)x. \tag{19}$$

Таким образом, все метрические функции выражены через $\gamma(x)$.

Рассмотрим уравнение (4):

$$\mu'\beta' + \mu'\gamma' + \beta'\gamma' = \varkappa w\varepsilon_0 \ \exp\left[-\frac{w+1}{w}\gamma(x) + 2\alpha(x)\right] \tag{20}$$

и выразим левую и правую части уравнения (20) через $\gamma(x)$. С учётом (2) имеем

$$2\alpha(x) - \frac{w+1}{w}\gamma(x) = 2\gamma(x) + 2\beta(x) + 2\mu(x) - \frac{w+1}{w}\gamma(x) = \\ = \frac{7w^2-6w-1}{w(3w+1)}\gamma(x) + 2(2c_2+c_1)x, \tag{21}$$

$$\mu'\beta' + \mu'\gamma' + \beta'\gamma' = \frac{7w^2-6w-1}{(3w+1)^2}\gamma'^2 + \frac{4w(2c_2+c_1)}{3w+1}\gamma' + c_2(c_1+c_2). \tag{22}$$

Введём обозначения

$$7w^2-6w-1 = A, \quad 3w+1 = B, \quad 2c_2+c_1 = a, \quad c_2+c_1 = b \tag{23}$$

и новую функцию

$$\Gamma(x) = 2\alpha(x) - \frac{w+1}{w}\gamma(x) = \frac{A}{wB}\gamma(x) + 2ax. \tag{24}$$

Из (24) имеем при $A \neq 0$:

$$\gamma(x) = \frac{wB}{A}\Gamma(x) - \frac{2awB}{A}x. \tag{25}$$

Подставляем в (20) равенства (22) и (24) и получаем уравнение

$$\gamma'^2 + \frac{4waB}{A}\gamma' + \frac{B^2c_2b}{A} - \frac{\varkappa w\varepsilon_0 B^2}{A}e^{\Gamma(x)} = 0. \tag{26}$$

Из (26) с учётом (25) получаем уравнение

$$\Gamma'(x) = \pm\frac{\sqrt{A}}{w}\left[\varkappa w\varepsilon_0 e^{\Gamma(x)} + 4w^2a^2/A - c_2 b\right]^{1/2} \tag{27}$$

и его решение

$$\int \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\sqrt{\varkappa\varepsilon_0 w \mathrm{e}^{\Gamma(x)} + \frac{4w^2a^2}{A} - c_2 b}} = \pm\frac{\sqrt{A}}{w}x. \tag{28}$$

Из (28) определяем $\Gamma(x)$, из (25) $\gamma(x)$, из (18) и (19) $\beta(x)$ и $\mu(x)$, из (2) $\alpha(x)$:

$$\alpha(x) = \frac{(5w-1)}{(3w+1)}\gamma(x) + (2c_2 + c_1)x. \tag{29}$$

Таким образом, при условиях $w \neq -1/3$, $A \neq 0$ решение полностью получено. Частные случаи $w = -1/3$ и $A = 0$ будут рассмотрены в следующем разделе.

3. Анализ решений при различных значениях w

Выпишем условия регулярности метрики на оси симметрии системы $x = x_{\mathrm{ax}}$, на которой, по определению, $r \equiv \mathrm{e}^{\beta} \to 0$ [3]:

$$\gamma(x) = \gamma_{\mathrm{ax}} + O(r^2), \quad \mu(x) = \mu_{\mathrm{ax}} + O(r^2), \quad \mathrm{e}^{2\beta-2\alpha}\beta'^2 = 1 + O(r^2), \tag{30}$$

откуда, в частности, следует

$$\mathrm{e}^{-\alpha(x_{\mathrm{ax}})}\gamma'(x_a) = 0, \quad |T_\mu^\nu(x_{\mathrm{ax}})| < \infty. \tag{31}$$

С другой стороны, пространственная бесконечность $x \to x_\infty$ определяется из условия

$$r(x) \equiv \mathrm{e}^{\beta(x)}\Big|_{x=x_\infty} = \infty. \tag{32}$$

Расстояние L от оси симметрии до пространственной бесконечности есть

$$L = \int\limits_{x_a}^{x_\infty} \mathrm{e}^{\alpha(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{33}$$

