УДК 531.31:62-56

Безударное приведение механических систем за конечное время в голономное программное многообразие в условиях неопределённости

И. А. Мухаметзянов

Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
улица Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Строится алгоритм управления процессом безударного приведения в голономное программное многообразие фазового состояния механических систем любой конфигурации за конечное время при произвольно действующих на них не управляющих активных сил и ограниченных случайных возмущений.

Ключевые слова: управление, программное многообразие, алгоритм управления, безударное приведение в голономное программное многообразие, конечное время.

1. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, движения которой описываются следующими уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + Q', \tag{1}$$

где T — кинетическая энергия системы вида

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q,t)\dot{q} + \dot{q}^T b(q,t) + T_0(q,t), \tag{2}$$

q — n-мерный вектор обобщённых координат, $A(q,t)$ — $(n \times n)$ матрица, $b(q,t)$ — n-мерный вектор, $T_0(q,t)$ — скалярная функция, Q — n-мерный вектор управляющих сил, Q' — n-мерный вектор неуправляющих активных сил и случайных возмущающих сил, ограниченных по величине.

Элементы вектора $b(q,t)$ и матрицы $A(q,t)$, а также функцию $T_0(q,t)$ и их производные по q и t в области $G(q,t)$ функционирования системы (1) будем считать ограниченными и непрерывными. Заметим также, что $A(q,t)$, $b(q,t)$, $T_0(q,t)$, определяющие конфигурацию системы, кроме этих условий, не стеснены другими ограничениями.

Пусть невозмущённое состояние системы (1) задано в виде $(n-k)$-мерного многообразия, образованного голономными программными связями:

$$\omega(q,t) = 0, \tag{3}$$

где ω — k-мерный вектор с непрерывными и линейно независимыми в области $G(q,t)$ элементами, непрерывно дифференцируемыми по q и t в этой области. Заметим, что $k \leqslant n$.

Задача заключается в построении управляющей обобщённой силы Q в виде комбинации непрерывных и ступенчатых функций от ω и $\dot{\omega}$, обеспечивающей приведение за конечное время фазового состояния системы (1) в многообразие (3) при любых начальных условиях q_0, $\dot{q}_0$, t_0, независимо от конкретного вида $A(q,t)$, $b(q,t)$, $T_0(q,t)$, Q'.

Статья поступила в редакцию 20 марта 2012 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10-01-00381-а.

Отыскание вектора Q в виде функции от ω и $\dot{\omega}$ объясняется тем, что их значения в невозмущённом состоянии (3) равны нулю, а при отклонениях от него становятся отличными от нуля. Следовательно, вектор ω может быть принят в качестве меры отклонения от многообразия (3).

Заметим, что при размерности вектора Q, равной количеству степеней свободы системы, решение поставленной задачи возможно по принципу декомпозиции [1], развитому в работах [2–5]. Важной особенностью цели данной работы является решение поставленной задачи при минимальной размерности вектора Q, равной размерности k вектора ω или при любой размерности s вектора Q, удовлетворяющей условию $k \leqslant s \leqslant n$.

2. Алгоритм управления укороченной системой

Для решения задачи переходим от обобщённых координат $q_1, q_2, \dots, q_n$ к другим обобщённым координатам $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, являющимся элементами вектора ω, и координатам $p_1, p_2, \dots, p_{n-k}$, ортогональным к ним.

В силу ортогональности этих групп координат члены a_{qp} матрицы $A(q,p,t)$ кинетической энергии в новых координатах будут равны нулю. Следовательно, кинетическая энергия системы будет иметь следующую структуру:

$$T = T_\omega + T_p + T_0(\omega, p, t), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} T_\omega &= \frac{1}{2}\dot{\omega}^T A_\omega(\omega,p,t)\dot{\omega} + \dot{\omega}^T b_\omega(\omega,p,t), \\ T_p &= \frac{1}{2}\dot{p}^T A_p(\omega,p,t)\dot{p} + \dot{p}^T b_p(\omega,p,t). \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что матрица A_ω является определённо положительной. При этом уравнение (1) в новых координатах разбивается на две части:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \omega} = Q_\omega + Q'_\omega, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial T}{\partial p} = Q_p + Q'_p. \tag{7}$$

Систему (6) назовём *укороченной системой.*

Теперь переходим к преобразованиям, связанным лишь с укороченной системой, считая влияние системы (7) на систему (6) через элементы p и $\dot{p}$, входящими в неё через $A_\omega(\omega,p,t)$, $b(\omega,p,t)$ и их производные по t, p, ω, возмущающимися факторами системы (6).

