УДК 517.97

Принцип максимума в задаче максимизации дохода для модели газового месторождения

А. К. Скиба

Вычислительный центр имени А. А. Дородницына Российской академии наук
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия

Рассматривается модель функционирования газового месторождения. Ставится и решается на бесконечном интервале задача оптимального управления. В описание критерия включена стоимость реализации газа, заданная вогнутой функцией.

Ключевые слова: принцип максимума; модель газового месторождения; бесконечный интервал; фазовые диаграммы.

1. Введение

Рассмотрим модель функционирования газового месторождения с взаимовлияющими скважинами [1–4]. Введём следующие обозначения: N — фонд добывающих скважин, $\bar{N}$ — ограничение сверху на фонд добывающих скважин, q — средний дебит добывающих скважин, δ — коэффициент дисконтирования, V — извлекаемый запас, c — стоимость природного газа.

Введём понятие закупочной функции $U(Q)$, которая устанавливает зависимость между стоимостью газа и его объёмом. Закупочная функция обладает следующими свойствами. Это вогнутая строго возрастающая функция, определённая на положительной полуоси. В дальнейшем мы будем пользоваться функциями из известного класса вогнутых функций

$$U(Q) = cQ^{\eta}, \quad 0 < \eta < 1. \tag{1}$$

Здесь и далее $c > 0$ и $Q > 0$.

Между описанными выше переменными устанавливается взаимосвязь, которую запишем в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{V} = -Nq, \quad \dot{q} = -\frac{q_0}{V_0}Nq \tag{2}$$

при начальных условиях $V_0 > 0$, $q_o > 0$. На фонд добывающих скважин накладывается следующее ограничение $0 \leqslant N \leqslant \bar{N}$. Здесь $\bar{N} > 0$. Добычу газа и доход вычисляем по формулам:

$$Q = qN, \ \int\limits_0^{\infty} U(Q)e^{-\delta t}dt.$$

Проведём следующую замену переменных:

$$N' = \frac{q_0}{V_0}N, \quad \bar{N}' = \frac{q_0}{V_0}\bar{N}, \quad V' = \frac{q_0}{V_0}V = q'. \tag{3}$$

В новых переменных $q' = V'$. При написании указанных переменных штрихи при них в дальнейшем опускаем.

Для иллюстрации возможностей модели рассмотрим две стратегии разработки газового месторождения. При этом не учитывая ограничения на фонд добывающих скважин.

Статья поступила в редакцию 23 сентября 2008 г.

Стратегия 1. Пусть газовое месторождение разбуривается с постоянным темпом $\dot{N} = \bar{n}$ на периоде $[0, t_1]$. Далее разбуривание месторождения прекращается, и добыча газа осуществляется при постоянном фонде $\bar{N}$. В этом случае величина добычи газа изменяется по следующему закону:

$$Q(t) = \begin{cases} (N_0 + \bar{n}t)q_0 \exp(-N_0 t - \bar{n}t^2), \text{ при } t \leqslant t_1, \\ (N_0 + \bar{n}t_1)q_0 \exp(-N_0 t_1 - \bar{n}t_1^2 - (N_0 + \bar{n}t_1)(t - t_1)), \text{ при } t > t_1. \end{cases} \quad (4)$$

Анализ функции (4) показывает, что на начальном этапе разбуривания месторождения добыча газа на месторождении возрастает. Это связано тем, что прирост добычи за счёт ввода новых скважин превышает темп падения добычи, связанный с извлечением запасов газа. Если на этом этапе происходит прекращение добычи газа, то в момент t_1 добыча $Q(t)$ достигает максимума, и на графике функции $Q(t)$ наблюдается характерный излом. Далее добыча падает. Если продолжать разбуривание месторождения с постоянным темпом достаточно долго, то прирост добычи газа за счёт ввода новых скважин будет уменьшаться, и со временем он совпадёт с темпом падения добычи. В этот момент величина добычи $Q(t)$ достигает максимума. Далее добыча газа падает.

Такие характерные особенности поведения добычи газа наблюдались на практике при разбуривании газовых месторождений.