Выясним, способны ли распределения идеальной жидкости с уравнением состояния $p = w\varepsilon$ вести себя как изолированные системы в пространстве, как, например, нити, трубки или космические струны. Для этого выпишем условия регулярной (плоской или струнной) пространственной асимптотики для метрики (1): при $x \to x_\infty$

$$|\gamma| < \infty, \quad |\mu| < \infty, \quad \mathrm{e}^{2\beta-2\alpha}\beta'^2\Big|_{x\to x_\infty} \to 1 - \xi, \tag{34}$$

где $\xi = \mathrm{const}$. При $\xi = 0$ имеем плоскую асимптотику, при $0 < \xi < 1$ имеется дефицит угла φ (т. е. на асимптотике поверхности ведут себя как конусы, а не как плоскости — это струнная асимптотика), а при $\xi < 0$ имеет место избыток угла φ — это асимптотика, которую имела бы космическая струна с отрицательной линейной плотностью.

Проверим возможность существования решений с плоской или струнной пространственной асимптотикой. Из (18) при условии $w \neq -1/3$ следует, что γ может иметь конечный предел при $\beta \to \infty$ лишь если $c_2 \neq 0$, $c_2 x \to \infty$. Полагаем без потери общности $c_2 > 0$, тогда $x_\infty = \infty$. При этом из (19) имеем $c_1 = -c_2 < 0$. Из (24) получаем, что при $x \to \infty$

$$\alpha(x) \approx ax = c_2 x, \quad \Gamma(x) \approx 2c_2 x, \quad \alpha(x) \approx \beta(x) \to \infty.$$

$\Gamma(x)$ определяется из уравнения (27). Но $\Gamma(x) = 2c_2 x$ не удовлетворяет уравнению (27) ни при каких x. Отсюда следует, что не существует распределений идеальной жидкости с уравнением состояния $p = w\varepsilon$, $w = \mathrm{const}$, имеющих плоскую (или струнную при любом ξ) пространственную асимптотику.

Теперь переходим к анализу решений при частных значениях w.

3.1. Предельно жёсткая материя, $w = 1$ [4]

В этом случае $A = 7w^2 - 6w - 1 = 0$, поэтому равенство (28) использовать нельзя. Для получения решения воспользуемся равенствами (18)–(22). Из (18) и (19) получаем:

$$\beta(x) = c_2 x, \quad \mu(x) = (c_1 + c_2)x. \tag{35}$$

Из (21) следует

$$\alpha(x) - \gamma(x) = (2c_2 + c_1)x. \tag{36}$$

Из (20) получаем уравнение для $\gamma(x)$

$$(2c_2 + c_1)\,\gamma'(x) + c_2(c_2 + c_1) = \varkappa\varepsilon_0 \,\exp\big[2(2c_2 + c_1)x\big], \tag{37}$$

откуда

$$\gamma(x) = \frac{\varkappa\varepsilon_0}{2a^2}\mathrm{e}^{2ax} - \frac{c_2 b}{a}x. \tag{38}$$

Из (29) находим $\alpha(x)$:

$$\alpha(x) = \gamma(x) + ax = \frac{\varkappa\varepsilon_0}{2a^2}\mathrm{e}^{2ax} + \frac{a^2 - c_2 b}{a}x. \tag{39}$$

Найдём координаты оси симметрии. Поскольку $\mathrm{e}^{\beta(x)} = \mathrm{e}^{c_2 x}$, при $c_2 > 0$ оси соответствует $x_{\mathrm{ax}} = -\infty$. Чтобы на оси симметрии $\gamma(x)$ и $\mu(x)$ были конечными, надо выбрать

$$b = c_2 + c_1 = 0. \tag{40}$$

При этом

$$\mu(x) \equiv 0, \quad \gamma(x) = \frac{\varkappa\varepsilon_0}{2c_2^2}\mathrm{e}^{2c_2 x}, \quad \alpha(x) = \frac{\varkappa\varepsilon_0}{2c_2^2}\mathrm{e}^{2c_2 x} + c_2 x. \tag{41}$$

Из третьего условия (30) следует, что $c_2 = 1$, остальные два условия удовлетворяются автоматически. Из (38) следует, что пространственной бесконечности соответствует $x_\infty = \infty$.