Введём вместо $\dot{\omega}$ квазискорости $\dot{\tilde{\omega}}$

$$\dot{\tilde{\omega}} = \dot{\omega} + \mu\omega, \tag{8}$$

где $\mu\omega$ — вектор с элементами $\mu_i\omega_i$, $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, k)$.

Введём обозначение $\tilde{a} = \mu\omega$.

Подставляя (8) в (5), получим

$$T = T_{\tilde{\omega}} + T_p + \tilde{T}_0,$$

где

$$T_{\tilde\omega} = \frac{1}{2}\dot{\tilde\omega}^T A_\omega(\omega,p,t)\dot{\tilde\omega} + \dot{\tilde\omega}^T b_{\tilde\omega}(\omega,p,t), \quad \tilde T = T_0 + T^0_{\tilde\omega},$$

$$T_p = \frac{1}{2}\dot p^T A_p(\omega,p,t)\dot p + \dot p^T b_p(\omega,p,t), \quad T^0_{\tilde\omega} = \frac{1}{2}\tilde a^T A_\omega \tilde a - a^T b_\omega,$$

$$b_{\tilde\omega} = b_\omega - A_\omega\tilde a, \quad T^{(2)}_{\tilde\omega} = \frac{1}{2}\dot{\tilde\omega}^T A_\omega \dot{\tilde\omega}.$$

Уравнение (6) представим в квазикоординатах

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_{\tilde\omega}}{\partial\dot{\tilde\omega}}\right) - \frac{\partial T_{\tilde\omega}}{\partial\tilde\omega} = Q_\omega + Q'_\omega + \frac{\partial T}{\partial\omega} - \frac{\partial T_\omega}{\partial\tilde\omega} \tag{9}$$

в силу того, что

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\omega} = \frac{\partial T_{\tilde\omega}}{\partial\dot\omega} = \frac{\partial T_{\tilde\omega}}{\partial\dot{\tilde\omega}},$$

так как $\dfrac{\partial\dot{\tilde\omega}}{\partial\dot\omega} = 1.$

Имеет место $\dfrac{\partial T_{\tilde\omega}}{\partial\dot{\tilde\omega}} = A_\omega\dot{\tilde\omega} + b_{\tilde\omega}$. Следовательно, уравнение (9) можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_\omega\dot{\tilde\omega}\right) + B_{\tilde\omega}\dot{\tilde\omega} - \frac{\partial T^{(2)}_{\tilde\omega}}{\partial\tilde\omega} = Q_\omega + \tilde Q_\omega, \tag{10}$$

где

$$B_{\tilde\omega} = \left(\frac{\partial b_{\tilde\omega}}{\partial\tilde\omega} - \frac{\partial b^T_{\tilde\omega}}{\partial\tilde\omega}\right), \quad \tilde Q_\omega = Q'_\omega + Q'_\omega + \frac{\partial T}{\partial\omega} - \frac{\partial T_{\tilde\omega}}{\partial\tilde\omega} - \frac{\partial b_{\tilde\omega}}{\partial p}\dot p - \frac{\partial b_{\tilde\omega}}{\partial t} + \frac{\partial T^0_{\tilde\omega}}{\partial\tilde\omega}.$$

Умножая скалярно на $\dot{\tilde\omega}$ уравнение (10), левую часть полученного уравнения представим в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\tilde\omega}^T A_\omega\dot{\tilde\omega}\right) - \left(\ddot{\tilde\omega}^T A_\omega\dot{\tilde\omega} + \dot{\tilde\omega}^T\frac{\partial T^{(2)}_{\tilde\omega}}{\partial\tilde\omega} + \dot p^T\frac{\partial T^{(2)}_{\tilde\omega}}{\partial p} + \frac{\partial T^{(2)}_{\tilde\omega}}{\partial t}\right). \tag{11}$$

Так как

$$\left(\dot{\tilde\omega}^T A_\omega\dot{\tilde\omega}\right) = 2T^{(2)}_{\tilde\omega}, \quad \ddot{\tilde\omega}^T A_\omega\dot{\tilde\omega} + \dot{\tilde\omega}^T\frac{\partial T^{(2)}_{\tilde\omega}}{\partial\tilde\omega} + \dot p^T\frac{\partial^{(2)}_{\tilde\omega}}{\partial p} + \frac{\partial T^{(2)}_{\tilde\omega}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T^{(2)}_{\tilde\omega}\right),$$

то из (11) следует

$$\frac{\mathrm{d}T^{(2)}_{\tilde\omega}}{\mathrm{d}t} = \dot{\tilde\omega}^T\left(Q_\omega + \tilde Q_\omega + \frac{1}{2}\dot{\tilde\omega}^T\frac{\partial A_\omega}{\partial\tilde\omega}\dot{\tilde\omega}\right) - \frac{1}{2}\dot{\tilde\omega}^T\frac{\mathrm{d}A_\omega}{\mathrm{d}t}\dot{\tilde\omega}. \tag{12}$$