Стратегия 2. Необходимо в динамике определить объем действующего фонда скважин, обеспечивающий извлечение всего запаса газа при постоянном заранее заданном уровне его добычи $\bar{Q}$. Интерес в постоянном уровне добычи газа проявляется как со стороны промысловиков, так и со стороны потребителей газа. Промысловикам постоянный уровень добычи необходим для закупки и настройки промыслового и транспортного оборудования под обеспечение данного уровня добычи газа. Потребителям газа постоянный уровень добычи необходим при решении вопроса о стабилизации объёмов закупаемого газа. Приведённые выше доводы делают интересными исследование данной стратегии разработки месторождения. Перейдём к формальному описанию и исследованию упомянутой стратегии. Объем действующего фонда скважин изменяется по следующему закону:

$$N(t) = \frac{\bar{Q}}{q_0 - \bar{Q}t}. \quad (5)$$

Таким образом, функция (5) определена на полуинтервале $[0, t^*)$, где $t^* = q_0/\bar{Q}$. В конечный момент $t = t^*$ происходит полное извлечение запасов газа ($q_0 = V_0$). В то же время $\lim\limits_{t \to t^*} N(t) = \infty$. Значит, сетка скважин уплотняется до бесконечности. Такую стратегию невозможно полностью реализовать на практике. Однако она реализована частично. Этапу постоянной добычи газа предшествует этап нарастающей добычи (для небольших газовых месторождений он может отсутствовать) и следует этап падающей добычи. Проблема увеличения периода постоянной добычи особо актуальна в настоящее время, когда многие газовые месторождения завершают период постоянной добычи.

Далее ставим задачу поиска максимума функционала на бесконечном интервале. В качестве функционала берётся подверженный дисконтированию накопленный доход.

Задача 1. Требуется максимизировать функционал

$$c \int\limits_0^\infty q^\eta N^\eta e^{-\delta t} \mathrm{d}t \quad (6)$$

при дифференциальной связи

$$\dot{q} = -Q = -qN, \quad (7)$$

начальном условии

$$q_0 > 0 \quad (8)$$

и ограничении на управление

$$0 \leqslant N \leqslant \bar{N}. \tag{9}$$

Управление N принадлежит множеству измеримых функций. Правый конец свободен.

Прежде чем приступить к поиску решения задачи 1, необходимо ответить на вопрос о его существовании. Для этого воспользуемся теоремой 3.6 статьи [5]. В связи с труднодоступностью данной статьи приведём в следующем параграфе общую постановку задачи оптимального управления на бесконечном интервале, основные определения и формулировку теоремы существования.

2. Общая постановка задачи оптимального управления на бесконечном интервале и теорема существования

Рассмотрим общую постановку задачи оптимального управления

$$\inf_{(x,u)\in\Omega} I(x,u).$$

Здесь Ω обозначает множество допустимых пар (x,u), $x \in AC^m_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ и $u:[0,\infty)\to\mathbb{R}^r$ является $\mathcal{L}$-измеримой функцией такой, что почти для каждого t

$$x(t)\in A(t), \quad u(t)\in U(t,x(t)), \quad \dot{x}=f(t,x(t),u(t)).$$

Здесь A обозначает множество многозначных функций из $[0,\infty)$ в $\mathbb{R}^m$ с $\mathcal{L}\times\mathcal{B}^m$-измеримым графиком $\mathcal{A}$; U обозначает множество многозначных функций из $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^m$. График $\mathcal{M}\equiv\{(t,x,u): t\in[0,\infty), x\in A(t), u\in U(t,x)\}$ является $\mathcal{L}\times\mathcal{B}^{m+r}$-измеримым. Также $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ является $\mathcal{L}\times\mathcal{B}^{m+r}$ измеримой функцией. Наконец, I задаётся

$$I(x,u)=\int\limits_0^\infty f_0(t,x(t),u(t))\mathrm{d}t, \quad (x,u)\in\Omega,$$

где $f_0:\mathcal{M}\to(-\infty,\infty)$ является $\mathcal{L}\times\mathcal{B}^{m+r}$-измеримой функцией. Определим для $(t,x)\in A$ многозначную функцию

$$Q(t,x)\equiv\{(z^0,z):\ z^0\geqslant f_0(t,x,u),\ z=f(t,x,u),\ u\in U(t,x)\}.$$

Определение. Говорят, что многозначная функция Q из A в $\mathbb{R}^{m+1}$ обладает свойством (K) в $(t,x)\in\mathcal{A}$, если

$$Q(t,x)=\bigcap_{\delta>0} cl\left\{\cup Q(t,x'):\ x'\in A(t),\ |x'-x|\leqslant\delta\right\}.$$

В литературе это свойство также называют свойством (U). Заметим, что свойство (K) в $(t,x)\in\mathcal{A}$ означает замкнутость множества $Q(t,x)$.