Рассмотрим распределение плотности энергии предельно жёсткой жидкости:

$$T_0^0(x) = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{-2\gamma(x)} = \varepsilon_0 \exp\left(\frac{-\varkappa\varepsilon_0}{c_2^2}\mathrm{e}^{2c_2 x}\right). \tag{42}$$

Из (42) следует, что при $x \to -\infty$ имеем $T_0^0 = \varepsilon_0$, а при $x \to \infty$ плотность быстро убывает, $T_0^0 \to 0$; это означает, что энергия локализована в окрестности оси симметрии. Определим энергию, приходящуюся на отрезок единичной длины по оси z:

$$E = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_0^0 \sqrt{-{}^3g}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi c_2}{\varkappa}\,. \tag{43}$$

При $c_2 = 1$ (что необходимо для регулярности на оси) имеем

$$E = \frac{1}{4}\frac{c^4}{G} \approx 3 \cdot 10^{48}\ \text{эрг/см}. \tag{44}$$

Эта величина совпадает с планковским значением линейной плотности энергии (или силы).

3.2. Ультрарелятивистская материя, $w = 1/3$

Это частный случай общего решения, полученного в разделе 2. В этом случае из (18), (19) и (29) получаем

$$\beta(x) = -\frac{1}{3}\gamma(x) + c_2 x, \tag{45}$$

$$\mu(x) = -\frac{1}{3}\gamma(x) + (c_2 + c_1)x, \tag{46}$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{3}\gamma(x) + (2c_2 + c_1)x, \tag{47}$$

где $\mathrm{e}^{\gamma(x)}$ находится с помощью (25):

$$\mathrm{e}^{\gamma(x)} = \left[\frac{\varkappa\varepsilon_0}{3h^2}\cosh^2(\sqrt{5}hx)\right]^{3/10} \cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{5}ax}, \quad h := \sqrt{\frac{a^2}{5} + c_2 b}\,. \tag{48}$$

Из (45) находим $\mathrm{e}^{\beta(x)}$:

$$\mathrm{e}^{\beta(x)} = \left[\frac{3h^2}{\varkappa\varepsilon_0\cosh^2(\sqrt{5}hx)}\right]^{1/10} \cdot \exp\left(-\frac{1}{5}ax + c_2 x\right). \tag{49}$$

Из (18) и (19) нетрудно показать, что регулярной оси симметрии может соответствовать только $x \to -\infty$ (если без потери общности полагать $c_2 > 0$), и тогда с необходимостью $b = c_2 + c_1 = 0$. В этом случае $a = c_2$, $h = c_2/\sqrt{5}$, и $\mathrm{e}^{\beta(x)}$ имеет вид

$$r(x) = \mathrm{e}^{\beta(x)} = \left(\frac{3c_2^2}{5\varkappa\varepsilon_0}\right)^{1/10} \cdot \frac{\exp\left(\frac{4}{5}c_2 x\right)}{(\cosh c_2 x)^{1/5}}. \tag{50}$$

Из (50) следует, что оси симметрии соответствует $x_{\rm ax} = -\infty$, а пространственной бесконечности — $x_\infty = \infty$. Далее, при $x = x_{\rm ax} = -\infty$ (на оси)

$$\mathrm{e}^{\gamma(x_{\rm ax})} = \left(\frac{5\varkappa\varepsilon_0}{12c_2^2}\right)^{3/10}, \quad \bigl|\gamma(x_{\rm ax})\bigr| < \infty. \tag{51}$$

Кроме того, из (46) следует, что на оси $\mu(x)$ также конечно. Третье условие регулярности

$$\mathrm{e}^{2\beta-2\alpha}\bigl(\beta'\bigr)^2\Big|_{x=x_{\rm ax}} = \mathrm{e}^{-4\gamma(x)/3}\bigl(\beta'\bigr)^2\Big|_{x=x_{\rm ax}} = \left(\frac{12c_2^2}{5\varkappa\varepsilon_0}\right)^{2/5} c_2^2 = 1 \tag{52}$$

выполняется при соответствующем выборе c_2. Условия (31) при этом выполняются автоматически.