Вектор обобщённых сил управления выберем в виде

$$Q_\omega = U_\omega - D\dot{\tilde\omega}, \quad D > \frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{d}A_\omega}{\mathrm{d}t}\right|, \tag{13}$$

где D — постоянная определённо положительная матрица,

$$U_\omega = -\left(\operatorname{sign}\dot{\tilde\omega}\right)\left(U_0 + \dot{\tilde\omega}^T D_0\dot{\tilde\omega}\right), \tag{14}$$

где U_0 — постоянный вектор, $\dot{\tilde{\omega}}^T D_0 \dot{\tilde{\omega}}$ — вектор с элементами $\dot{\tilde{\omega}}^T D_{0i} \dot{\tilde{\omega}}$, D_{0i} — определённо положительные матрицы, $\operatorname{sign} \dot{\tilde{\omega}}$ — диагональная матрица с элементами $\operatorname{sign} \dot{\tilde{\omega}}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Если U_{0i}, D_{0i}, являющиеся элементами U_0 и D_0, удовлетворяют условиям

$$U_{0i} > \left|\tilde{Q}^i_\omega\right|, \quad D_{0i} \geqslant \frac{1}{2} \max \left|\frac{\partial A_\omega}{\partial \tilde{\omega}_i}\right|, \tag{15}$$

то правая часть (12) становится определённо отрицательной функцией по $\dot{\tilde{\omega}}$. Следовательно, значение $\left|\dot{\tilde{\omega}}\right|$ со временем будет убывать.

Покажем, что при выборе U_ω в виде (14) при любых конечных начальных значениях $\dot{\tilde{\omega}}(0)$ время обращения в нуль величины $\left|\dot{\tilde{\omega}}\right|$ будет конечным. Доказательству этого утверждения посвящается следующий раздел.

3. Оценка времени приведения системы в терминальное состояние

Так как матрица A_ω положительно определена, то имеет место

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{k} \dot{\tilde{\omega}}_i^2 \leqslant T^{(2)}_{\tilde{\omega}} \leqslant \lambda_2 \sum_{i=1}^{k} \dot{\tilde{\omega}}_i^2, \quad \lambda_\nu = \mathrm{const} > 0, \quad \nu = 1,\, 2. \tag{16}$$

Поэтому из (12) следует неравенство

$$\frac{\mathrm{d}T^{(2)}_{\tilde{\omega}}}{\mathrm{d}t} \leqslant -\left(b_1 \sqrt{T^{(2)}_{\tilde{\omega}}} + b_2 T^2_{\tilde{\omega}}\right), \tag{17}$$

так как правая часть (12), являющаяся определённо отрицательной функцией, наибольшее значение которой может быть оценено правой частью (17), где b_1 и b_2 — положительные постоянные. Обозначая для простоты $T^{(2)}_{\tilde{\omega}}$ через V, из (17) получим

$$\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{V}\left(b_1 + b_2\sqrt{V}\right)} \leqslant -\mathrm{d}t. \tag{18}$$

Имеет место

$$\frac{1}{\sqrt{V}\left(b_1 + b_2\sqrt{V}\right)} = \frac{1}{b_1\sqrt{V}} - \frac{b_2}{b_1\left(b_1 + b_2\sqrt{V}\right)}. \tag{19}$$

Интегрируя левую часть (18) с учётом (19) от V_0 до 0, а правую часть от 0 до t_1, получим оценку времени приведения системы в состояние $\dot{\tilde{\omega}} = 0$:

$$t_1 \leqslant \frac{2}{b_2} \ln\left(1 + \frac{b_2}{b_1}\sqrt{V_0}\right), \tag{20}$$

где V_0 — начальное значение $T^{(2)}_{\tilde{\omega}}$.

Заметим, что при $b_2 = 0$, $b_1 \neq 0$ правая часть (20) имеет значение, равное $\dfrac{2\sqrt{V_0}}{b_1}$.