Наконец, определим множество $\Omega_\alpha\equiv\{(x,u)\in\Omega:\ I(x,u)\leqslant\alpha\}$ для какого-нибудь $\alpha\in\mathbb{R}$.

Перейдём к формулировке теоремы существования.

Теорема. *Пусть для каждого $t\geqslant 0$ $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывна на $M(t)$, $f_0(t,\cdot,\cdot)$ полунепрерывна снизу на $M(t)$, $A(t)$ замкнуто, $M(t)$ замкнуто. Предположим также, что существует $\alpha\in\mathbb{R}$ такое, что $\{x(0)\ :\ (x,u)\in\Omega_\alpha\}$ ограничено, $\{f(\cdot,x(\cdot),u(\cdot))|[0,T]\ :\ (x,u\in\Omega_\alpha)\}$ равномерно интегрируемо для каждого $T\geqslant 0$, Q обладает свойством (K) в каждой $(t,x)\in\mathcal{A}$, $Q(t,x)$ выпукло в каждой $(t,x)\in\mathcal{A}$, $\{f_0^-(\cdot,x(\cdot),u(\cdot))\ :\ (x,u)\in\Omega_\alpha\}$ является сильно равномерно интегрируемой, Ω_α непусто.*

Тогда существует допустимая пара $(\tilde{x},\tilde{u})\in\Omega$ такая, что

$$I(x,u)=\underset{(x,u)\in\Omega}{inf}\ I(x,u).$$

3. Исследование задачи

Приведённая в предыдущем параграфе теорема является теоремой существования решения для задачи оптимального управления на бесконечном интервале.

Рассмотрим множество

$$\Omega(t,q) = \left\{(z^0, z) : z^0 \geqslant -(qN)^\eta e^{-\delta t},\, z = -qN,\, N \in [0, \bar{N}]\right\}.$$

Множество $\Omega(t,q) = \left\{(z^0, z) : z^0 \geqslant -(-z)^\eta e^{-\delta t}\right\}$ является выпуклым множеством для каждого (t,q). Для исследуемой задачи также справедливо выполнение всех остальных условий теоремы. Таким образом, существует такое управление $\tilde{N}(t) \in [0, \bar{N}]$, которое при дифференциальной связи (7) и начальном условии (8) доставляет максимум функционала (6).

Для поиска решения задачи будем использовать принцип максимума Понтрягина [6,7] со свободным правым концом. Управление $\tilde{N}$, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности, ищем на множестве измеримых функций. Выпишем гамильтониан, сопряжённое уравнение и условие трансверсальности в формах, используемых в работе К. Эрроу [8]:

$$H = c(qN)^\eta - \psi qN, \tag{10}$$

$$\dot{\psi} = \psi\delta - c\eta q^{\eta-1} N^\eta + \psi N, \tag{11}$$

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) q(t) e^{-\delta t} = 0. \tag{12}$$

Здесь параметр $\eta \in (0,1)$.

Следует отметить, что гамильтониан, сопряжённая переменная и условие трансверсальности в классическом представлении отличаются в их написании от гамильтониана, сопряжённой переменной и условия трансверсальности, используемых в настоящей работе и в работах [8,9], на величину $e^{-\delta t}$. Использование в таком виде переменных облегчает решение задач.

Остановимся подробнее на условиях трансверсальности, связанных с ними проблемах и способами их решения. Для решения задач оптимального управления на бесконечном интервале со свободным правым концом без достаточно строгой обоснованности был принят общий вид условий трансверсальности в усиленной форме [8]. До сих пор неизвестны в общем случае достаточно строгие доказательства условий трансверсальности на бесконечном интервале. Однако в работе С.М. Асеева и др. [10] для одной задачи оптимального управления на бесконечном интервале они были получены. Кроме того, нам также неизвестны примеры, противоречащие условиям трансверсальности в усиленной форме.