Плотность энергии

$$T_0^0(x) = \varepsilon_0\mathrm{e}^{-4\gamma(x)} = \varepsilon_0\left(\frac{12c_2^2}{5\varkappa\varepsilon_0}\right)^{6/5} \cdot \left(\mathrm{e}^{2c_2 x} + 1\right)^{-12/5}, \tag{53}$$

конечна на оси и стремится к нулю на бесконечности, причём интеграл, выражающий энергию на единицу длины по оси z, конечен:

$$E = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_0^0(x)\mathrm{e}^{2\alpha-\gamma}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{7}\frac{\pi\varepsilon_0}{c_2}\left(\frac{12c_2^2}{5\varkappa\varepsilon_0}\right)^{13/10}, \tag{54}$$

Из (51)–(54) следует, что полученное решение описывает регулярную конфигурацию ультрарелятивистской материи с локализованной плотностью энергии.

3.3. Пылевидная или тёмная материя: $w = 0$, $p = 0$

Как уже упоминалось, статическое равновесие пыли в гравитационном поле (т. е. при наличии гравитационных сил, $g_{00} = \mathrm{e}^{2\gamma} \neq \mathrm{const}$) невозможно. Покажем, что в нашем случае оно невозможно даже при $\gamma = \mathrm{const}$.

В самом деле, в этом случае из (15) следует $\beta'' = 0$, а из (12) — $\mu'' = 0$, и сумма уравнений Эйнштейна (3) и (4) приводит к

$$\beta'' + \mu'' = -\varkappa\varepsilon(x)\mathrm{e}^{2\alpha(x)} = 0, \tag{55}$$

то есть $\varepsilon(x) \equiv 0$.

3.4. Газ космических струн $w = -1/3$

В этом случае решение из раздела 2 несправедливо, и задача решается отдельно. Из (11) имеем

$$T_0^0 = \varepsilon = \varepsilon_0\mathrm{e}^{2\gamma(x)}, \quad T_{\underline{i}}^{\underline{i}} = -p = \frac{1}{3}\varepsilon_0\mathrm{e}^{2\gamma(x)} \tag{56}$$

(по подчёркнутому индексу нет суммирования). Из (23) получаем $A = 16/9$, $B = 0$.

Равенства (12)–(16) справедливы и при $w = -1/3$, так что

$$\mu = \beta + c_1 x, \tag{57}$$

$$\gamma'' = 0 \ \Rightarrow \ \gamma(x) = c_2 x \tag{58}$$

при подходящем выборе масштабов по осям z и t.

В уравнение (20), имеющее в рассматриваемом случае вид

$$\mu'\beta' + \mu'\gamma' + \beta'\gamma' = -\frac{\varkappa\varepsilon_0}{3}\mathrm{e}^{2\alpha(x)+2\gamma(x)},$$

подставляем $\mu'(x)$ и $\gamma'(x)$ и получаем уравнение для $\beta(x)$:

$$(\beta')^2 + (2c_2 + c_1)\beta' + c_2c_1 = -\frac{\varkappa\varepsilon_0}{3}\mathrm{e}^{4\beta+2(2c_2+c_1)x}. \tag{59}$$

Введём обозначение

$$\tilde{\beta}(x) = 2\beta(x) + (2c_2c_1)x, \quad \beta(x) = \frac{1}{2}\big[\tilde{\beta}(x) - (2c_2 + c_1)x\big]. \tag{60}$$

Тогда из (59) получаем уравнение для $\tilde{\beta}(x)$

$$\tilde{\beta}'(x) = \pm\sqrt{(4c_2^2 + c_1^2) - \frac{4\varkappa\varepsilon_0}{3}\,\mathrm{e}^{2\tilde{\beta}(x)}}, \tag{61}$$

решение которого имеет вид

$$\mathrm{e}^{\tilde{\beta}(x)} = \sqrt{\frac{3h^2}{4\varkappa\varepsilon_0}}\cdot\frac{1}{\cosh(hx)}\,, \quad h^2 = 4c_2^2 + c_1^2, \tag{62}$$

и из (60) получаем $\mathrm{e}^{2\beta(x)}$:

$$\mathrm{e}^{2\beta(x)} = \sqrt{\frac{3h^2}{4\varkappa\varepsilon_0}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-(2c_2+c_1)x}}{\cosh(hx)}\,. \tag{63}$$

Рассмотрим частные случаи.