Начиная с момента времени t_1, переведём систему в «режим торможения», учитывая противоположность знаков $\omega_i(t_1)$ и $\dot{\omega}_i(t_1)$. Для этого элементы вектора

(8) заменим на

$$\dot{\bar{\omega}}_{1i} = \dot{\omega}_i(\tau) - \dot{\omega}(t_1) + \frac{\dot{\omega}_i^2(t_1)}{2\omega_i(t)}\tau \operatorname{sign}\dot{\omega}_i(\tau) \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{21}$$

где $\tau = t - t_1$. При этом значения ω_i и $\dot{\omega}_i$ обращаются в нуль одновременно в моменты времени

$$t_{2i} = t_1 + \frac{2\,|\omega_i(t_1)|}{|\dot{\omega}_i(t_1)|} \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{22}$$

Элементы вектора Q_ω в (13) можно представить в виде

$$Q_{\omega i} = -\left(U_{0i} + \dot{\bar{\omega}}_0^T D_{0i}\dot{\bar{\omega}}_0\right) \operatorname{sign}\dot{\bar{\omega}}_{0i} - \left(D\dot{\bar{\omega}}_0\right)_i, \tag{23}$$

где

$$\dot{\bar{\omega}}_{0i} = \dot{\omega}_i \operatorname{sign}\dot{\bar{\omega}}_i^2 + \dot{\bar{\omega}}_{1i}\operatorname{sign}\left(1 - \operatorname{sign}\dot{\bar{\omega}}_i^2\right).$$

Такое управление обеспечивает приведение системы без удара в терминальное состояние (3) за конечный промежуток времени $t_2 = \max t_{2i}$.

4. Алгоритм управления исходной системой

Теперь необходимо определить вектор обобщённых сил управления Q исходной системой (1). С этой целью определим зависимость между Q и построенной в п. 2 функцией Q_ω. Для этого определим сумму элементарных работ всех активных сил управления

$$\delta A^\alpha = Q^T \delta q, \tag{24}$$

где δq — вектор изохронных вариаций элементов q.

Выделим из (24) элементарную работу $\delta A_\omega^\alpha = Q_\omega^T \delta\omega$, совершаемую лишь при вариациях

$$\delta\omega = \Omega\delta q, \tag{25}$$

вытекающих из (3), где $\Omega = \left\| \frac{\partial\omega}{\partial q} \right\|$ — прямоугольная $(k \times n)$ матрица.

Из системы k уравнений (25) определим элементы вектора δq в количестве n через k элементов вектора $\delta\omega$. Для этого вектор δq разложим на две составляющие: $(\delta q)_N$ — вектор, нормальный к многообразию (3), и $(\delta q)_\tau$ — вектор, касательный к (3). Первый из них ищем в виде $(\delta q)_N = \Omega^T\lambda$, где λ — k-мерный искомый вектор.

Подставляя

$$\delta q = (\delta q)_N + (\delta q)_\tau \tag{26}$$

в (25), получим $\Omega\Omega^T\lambda + \Omega(\delta q)_\tau = \delta\omega$. Следовательно, имеем $(\delta q)_N = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\delta\omega$.

Подставляя в (24) значение (26), получим

$$\delta A^\alpha = Q^T\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\delta\omega + Q^T(\delta q)_\tau.$$

Второй член в правой части этого выражения не зависит от $\delta\omega$. Следовательно, частью суммы элементарных работ управляющих сил, совершаемых на элементарных перемещениях δq, вносящих вклад в вариацию $\delta\omega$, является

$$\delta A_\omega^\alpha = Q^T\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\delta\omega,$$

откуда

$$Q_\omega^T = Q^T\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}. \tag{27}$$

Если вектор обобщённых сил управления исходной системой (1) задавать в виде $Q = M_0 u$, где u — r-мерный вектор управления, $M_0(q, \dot{q}, t)$ — матрица $(n \times r)$, удовлетворяющая в области G условию $\det \left\| M_0^T M_0 \right\| \neq 0$ и $\Omega M_0 \neq 0$, то при подстановке $Q = M_0 u$ в (27) получим следующую систему k уравнений для определения r элементов вектора u:

$$(\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega M_0 u = Q_\omega. \tag{28}$$

Заметим, что правая часть этого уравнения была определена в виде (13), где U_ω имеет вид (14) или (16).

Решение уравнения (28) относительно u можно представить в виде [6]:

$$u = \bar{\Omega}^T \left(\bar{\Omega}\bar{\Omega}^T\right)^{-1} Q_\omega + u_\tau, \tag{29}$$

где $\bar{\Omega} = (\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega M_0$, $\det \|\bar{\Omega}\, \bar{\Omega}^T\| \neq 0$, u_τ — r-мерный произвольно задаваемый вектор, удовлетворяющий условию $\bar{\Omega} u_\tau = 0$, который можно представить в виде [6]:

$$u_\tau = \left[E - \bar{\Omega}^T \left(\bar{\Omega}\bar{\Omega}^T\right)^{-1} \bar{\Omega}\right] \tilde{u},$$

где E — единичная матрица, $\tilde{u}$ — произвольный вектор. Заметим, что при $r = k$ матрица $\bar{\Omega}$ является квадратной, причём $E - \bar{\Omega}^T \left(\bar{\Omega}\bar{\Omega}^T\right)^{-1} \bar{\Omega} = 0$. Следовательно, имеет место $u_\tau \equiv 0$. Отсюда следует, что минимальная размерность вектора управления u может быть равна размерности k вектора ω при $k < n$. Как отмечалось в п.1, в этом заключается принципиальное преимущество предлагаемого здесь метода управления от принципа декомпозиции [1] при задании невозмущённого состояния системы в виде $(n - k)$-мерного многообразия (3).