Вместе с тем в последнее время к задачам оптимального управления на бесконечном интервале проявляется все больший интерес. Это связано не только с тем, что уменьшается количество вводимых параметров при постановке задачи, но также с тем, что в динамических моделях при долгосрочном планировании не всегда можно строго точно указать время окончания планирования. Кроме того, при решении задач на бесконечном интервале легче определить и проанализировать магистральные свойства модели. Для решения этой и других аналогичных задач можно предложить несколько способов выхода из создавшейся ситуации:

- несмотря на отсутствие в общем случае достаточно строгих доказательств условий трансверсальности на бесконечном интервале времени, применить его формально с целью поиска решения задачи оптимального управления. Как правило, научные работники, сталкиваясь со сходной проблемой, до сих пор использовали именно данный подход;
- полностью отказаться от применения условия трансверсальности на бесконечном интервале времени, и поиск оптимального решения осуществить на множестве всех траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Далее сравнить значения функционалов с целью поиска наибольшего значения. Иногда удобно предварительно произвести исследования поведения траекторий на фазовой диаграмме;

– отказаться от поиска решения задачи оптимального управления на бесконечном интервале со свободным правым концом и заменить её другой постановкой задачи, максимально приближенной к исходной, но уже со строго доказанными условиями трансверсальности. Это возможно сделать, заменив бесконечный интервал конечным и изменив целевую функцию.

Мы воспользовались первым способом. Перейдём к обсуждению основных сложностей, связанных с поиском оптимального решения. Принцип максимума даёт нам необходимые условия оптимальности. Чтобы убедиться, что данная траектория действительно является оптимальной, следует применить достаточные условия оптимальности. Если для рассматриваемой задачи достаточные условия не доказаны, то имеется иной подход, а именно: необходимо доказать существование оптимального решения и единственность траектории, удовлетворяющей всем необходимым условиям оптимальности. Как правило, в большинстве практических задач оптимальное решение существует. Единственность иногда вытекает из самой аналитической процедуры поиска траектории, удовлетворяющей всем необходимым условиям оптимальности. Часто бывает, что мы угадываем такую траекторию, но это не даёт гарантий отсутствия других траекторий, также удовлетворяющих всем этим условиям. Поэтому необходимо рассмотреть остальные понтрягинские траектории и убедиться, что среди них отсутствуют траектории, удовлетворяющие условиям трансверсальности. С помощью математических выкладок сделать это достаточно сложно. Однако процедура значительно облегчается, если её осуществить на фазовой диаграмме. Если получены несколько траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, то остаётся только вариант сравнения значений функционалов на этих траекториях.

Продолжим поиск оптимального решения для задачи 1. Для этого формально применим принцип максимума к задаче 1 без учёта ограничения (9).

Продифференцируем гамильтониан (10) по N и полученную производную приравняем к нулю:

$$H'_N = c\eta q^\eta N^{\eta-1} - \psi q = 0.$$

Отсюда получаем

$$\psi = c\eta (qN)^{\eta-1}. \tag{13}$$

С учётом соотношения (13) разрешим сопряжённое уравнение (11). В Результате получаем

$$\dot{\psi} = \psi\delta \tag{14}$$

и

$$\psi = \psi_0 e^{\delta t}. \tag{15}$$

Из условия трансверсальности (12) с учётом (15) вытекает

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = 0. \tag{16}$$

Используя дифференциальные уравнения (14) и (7), с учётом (13) приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}q} = -\frac{\psi\delta}{qN} = -\delta (c\eta)^{-\frac{1}{1-\eta}} \psi^{\frac{1}{1-\eta}+1}. \tag{17}$$

С учётом (15) и (16) проинтегрируем дифференциальное уравнение (17) от t до ∞:

$$\psi^{-\frac{1}{1-\eta}} = (c\eta)^{-\frac{1}{1-\eta}} \frac{\delta}{1-\eta} q. \tag{18}$$

Из (18) с учётом (13) получаем

$$\tilde{N}(t) = \frac{\delta}{1-\eta}. \tag{19}$$

Продолжим решение задачи 1 с учётом ограничения (9). Пусть выполнено неравенство

$$\frac{\delta}{1-\eta} < \bar{N}. \tag{20}$$

Покажем, что максимум гамильтониана (10) на траектории с управлением (19) при всех значениях t достигается внутри отрезка $[0, \bar{N}]$. Для этого, воспользовавшись (18), (19) и дифференциальным уравнением (7), после несложных преобразований получаем