1) В случае $c_2 > 0$ и $c_1 > 0$ из (63) имеем ось симметрии ($r = \mathrm{e}^{\beta} \to 0$) при $x \to \infty$, пространственную бесконечность ($r \to \infty$) при $x \to -\infty$ и $2c_2 + c_1 > h$.
   Для плотности энергии из (56) получаем:
$$T_0^0(x) = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{2c_2 x}, \quad T_0^0(x)\Big|_{x\to\infty} \to \infty, \quad T_0^0(x)\Big|_{x\to-\infty} \to 0, \tag{64}$$
   т. е. плотность энергии на оси симметрии бесконечна. Это в силу уравнений Эйнштейна неизбежно означает и сингулярность кривизны.
2) При $c_2 < 0$ и $c_1 < 0$ из (63) следует, что при $x \to -\infty$ имеется ось симметрии, а при $x \to +\infty$ — бесконечность. В этом случае плотность энергии возрастает от нуля до бесконечности.
3) При $2c_2 + c_1 = 0$ имеем $r \to 0$ при $x \to \pm\infty$, т. е. система имеет две оси симметрии.

Таким образом, для газа космических струн нет решений с локализованной энергией.

3.5. Хаотическое распределение доменных стенок, $w = -2/3$

В этом и последующих подразделах рассматриваются частные случаи общего решения из раздела 2. При $w = -2/3$ из (10) имеем:
$$T_0^0 = \varepsilon = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{\gamma(x)/2}, \quad p = -\frac{2}{3}\varepsilon. \tag{65}$$
При этом $A = \frac{55}{9}$, $B = -1$. Из (18) и (19) выражаем $\beta(x)$ и $\mu(x)$ через $\gamma(x)$:
$$\beta(x) = \frac{5}{3}\gamma(x) + c_2 x, \quad \mu(x) = \frac{5}{3}\gamma(x) + (c_1 + c_2)x, \tag{66}$$
где $\gamma(x)$ находится с помощью (25):
$$\mathrm{e}^{\gamma(x)} = \left(\frac{3H^2}{2\varkappa\varepsilon_0}\frac{1}{\cosh^2(\omega x)}\right)^{6/55} \cdot \mathrm{e}^{-12ax/55}, \tag{67}$$
где
$$H^2 = \frac{16}{55}a^2 - c_2 b = \frac{9c_2(c_2 + c_1) + 16c_1^2}{55}, \quad \omega = \frac{\sqrt{55}}{4}H.$$

Рассмотрим частный случай, когда $c_2 > 0$, $c_1 + c_2 = 0$, когда возможна регулярная ось. Тогда из (67) и (66) имеем:
$$\mathrm{e}^{\gamma(x)} = \left(\frac{96c_2^2}{55\varkappa\varepsilon_0}\right)^{6/55} \cdot \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{2c_2 x} + 1\right)^{12/55}}, \tag{68}$$
$$\mathrm{e}^{\beta(x)} = \left(\frac{96c_2^2}{55\varkappa\varepsilon_0}\right)^{2/11} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c_2 x}}{\left(\mathrm{e}^{2c_2 x} + 1\right)^{4/11}}. \tag{69}$$
Из (69) следует, что $x = -\infty$ — ось симметрии, а $x = \infty$ — пространственная бесконечность, причём, согласно (68) и (19), на оси симметрии величины γ и μ конечны.

Из (7) имеем следующее выражение для плотности энергии:
$$\varepsilon = T_0^0 = \varepsilon_0 \left(\frac{96c_2^2}{55\varkappa\varepsilon_0}\right)^{3/55} \cdot \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{2c_2 x} + 1\right)^{6/55}}, \tag{70}$$

откуда следует, что величина ε конечна на оси симметрии и исчезает на бесконечности.

Из (29) определяем $\alpha(x)$: $\mathrm{e}^{\alpha(x)} = \exp(\frac{13}{3}\gamma(x) + c_2 x)$ и, следовательно,

$$\mathrm{e}^{2\beta-2\alpha}(\beta')^2\Big|_{x=x_{\rm ax}} = \left(\frac{55\varkappa\varepsilon_0}{96c_2^2}\right)^{6/55} c_2^2. \tag{71}$$

Эта величина равна единице, т. е. выполняется третье условие регулярности на оси (30), при подходящем выборе c_2.

Таким образом, при указанном выборе констант интегрирования система имеет регулярную ось, причём, как нетрудно убедиться, энергия, приходящаяся на единицу длины оси z,

$$E = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_0^0 \sqrt{-^3g}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_0^0(x)\mathrm{e}^{2\alpha-\gamma}\,\mathrm{d}x \tag{72}$$

конечна. Итак, в рассмотренном случае идеальная жидкость с $w = -2/3$ обладает локализованной плотностью энергии.