Следует отметить также то, что в случае $r > k$, полагая $u_\tau = 0$, в силу произвольности вектора u_τ, получим вектор управления u, имеющий минимальную евклидову норму, в виде

$$u = \bar{\Omega}^T \left(\bar{\Omega}\bar{\Omega}^T\right)^{-1} \left(U_\omega - D\dot{\omega}\right), \tag{30}$$

где U_ω — ступенчатая функция (14).

В частном случае $k = r = 1$ матрицы M_0 и Ω^T становятся n-мерными векторами-столбцами, а C, D, U_ω, U_0, ω — скалярными величинами. При этом из (30) получим скалярное управление

$$u = \frac{\Omega^2}{\lambda} \left(U_\omega - D\dot{\omega}\right), \tag{31}$$

где λ — скалярное произведение векторов M_0 и Ω^T, U_ω — выражается в виде (14).

5. Управление процессом приведения преследующего тела в заданную ориентацию при пропорциональной навигации

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим твёрдое тело, жёстко связанное с подвижной системой координат $CXYZ$. Главный вектор управляющих сил $\tilde{\bar{U}}_1$ построим так, чтобы центр масс тела двигался по принципу пропорциональной навигации [7] при погоне за преследуемой точкой O при её произвольном движении в пространстве. При этом вектор управляющих моментов $\tilde{\bar{U}}_2$ должен быть таким, чтобы ось тела CZ из любого начального положения, удовлетворяющего условию $(\bar{V} \cdot \bar{K}_3) > 0$, где $\bar{K}_3$ — орт оси CZ, была приведена в положение, совпадающее с вектором скорости $\bar{V}$

центра масс тела, за конечное время. Следовательно, программная ориентация тела в этом случае может быть задана выражениями

$$\bar{K}_i \bar{V} = 0, \quad \bar{\omega}_v = b\bar{\omega}_\ell \quad (i = 1, 2), \tag{32}$$

где $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ — орты осей CX и CY; $\bar{\omega}_v$ — вектор угловой скорости вращения вектора $\bar{v}$; $\bar{\omega}_\ell$ — вектор угловой скорости вращения линии визирования $\overline{CO}$; b — заданный положительный коэффициент пропорциональности.

Заметим, что при выполнении условий (32) вектор $\bar{V}$ будет направлен по оси CZ тела с ортом $\bar{K}_3$. Следовательно, при этом вектор $\bar{\omega}_v$ будет равен сумме компонентов вектора угловой скорости тела на оси с ортами $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_2$. При таком принципе навигации угловая скорость $\bar{\omega}_\ell$ линии визирования $\overline{CO}$ считается доступной измерению в каждый момент времени t.

5.2. Построение главного вектора управляющих сил

Определим выражение главного вектора управляющих сил $\bar{U}_1$ в правой части дифференциального уравнения движения центра масс C тела

$$m\dot{\bar{V}} = \bar{f} + \bar{U}_1, \tag{33}$$

так, чтобы движение центра масс тела происходило по принципу пропорциональной навигации

$$\bar{\omega}_v = b\bar{\omega}_\ell, \tag{34}$$

где m — масса тела, f — главный вектор внешних неуправляющих сил, действующих на тело.

Заметим, что вращение вектора скорости $\bar{V}$ осуществляется благодаря действию силы $\bar{F}_n$, направленной по главной нормали траектории движения центра масс тела. Определим эту силу $\bar{F}_n$, исходя из условий (34) и $\bar{F}_n \perp \bar{V}$. Вектор $\bar{\omega}_v$ имеет величину $\omega_v = \dfrac{V}{\rho}$ и направлен по орту $\bar{i} = \dfrac{\bar{V} \times \bar{F}_n}{V \cdot F_n}$, где $F_n = \dfrac{V^2}{\rho} m$, ρ — радиус кривизны траектории точки C. Следовательно, имеет место

$$\bar{\omega}_v = \frac{\left(\bar{V} \times \bar{F}_n\right)}{mV^2}.$$

Скалярно умножая (34) на $\bar{\omega}_\ell$, получим

$$\frac{1}{mV^2}\left(\bar{V} \times \bar{F}_n\right)\bar{\omega}_\ell = b\omega_\ell^2.$$

