Теоретическая механика

УДК 531.1, 531.3

Моделирование кинематических свойств и управление динамикой систем с программными связями

О. В. Матухина

Кафедра информационных систем и технологий
Нижнекамский химико-технологический институт
пр. Строителей, 47, г. Нижнекамск, Россия, 423570

Предлагается конструкция систем дифференциальных уравнений, используемая для составления уравнений нестационарных дифференциальных связей. Рассматривается задача построения уравнений динамики на основе интегрального вариационного принципа. Определяются выражения управляющих сил, действующих на систему с целью обеспечить выполнение уравнений связей, наложенных на систему. Некоторые результаты решения прикладных задач иллюстрируют эффективность описываемых методов.

Ключевые слова: управление динамикой, неголономные связи, программные связи, стабилизация, вариационный принцип.

Введение

Широкое внедрение робототехники в различные отрасли науки и производства, развитие космических технологий, транспортных систем и их применение в быту объясняет интерес исследователей к задачам управления движением механических систем. К моделям управляемых механических систем можно отнести роботы-манипуляторы, мобильные роботы, космические объекты и т.п. Большинство возникающих задач исследования механических систем можно свести к двум взаимосвязанным научным проблемам — моделированию кинематики и динамики систем и управлению их движением. Основные результаты исследований по моделированию процессов кинематики и динамики механических систем относятся к голономным и неголономным системам, описываемым уравнениями Лагранжа второго рода.

Задачам управления движением механических систем посвящено множество работ. Особое место среди них занимают исследования ученых А.С. Галиуллина, В.И. Зубова, Г.В. Коренева, П.Д. Крутько, И.А. Мухаметзянова, Р.Г. Мухарлямова, В.В. Румянцева и др. Вопросы моделирования кинематики и динамики управляемых механических систем являются достаточно актуальными, но недостаточно изученными. Так, например, для программирования движения управляемых механических систем эффективно используется решение обратной задачи качественной теории дифференциальных уравнений. В частности, применение метода построения автономной системы дифференциальных уравнений по заданному распределению фазовых траекторий на плоскости [1] позволяет получить уравнения дифференциальных связей, описывающих кинематические свойства плоской стационарной системы. Недостаточное внимание уделено задаче моделирования кинематики нестационарных систем, кинематические свойства которых могут быть описаны уравнениями нестационарных дифференциальных связей. Предложенная в данной работе конструкция неавтономной системы дифференциальных уравнений в многомерном пространстве, полученная в результате решения обратной задачи качественной теории неавтономных систем дифференциальных уравнений [2], позволяет получить решение задачи моделирования кинематических свойств нестационарных систем.

В последнее время интенсивно развиваются методы автоматизации составления и решения уравнений движения. Удобные для автоматизации формы записи

Статья поступила в редакцию 11 марта 2012 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, номер проекта 10-01-00381.

уравнений движения могут быть получены при использовании методов и принципов теоретической механики. Вариационные принципы механики и связанные с ними комплексы физических идей и математических методов имеют активное значение как в теоретической механике, так и в различных научных и технических проблемах. При создании методов автоматизированного моделирования динамики широкое распространение получили методы построения уравнений движения в форме Лагранжа, основанные на вариационном принципе Даламбера–Лагранжа. В задачах управления обычно используются уравнения динамики в обобщенных координатах или в канонических переменных [3]. Уравнения динамики в канонических переменных позволяют представить уравнения второго порядка системой уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Предложенный в данной работе аналитический метод построения уравнений движения в обобщенных координатах и в канонических переменных на основе интегрального вариационного принципа Гамильтона–Остроградского удобен для решения задач автоматизации управления динамикой систем с программными связями и применим к широкому классу систем.

1. Моделирование кинематических свойств

Кинематические свойства нестационарной системы описываются уравнениями нестационарных дифференциальных связей, накладывающих ограничения на координаты и скорости механической системы. Для построения соответствующих уравнений связей может быть использована структура множества неавтономных систем дифференциальных уравнений, определенная в виде [2]

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = P_j(x,t) + Q(x,t)\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{k=j+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2}, \tag{1}$$