3.6. Космологическая постоянная, $w = -1$

В этом случае из (10) следует, что плотность постоянна, $T_0^0 = \varepsilon = -p = \varepsilon_0$. Из (18) и (19) имеем:

$$\beta(x) = \gamma(x) + c_2 x, \quad \mu(x) = \gamma(x) + (c_1 + c_2)x, \tag{73}$$

при этом $A = 12$, $B = -2$, а $\gamma(x)$ находится с помощью (25):

$$\mathrm{e}^{\gamma(x)} = \left(\frac{k^2}{\varkappa\varepsilon_0 \cosh^2\sqrt{3}kx}\right)^{1/6} \cdot \mathrm{e}^{-ax/3}, \quad k^2 = \frac{a^2}{3} - c_2 b = \frac{c_2^2 + c_2c_1 + c_1^2}{3}. \tag{74}$$

Снова рассмотрим частный случай $c_2 > 0$, $c_1 + c_2 = 0$ ($b = 0$, $a = c_2$, $k^2 = c_2^2/3$). Тогда из (74) и (73) имеем

$$\mathrm{e}^{\gamma(x)} = \left(\frac{4c_2^2}{3\varkappa\varepsilon_0}\right)^{1/6} \cdot \frac{1}{(\mathrm{e}^{2c_2x} + 1)^{1/3}}, \tag{75}$$

$$\mathrm{e}^{\beta(x)} = \left(\frac{4c_2^2}{3\varkappa\varepsilon_0}\right)^{1/6} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c_2x}}{(\mathrm{e}^{2c_2x} + 1)^{1/3}}\,. \tag{76}$$

Из (76) следует, что $x \to -\infty$ есть ось симметрии, а $x \to \infty$ — пространственная бесконечность.

Из (29) находим $\mathrm{e}^{\alpha(x)}$:

$$\mathrm{e}^{\alpha(x)} = \mathrm{e}^{3\gamma(x)+c_2x} = \left(\frac{4c_2^2}{3\varkappa\varepsilon_0}\right)^{1/2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c_2x}}{(\mathrm{e}^{2c_2x} + 1)}. \tag{77}$$

Легко убедиться, что на оси симметрии γ и μ конечны; далее,

$$\mathrm{e}^{2\beta-2\alpha}(\beta')^2\Big|_{x=x_{\rm ax}} = \left(\frac{4c_2^2}{3\varkappa\varepsilon_0}\right)^{-2/3} \cdot c_2^2. \tag{78}$$

Это выражение равно единице, и третье условие регулярности (30) выполняется при соответствующем выборе c_2, так что система имеет регулярную ось. Условия регулярности (31) выполняются автоматически.

Определим энергию, приходящуюся на единицу длины по оси z:

$$E = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_0^0 \sqrt{-{}^3g}\,\mathrm{d}x = 2\pi\varepsilon_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\alpha-\gamma}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\varepsilon_0}{2c_2}\left(\frac{4c_2^2}{2\varkappa\varepsilon_0}\right)^{5/6}. \tag{79}$$

Полученная цилиндрически-симметричная вакуумная конфигурация с положительной космологической постоянной регулярна на оси симметрии метрикой и обладает конечной энергией на единицу длины оси.

3.7. Пример фантомной материи: $w = -4/3$

В этом случае $A = 175/9$, $B = -3$, и из (11) имеем:

$$T_0^0 = \varepsilon = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{-\gamma(x)/4}, \quad p = -\frac{4}{3}\varepsilon. \tag{80}$$

Из (18) и (19) находим:

$$\beta(x) = \frac{7}{9}\gamma(x) + c_2 x, \quad \mu(x) = \frac{7}{9}\gamma(x) + (c_1 + c_2)x, \tag{81}$$

где

$$\mathrm{e}^{\gamma(x)} = \left(\frac{3r^2}{4\varkappa\varepsilon_0}\frac{1}{\cosh^2\eta x}\right)^{36/175} \cdot \mathrm{e}^{-72ax/175}, \quad r^2 = \frac{64}{175}a^2 - c_2 b, \quad \eta = \frac{\sqrt{175}}{8}r. \tag{82}$$