$$H(\tilde{q}(t), \psi(t), \tilde{N}(t)) = \max_{N\in[0,\bar{N}]} [H(\tilde{q}(t), \psi(t), N(t))] = \max_{N\in[0,\bar{N}]} [c\tilde{q}^{\eta}N^{\eta} - \psi\tilde{q}\cdot N] =$$
$$= \max_{N\in[0,\bar{N}]} \left[cq_0^{\eta}e^{-\frac{\delta\eta}{1-\eta}t}N^{\eta} - c\eta\left(\frac{\delta}{1-\eta}\right)^{\eta-1} q_0^{\eta}e^{-\frac{\delta\eta}{1-\eta}t}\right] =$$
$$= cq_0^{\eta}e^{-\frac{\delta\eta}{1-\eta}t} \max_{N\in[0,\bar{N}]} \left[N^{\eta} - \eta\left(\frac{\delta}{1-\eta}\right)^{\eta-1} N\right].$$

Отсюда и из (20) вытекает, что при всех $t \in (0, \infty)$ максимум гамильтониана достигается внутри отрезка $[0, \bar{N}]$. Легко показать, что условие трансверсальности (12) выполнено. Для того, чтобы траектория с управлением (19) была оптимальной, необходимо убедиться в отсутствии других траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Рассмотрим траекторию с начальной точкой $\left(c\eta q_0^{\eta}\bar{N}^{\eta-1}, q_0\right)$ и с управлением $\tilde{N} = \bar{N}$. Воспользовавшись (11) и (7), получаем

$$\psi q = c\eta q^{\eta}\bar{N}^{\eta-1}\left[\left(\delta + \eta\bar{N} - \bar{N}\right)e^{(\delta+\eta\bar{N})t} + \bar{N}\right] / (\delta + \eta\bar{N}).$$

Отсюда с учётом (20) вытекает следующее неравенство:

$$\psi q \leqslant c\eta q^{\eta}\bar{N}^{\eta-1}.$$

Значит максимум гамильтониана (10) достигается при $\tilde{N} = \bar{N}$. Таким образом, если при некотором τ управление $\tilde{N}(\tau) = \bar{N}$, то $\tilde{N}(t) = \bar{N}$ при $t \geqslant \tau$. Легко проверить, что условие трансверсальности (12) в этом случае не выполняется.

Переходим ко второй части доказательства. Пусть

$$\bar{N} \leqslant \frac{\delta}{1-\eta}. \tag{21}$$

Покажем, что управление $\tilde{N} = \bar{N}$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности на интервале $(0, \infty)$. Умножим дифференциальное уравнение (11) на $q\exp(-\delta t)$ и после несложных преобразований приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi q e^{-\delta t}\right) = -c\eta(qN)^{\eta}e^{-\delta t}. \tag{22}$$

Принимая во внимание условие трансверсальности (12), дифференциальное уравнение (7) и полагая $N = \bar{N}$, проинтегрируем обе части дифференциального уравнения (22) от t до ∞:

$$\psi q = c\eta\int_t^{\infty}(q(\theta)\cdot\bar{N})^{\eta}e^{-\delta(\theta-t)}\mathrm{d}\theta = \frac{c\eta(q\bar{N})^{\eta}}{\delta+\eta\bar{N}}. \tag{23}$$

Отсюда

$$\psi(t) = \frac{c\eta\bar{N}^{\eta}q_0^{\eta-1}}{\delta+\eta\bar{N}}e^{(1-\eta)\bar{N}t}. \tag{24}$$

Подставим функцию (18) в гамильтониан (10):

$$H\left(\tilde q(t), \tilde\psi(t), N\right) = c\tilde q^{\eta}\left(N^{\eta} - \frac{\eta\bar N^{\eta}}{\delta+\eta\bar N}N\right) = cq_0^{\eta}\left(N^{\eta} - \frac{\eta\bar N^{\eta}}{\delta+\eta\bar N}\cdot N\right)\cdot e^{-\eta\bar N t}.$$

Вычислим первую производную гамильтониана в точке $N=\bar N$

$$H'_N(\tilde q(t), \tilde\psi(t), N) = cq_0^{\eta}e^{-\eta\bar N t}\frac{\eta\bar N^{\eta-1}}{\delta+\eta\bar N}\left(\delta-(1-\eta)\bar N\right).$$

Отсюда и из предположения (21) вытекает положительность производной на правом конце отрезка $[0,\bar N]$. Кроме того, гамильтониан является вогнутой возрастающей функцией от N. Значит, при управлении $N=\bar N$ достигается максимум гамильтониана.