Отсюда

$$\bar{F}_n \cdot \left(\bar{\omega}_\ell \times \bar{V}\right) = mV^2 b\omega_\ell^2. \tag{35}$$

Если искать решение этого уравнения в виде $\bar{F}_n = \lambda\left(\bar{\omega}_\ell \times \bar{V}\right)$, обеспечивающем коллинеарность векторов $\bar{F}_n$ и $(\bar{\omega} \times \bar{V})$, то величина силы F_n будет минимальна.

Подставляя $\bar{F}_n$ в (35), определим

$$\lambda = \frac{mV^2 b\omega_\ell^2}{\left(\bar{\omega}_\ell \times \bar{V}\right)^2},$$

а затем

$$\bar{F}_n = \frac{mV^2 b\omega_\ell^2}{\left(\bar{\omega}_\ell \times \bar{V}\right)^2}\left(\bar{\omega}_\ell \times \bar{V}\right). \tag{36}$$

Покажем, что при движении преследующего тела со скоростью, намного превышающей скорость цели, величина $\bar{\omega}_\ell \times \bar{V}$ при $\omega_\ell \neq 0$, не может быть равна 0. Для этого заметим, что принцип пропорциональной навигации призван осуществлять равенство компонентов скорости $\bar{V}$ и скорости цели $\bar{V}_O$, перпендикулярных к линии визирования $\overline{CO}$, с целью обеспечения поступательности движения $\overline{CO}$. При этом максимальное значение синуса угла α отклонения вектора $\bar{V}$ от линии $\overline{CO}$ не превышает значения $\sin\alpha_{\max} = \dfrac{V_O}{V}$. А угол между векторами $\bar{\omega}_\ell$ и $\overline{CO}$ является прямым. Следовательно, случай $\alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}$ возможен лишь тогда, когда $V = V_O$, при котором сближение с целью не возможно. Таким образом, в силу того, что $V \gg V_O$ при $\omega_\ell \neq 0$, случай $(\bar{\omega}_\ell \times \bar{V})$ исключается.

Итак, главный вектор управляющих сил выражается в виде $\bar{U}_1 = \bar{F}_n - \bar{f}_n$, где $\bar{F}_n$ имеет вид (36), $\bar{f}_n$ — компонента $\bar{f}$ на главную нормаль траектории точки C.

Отсюда напрашивается вопрос о том, что случится, если среди составляющих силы f имеются случайные недоступные измерению возмущающие силы. На этот вопрос возможен такой ответ. Составляющие этих возмущающих сил, направленных по главной нормали траектории точки C, возмущают силу $\bar{F}_n$, что равносильно возмущению коэффициента пропорциональности b. Следовательно, при достаточно больших значениях коэффициента b эти возмущения на процесс преследующего движения не оказывают существенного влияния. Что касается составляющих возмущающих сил, направленных по касательной к траектории точки C, то они приводят лишь к изменению скорости $\bar{V}$ точки C, что не оказывает влияния на угловую скорость $\bar{\omega}_v$, т.е. на процесс преследующего движения. Таким образом, эти возмущения могут оказывать некоторое влияние лишь на время встречи тела с целью O.

5.3. Построение главного момента управляющих сил

Известно, что вращательное движение тела вокруг центра масс в осях подвижной системы координат $CXYZ$ описывается дифференциальным уравнением

$$J\dot{\bar{\omega}}_0 = (J\bar{\omega}_o \times \bar{\omega}_0 + M + U), \tag{37}$$

где J — тензор инерции тела в точке C; $\bar{\omega}_0(p,q,r)$ — мгновенная угловая скорость тела; p, q, r — проекции $\bar{\omega}_0$ на оси CX, CY, CZ; M — главный момент относительно точки C внешних неуправляющих сил, действующих на тело; U — главный момент управляющих сил относительно C. Оси системы координат $CXYZ$ будем считать главными центральными осями инерции тела.