Как и ранее, рассмотрим частный случай $c_2 > 0$, $c_1 + c_2 = 0$ ($b = 0$). Тогда из (82) имеем:

$$\mathrm{e}^{\gamma(x)} = \left(\frac{192c_2^2}{175\varkappa\varepsilon_0}\right)^{36/175} \cdot \frac{1}{(\mathrm{e}^{2c_2x}+1)^{72/175}}, \tag{83}$$

$$\mathrm{e}^{\beta(x)} = \left(\frac{192c_2^2}{175\varkappa\varepsilon_0}\right)^{4/25} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c_2x}}{(\mathrm{e}^{2c_2x}+1)^{8/25}}. \tag{84}$$

При $x \to -\infty$ имеем ось симметрии, при $x \to \infty$ — пространственную бесконечность. Легко убедиться, что γ и μ конечны на оси.

Из (29) находим $\alpha(x)$ и вычисляем выражение

$$\mathrm{e}^{2\beta-2\alpha}\beta'^2\Big|_{x=x_{\mathrm{ax}}} = \mathrm{e}^{-32\gamma(x)/9}\beta'^2\Big|_{x=x_{\mathrm{ax}}} = \left(\frac{192c_2^2}{175\varkappa\varepsilon_0}\right)^{-128/175} \cdot c_2^2, \tag{85}$$

которое равно единице, т. е. выполняется третье условие регулярности (30), при соответствующем выборе c_2. Таким образом, система имеет регулярную ось.

Определим энергию, приходящуюся на единицу длины по оси z:

$$E = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_0^0 \sqrt{-{}^3g}\,\mathrm{d}x = 2\pi\varepsilon_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\alpha-5\gamma/4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\varepsilon_0}{c_2}\frac{175}{103}\left(\frac{192c_2^2}{175\varkappa\varepsilon_0}\right)^{139/175}. \tag{86}$$

Полученная цилиндрически-симметричная конфигурация идеальной жидкости с уравнением состояния фантомной материи регулярна на оси симметрии и обладает конечной энергией на единицу длины оси.

Литература

1. *Bronnikov K. A.* Static Fluid Cylinders and Plane Layers in General Relativity // J. Phys. A: Math. Gen. — 1979. — Vol. 12, No 2. — Pp. 201–207.
2. *Bronnikov K. A., Kovalchuk M. A.* Properties of Static Fluid Cylinders and Plane Layers in General Relativity // Gen. Rel. Grav. — 1979. — Vol. 11. — Pp. 343–355.
3. *Philbin T. G.* Perfect-Fluid Cylinders and Walls — Sources for the Levi-Civita Space-Time // Class. Quantum Grav. — 1996. — Vol. 13. — Pp. 1217–1232.
4. Static Fluid Cylinders and Their Fields: Global Solutions / J. Bicak, T. Ledvinka, B. G. Schmidt, M. Zofka // Class. Quantum Grav. — 2004. — Vol. 21. — Pp. 1583–1608.
5. Static Cylindrical Symmetry and Conformal Flatness / L. Herrera, G. Le Denmat, G. Marcilhacy, N. O. Santos // Int. J. Mod. Phys. D. — 2005. — Vol. 14. — Pp. 657–666.

UDC 530.12: 531.51

Static, Cylindrically Symmetric Perfect Fluid Configurations

K. A. Bronnikov [1], E. N. Chudaeva [2], Walid Abdel-Sattar [2], G. N. Shikin [2]

[1] *Institute of Gravitation and Cosmology*

[2] *Department of Theoretical Physics*

Peoples' Friendship University of Russia

6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

We study the properties of static, cylindrically symmetric configurations of a perfect fluid in general relativity, with the equation of state $p = w\varepsilon$ with arbitrary values $w = \text{const}$. We thus include into consideration the types of fluids which are now actively studied in cosmology (dark matter, cosmic strings, domain walls, quintessence, cosmic vacuum, phantom matter). Exact solutions to the Einstein equations with such fluids have been obtained for arbitrary values of w. For any w, we prove the absence of a flat spatial asymptotic as well as an asymptotic like that of a cosmic string. We show that all such distributions, under some conditions on the integration constants, have a regular axis and a spatial infinity at which the energy density tends to zero (except for configurations with $w = -1/3$, which corresponds to a gas of cosmic strings). Thus such a system has a finite energy per unit length along the symmetry axis. In particular, for stiff matter ($w = 1$), this quantity is equal to the Planck value of energy per unit length.