Доказательство единственности решения задачи 1 при выполнении неравенства

$$\frac{\delta}{1-\eta} > \bar N \tag{25}$$

проведём на плоскости $(\psi q, q)$.

На рис. 1 изображена кривая G, которая описывается уравнением

$$\psi q = c\eta q^{\eta}\bar N^{\eta-1}. \tag{26}$$

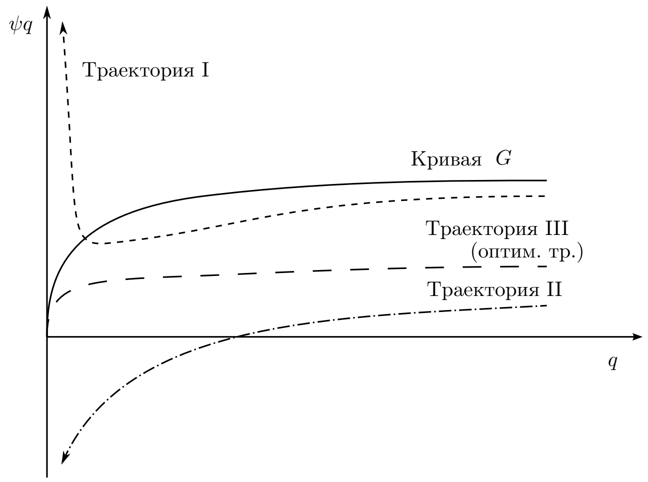

Рис. 1. **Фазовая диаграмма**

Данная кривая делит фазовую плоскость на две части. Траектории «подозрительные» на оптимальность описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{\mathrm{d}(\psi q)}{\mathrm{d}q} = -\frac{\delta(\psi q)}{q\tilde N} + c\eta q^{\eta-1}\tilde N^{\eta-1}. \tag{27}$$

Из максимума гамильтониана (10) вытекает, что если траектория, описываемая дифференциальным уравнением (27) лежит выше кривой G, то управление $\tilde N < \bar N$, в противном случае $\tilde N = \bar N$.

Пусть траектория, описываемая дифференциальным (27), лежит ниже кривой G, тогда, разрешив дифференциальное уравнение (27), получим

$$\psi q = Bq^{-\frac{\delta}{\bar N}} + c\bar N^{\eta-1}q^{\eta}\frac{\eta\bar N}{\eta\bar N+\delta}, \tag{28}$$

где

$$B = \left[\psi_0 q_0 - c\bar{N}^{\eta-1} q_0^{\eta} \frac{\eta\bar{N}}{\eta\bar{N}+\delta}\right] q_0^{\frac{\delta}{\bar{N}}}. \quad (29)$$

Пусть выполнено неравенство (25), тогда траектория, описываемая функцией (23), лежит ниже кривой G (см. рис. 1). Возьмём на кривой G при $q > 0$ произвольную точку $(\psi q_0, q_0)$ и определим поведения траекторий в точке $(\psi q_0, q_0)$ кривой G. Для этого определим угол наклона траекторий, лежащих выше и ниже кривой G, а также угол наклона самой кривой G. В результате получаем

$$\frac{\mathrm{d}(\psi q)}{\mathrm{d}q} = -\frac{\delta(\psi q)^{1+\frac{1}{1-\eta}}}{(c\eta q)^{\frac{1}{1-\eta}}} + \frac{\psi q}{q} = c\eta q_0^{\eta-1}\bar{N}^{\eta-1}(-\frac{\delta}{\bar{N}}+1), \quad (30)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\psi q)}{\mathrm{d}q} = -\delta c\eta q_0^{\eta-1}\bar{N}^{\eta-2} + c\eta q_0^{\eta-1}\bar{N}^{\eta-1} = c\eta q_0^{\eta-1}\bar{N}^{\eta-1}\left(-\frac{\delta}{\bar{N}}+1\right). \quad (31)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\psi q)}{\mathrm{d}q} = c\eta^2 q_0^{\eta-1}\bar{N}^{\eta-1}. \quad (32)$$

С учётом неравенства (25) вытекает, что угол наклона траекторий, лежащих как выше, так и ниже кривой G, меньше чем угол наклона самой кривой G. Значит, в кривую G входят траектории, лежащие ниже кривой G, и из неё исходят траектории, лежащие выше кривой G. Получен достаточно важный факт — траектория, оказавшаяся в области выше кривой G, никогда в дальнейшем её не покидает. Таким образом, если в некоторый момент τ управление $\tilde{N}(\tau) < \bar{N}$, то $\tilde{N}(t) < \bar{N}$ при всех $t > \tau$. Из этого факта вытекает, что если траектория, удовлетворяющая всем необходимым условиям оптимальности, существует в области выше кривой G, то $\tilde{N}(t) = \frac{\delta}{1-\eta}$. Данное управление является недопустимым, так как нарушается ограничение (25). Таким образом, траектории (траектории I), достигающие кривую G, не удовлетворяют необходимым условиям оптимальности.