Вектор U определим из первого условия (32), обозначая

$$\omega_1 = \bar{K}_1 \cdot \bar{V}, \quad \omega_2 = \bar{K}_2 \cdot \bar{V}. \tag{38}$$

Введём квазискорости

$$\dot{\bar{\omega}}_i = \dot{\omega}_i + \mu_i \left(\bar{K}_i \cdot \bar{V}\right), \quad \mu_i > 0 \quad (i = 1,\, 2), \tag{39}$$

где

$$\dot{\omega}_i = \bar{\omega}_0 \cdot \left(\bar{K}_i \times \bar{V}\right) + \left(\bar{K}_i \cdot \dot{\bar{V}}\right). \tag{40}$$

Из (39) следует

$$\bar{\omega}_0 \cdot \left(\bar{K}_i \times \bar{V}\right) = \dot{\bar{\omega}}_i + B_i \quad (i = 1,\, 2), \tag{41}$$

где $B_i = -\left(\bar{K}_i \cdot \dot{\bar{V}}\right) - \mu_i \left(\bar{K}_i \cdot \bar{V}\right)$ $(i = 1,\, 2)$.

Решение системы (41) представим в виде

$$\Omega\bar{\omega}_0 = \dot{\tilde{\omega}} + B, \tag{42}$$

где матрица Ω определяется из

$$p\left(\bar{K}_1 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_1 + q\left(\bar{K}_1 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_2 + r\left(\bar{K}_1 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_3 = \dot{\tilde{\omega}}_1 + B_1,$$
$$p\left(\bar{K}_2 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_1 + q\left(\bar{K}_2 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_2 + r\left(\bar{K}_2 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_3 = \dot{\tilde{\omega}}_2 + B_2$$

в виде

$$\Omega = \begin{Vmatrix} \left(\bar{K}_1 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_1 & \left(\bar{K}_1 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_2 & \left(\bar{K}_1 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_3 \\ \left(\bar{K}_2 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_1 & \left(\bar{K}_2 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_2 & \left(\bar{K}_2 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_3 \end{Vmatrix}. \tag{43}$$

Так как $\left(\bar{K}_1 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_1 = 0$, $\left(\bar{K}_1 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_2 = -\left(\bar{V} \cdot \bar{K}_3\right)$, $\left(\bar{K}_1 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_3 = \left(\bar{V} \cdot \bar{K}_2\right)$, $\left(\bar{K}_2 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_1 = \left(\bar{V} \cdot \bar{K}_3\right)$, $\left(\bar{K}_2 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_2 = 0$ $\left(\bar{K}_2 \times \bar{V}\right) \cdot \bar{K}_3 = -\left(\bar{V} \cdot \bar{K}_1\right)$, то (43) представляется в более компактной форме

$$\Omega = \begin{Vmatrix} 0 & -\left(\bar{V} \cdot \bar{K}_3\right) & \left(\bar{V} \cdot \bar{K}_2\right) \\ \left(\bar{V} \cdot \bar{K}_3\right) & 0 & -\left(\bar{V} \cdot \bar{K}_1\right) \end{Vmatrix}. \tag{44}$$

Решение (42) ищем в виде

$$\bar{\omega}_0 = \Omega^T \lambda, \tag{45}$$

где λ — вектор $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Подставляя (45) в (42), получим

$$\Omega\Omega^T \lambda = \dot{\tilde{\omega}} + B.$$

Отсюда

$$\lambda = (\Omega\Omega^T)^{-1}\left(\dot{\tilde{\omega}} + B\right). \tag{46}$$

Подставляя (46) в (45), получим

$$\bar{\omega}_0 = \Omega^T (\Omega\Omega^T)^{-1}\left(\dot{\tilde{\omega}} + B\right).$$

Это выражение представим в виде

$$\bar{\omega}_0 = M\left(\dot{\tilde{\omega}} + B\right), \tag{47}$$

где $M = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}$.

Теперь определим кинетическую энергию $T = \dfrac{1}{2}\bar{\omega}_0^T J \bar{\omega}_0$, подставляя $\bar{\omega}_0$ вида (47). Получим

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{\tilde{\omega}}^T + B^T\right) M^T J M \left(\dot{\tilde{\omega}} + B\right). \tag{48}$$

Следовательно, T имеет следующую структуру:

$$T = T^2_{\tilde{\omega}} + T^1_{\tilde{\omega}} + T^0_{\tilde{\omega}}, \tag{49}$$

где $T^2_{\tilde{\omega}} = \dfrac{1}{2}\dot{\tilde{\omega}}^T A_\omega \dot{\tilde{\omega}}$, $T^1_{\tilde{\omega}} = b^T_{\tilde{\omega}}\dot{\tilde{\omega}}$, $T^0_{\tilde{\omega}} = \dfrac{1}{2}B^T A_\omega B$, $A_\omega M^T J M$, $b^T_{\tilde{\omega}} = B^T A_\omega$. Теперь вектор $Q^T_\omega = \left(Q^{(1)}_\omega, Q^{(2)}_\omega\right)$ в (13) может быть построен с элементами (22).

Для выражения вектора управления $u(u_p, u_q, u_r)$ в правой части (37) через Q_ω вариации $\delta\tilde{\omega}_i$ $(i = 1, 2)$ представим через вариации $\delta\bar{\omega}_0(\delta p, \delta q, \delta r)$. Из (47) следует $\delta\bar{\omega}_0 = M\delta\tilde{\omega}$. Сумму элементарных работ управляющих сил u_p, u_q, u_r можно представить в виде

$$\delta A^a_\omega = \tilde{u}^T\delta\bar{\omega}_0 = \tilde{u}^T M\delta\tilde{\omega},$$

где $\tilde{u} = J^{-1}U$.

Ту же сумму можно записать в виде $\delta A^a_\omega = Q^T_\omega\delta\tilde{\omega}$. Следовательно, имеет место $\tilde{u}^T M = Q^T_\omega$. Отсюда

$$Q_\omega = M^T\tilde{u}. \tag{50}$$

Вектор $\tilde{u}$ ищем в виде

$$\tilde{u} = M\tilde{\lambda}. \tag{51}$$

Подставляя (51) в (50), получим

$$M^T M\tilde{\lambda} = Q_\omega.$$

Отсюда $\tilde{\lambda} = (M^T M)^{-1}Q_\omega$. Следовательно, из (51) определим выражение $\tilde{u}$ через Q_ω в виде $\tilde{u} = M(M^T M)^{-1}Q_\omega$.

Заметим, что в случае равенства нулю одного из компонентов вектора u матрица (44) становится квадратной. Например, при $u_r = 0$ имеет место

$$\Omega = \begin{Vmatrix} 0 & -\left(\bar{V}\cdot\bar{K}_3\right) \\ \left(\bar{V}\cdot\bar{K}_3\right) & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом управление u будет двумерным вектором $u^T = (u_p, u_q)$.

В заключение отметим, что время приведения оси CZ тела в положение, направленное по $\bar{V}$, не превышает максимального значения (21).

Литература

1. *Пятницкий Е. С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 300, № 2. — С. 300–303. [*Pyatnickiyj E. S.* Princip dekompozicii v upravlenii mekhanicheskimi sistemami // Dokladih AN SSSR. — 1988. — T. 300, No 2. — S. 300–303.]
2. *Матюхин В. И.* Универсальные законы управления механическими системами. — М.: МАКС Пресс, 2001. — 249 с. [*Matyukhin V. I.* Universaljnihe zakonih upravleniya mekhanicheskimi sistemami. — M.: MAKS Press, 2001. — 249 s.]
3. *Матюхин В. И.* // ДАН. — 2009. — Т. 427, № 1. — С. 44–47. [*Matyukhin V. I.* // DAN. — 2009. — T. 427, No 1. — S. 44–47.]
4. *Ананьевский И. М.* Непрерывное управление по обратной связи возмущёнными механичскими системами // ПММ. — 2003. — Т. 67, вып. 2. — С. 163–178. [*Ananjevskiyj I. M.* Neprerihvnoe upravlenie po obratnoyj svyazi vozmuthyonnihmi mekhanichskimi sistemami // PMM. — 2003. — T. 67, вып. 2. — S. 163–178.]
5. *Ананьевский И. М.* Синтез непрерывного управления механичской системой с неизвестной матрицей инерции // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 3. — С. 24–35. [*Ananjevskiyj I. M.* Sintez neprerihvnogo upravleniya mekhanichskoyj sistemoyj s neizvestnoyj matriceyj inercii // Izv. RAN. Teoriya i sistemih upravleniya. — 2006. — No 3. — S. 24–35.]
6. *Мухаметзянов И. А.* Построение уравнений программных движений // Автоматика и телемеханика. — 1972. — № 10. — С. 16–23. [*Mukhametzyanov I. A.* Postroenie uravneniyj programmnihkh dvizheniyj // Avtomatika i telemekhanika. — 1972. — No 10. — S. 16–23.]

7. *Кан В. Л., Кельзон А. С.* Теория пропорциональной навигации. Л. — Судостроение, 1965. — 423 с. [*Kan V. L., Keljzon A. S.* Teoriya proporcionaljnoyj navigacii. L. — Sudostroenie, 1965. — 423 s.]

UDC 531.31:62-56

Nonimpact Reducing Mechanical Systems to Holonomic Programmed Set During Finite Time Under Indeterminancy Conditions

I. A. Mukhametzyanov

Department of Theoretical Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

The procedure of constructing the controls algorithm of the nonimpact reduction of the mechanics systems to holonomic programmed set in finite time under indeterminancy is proposed.

Key words and phrases: control, programmed set, controls algorithm, nonimpact reduction of the holonomic set, finite time.