Рассмотрим траекторию, начало которой лежит ниже кривой G. В описании траекторий, лежащих ниже кривой G, постоянное интегрирования B в (28) принимает как отрицательные, так и положительные значения. Рассмотрим случай $B = 0$, тогда (28) перепишется в виде

$$\psi q = c\bar{N}^{\eta-1} q^{\eta} \frac{\eta\bar{N}}{\eta\bar{N}+\delta}. \quad (33)$$

Данная траектория (траектория III) не достигает кривой G и удовлетворяет условию трансверсальности. Легко убедиться, что при отрицательных значениях постоянной интегрирования B траектория (28) также не достигает кривой G и условию трансверсальности не удовлетворяет. На рис. 1 эта траектория изображена как траектория II. При положительных значениях постоянной интегрирования B траектория (28) достигает кривой G при некотором положительном q. Как было показано выше, она не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

Из вышесказанного вытекает существование единственной сопряжённой переменной (в форме, предложенной К. Эрроу)

$$\psi(t) = c\bar{N}^{\eta-1} q_0^{\eta-1} \frac{\eta\bar{N}}{\eta\bar{N}+\delta} e^{(1-\eta)\bar{N}} \quad (34)$$

и единственного управления $\tilde{N} = \bar{N}$, удовлетворяющих всем необходимым условиям оптимальности. Из последнего предложения и из существования оптимальной траектории для задачи 1 вытекает то, что траектория III является оптимальной.

Для задачи 1 справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если выполнено неравенство* $\frac{\delta}{1-\eta} < \bar{N}$, *то оптимальным решением задачи 1 при* $\eta \in (0,1)$ *на всем интервале* $(0,\infty)$ *является управление, заданное формулой* $\tilde{N}(t) = \frac{\delta}{1-\eta}$. *В противном случае оптимальным решением является управление* $\tilde{N} = \bar{N}$.

Литература

1. *Федосеев А. В., Хачатуров В. Р.* Постановка и исследование задач оптимального управления для анализа перспективных планов в нефтегазодобывающей промышленности // Имитационное моделирование и матем. методы анализа перспективных планов развития нефтедобывающей промыщденности. — М.: ВЦ АН СССР, 1984. — С. 66–112.
2. *Маргулов Р. Д., Хачатуров В. Р., Федосеев А. В.* Системный анализ в перспективном планировании добычи газа. — М.: Недра, 1991.
3. *Крюков В. А., Скиба А. К., Федосеев А. В.* Задачи оптимального управления разработкой газоконденсатного месторождения. — М.: ВЦ АН СССР, 1990.
4. Моделирование освоения газовых месторождений на заключительной стадии эксплуатации / А. К. Скиба, В. Хачатуров, А. В. Злотов, А. Н. Соломатин. — ВЦ РАН, 2006.
5. *Balder E. J.* On Existence Result for Optimal Economic Growth Problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1983. — Т. 95. — С. 195–213.
6. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978.
7. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1975.
8. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту. Матем. экономика. — М.: Мир, 1974.
9. *Skiba A. K.* Optimal Growth with a Convex-Concave Production Function // Econometrica. — 1978. — Т. 46, № 3. — С. 527–539.
10. *Асеев С. М., Кряжимский А. В., Тарасьев А. М.* Принцип максимума Понтрягина и условия трансверсальности для одной задачи оптимального управления на бесконечном интервале // Тр. МИ РАН. — 2001. — Т. 233. — С. 71–88.

UDC 517.97

Maximum Principle in a Problem of Maximization of the Income for Model of a Gas Deposit

A. K. Skiba

Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences
Vavilov st. 40, 119333 Moscow, Russia

The model of functioning of a gas deposit is considered. The optimum control problem is put and dares over an Infinite Horizon. Cost of realisation of the gas is included in the criterion description, set by concave function.