$f = f_0 f_1 \cdots f_r f_{r+1}$, $f_0 \equiv 1$, $f_{r+1} \equiv 1$. Заданные функции $f_i(x,t)$ $(i = 1, \cdots, r)$ являются частными интегралами системы (1). Предполагается, что при любом t функции $f_i(x,t)$ всюду в области G непрерывны и обладают непрерывными частными производными $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}, \dfrac{\partial f_i}{\partial t}$ $(j = 1, \cdots, n)$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2 \neq 0$. В (1) $Q(x,t)$ — произвольная непрерывная функция, $P_j(x,t)$ — непрерывные функции, обращающиеся в нуль вдоль многообразия (1) и определенные в виде

$$P_j(x,t) = P(x,t) f_1 \cdots f_p \sum_{h=1}^{q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^{(h)}\frac{\partial f_i}{\partial x_k} f_0 f_1 \cdots f_{h-1} f_{h+1} \cdots f_r f_{r+1}, \tag{2}$$

где $f_s(x,t)$ $(s = 1, \cdots, p)$ допускают бесконечно малый высший предел [4]. Уравнения $f_l(x,t)$ при $l = p+1, \cdots, q$ соответствуют «перемещающимся» поверхностям, имеющим общие части $M(t)$. Предполагается, что многообразие $M(t)$ обладает компактной окрестностью при всех $t \geqslant t_0$ [4]. Равенства $f_w(x,t)$ при $w = q+1, \cdots, r$ разделяют области, заполненные поверхностями разных типов. "Подвижные"поверхности, определяемые уравнениями $f_w(x,t) = 0$, не имеют общих точек с поверхностями $f_s(x,t) = 0$ и многообразием $M(t)$.

Для определения условий устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости интегрального многообразия, на основе которых строятся системы дифференциальных уравнений (1), используется метод функций Ляпунова [2]. Выбором функции $P(x,t)$, $Q(x,t)$ и коэффициентов $\alpha_{jk}^{(h)}$ $(j,k = 1,\ldots,n,\ h = 1,\ldots,q)$ в выражении (2) можно добиться выполнения условий устойчивости или неустойчивости интегральных поверхностей $f_s(x,t)=0$ и многообразия $M(t)$.

Используя структуру (1) можно получить уравнения дифференциальных связей механической системы, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1,\dots,q_m$. Для этого необходимо записать выражения координат $x_1,\dots,x_n$ и их производных $\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$ через обобщенные координаты $q_1,\cdots,q_m$ и скорости $\dot{q_1},\dots,\dot{q_m}$ механической системы и подставить полученные выражения в (1).

2. Построение уравнений динамики

Рассматривается расширенная механическая система, фазовое состояние которой определяется векторами обобщенных координат $q=(q_\nu)$, $y=(y_\mu)$ и скоростей $\dot{q}=(\dot{q}_\nu)$, $\dot{y}=(\dot{y}_\mu)$, $y'=(y'_\eta)$, $\dot{q}_\nu=\dfrac{\mathrm{d}q_\nu}{\mathrm{d}t}$, $\dot{y}_\mu=\dfrac{\mathrm{d}y_\mu}{\mathrm{d}t}$, $\nu=1,\dots,m$, $\mu=1,\dots,m_1$, $\eta=1,\dots,m_2$. Предполагается, что известны кинетическая энергия расширенной системы $T=T(y,\dot{y},y',q,\dot{q})$, потенциальная энергия $P=P(y,q,t)$, диссипативная функция $D=D(y,\dot{y},y',q,\dot{q},t)$. Силы R_ν соответствуют координатам q_ν и рассматриваются как управляющие силы, обеспечивающие выполнение уравнений программных связей [5]

$$\Phi(q,t)=y(t),\quad \Phi=(\varphi_\mu), \tag{3}$$

$$\Phi_q\dot{q}+\Phi_t=\dot{y}(t),\quad \Phi_q=\left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q_\nu}\right),\quad \Phi_t=\left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial t}\right), \tag{4}$$

$$\Psi(q,\dot{q},t)=y'(t),\quad \Psi=(\psi_\eta). \tag{5}$$

Компоненты векторов избыточных переменных $y,\dot{y},y'$, оценивающие отклонения от уравнений связей, наложенных на обобщенные координаты q_ν и скорости $\dot{q}_\nu$ исходной системы, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям возмущений связей, разрешенных относительно старших производных,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dot{y},\quad \frac{d\dot{y}}{\mathrm{d}t}=g(y,\dot{y},y',q,\dot{q},t),\quad \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}=h(y,\dot{y},y',q,\dot{q},t), \tag{6}$$
$$g(0,0,0,q,\dot{q},t)=0,\quad h(0,0,0,q,\dot{q},t)=0.$$

Уравнения (6) составляются таким образом, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость и стабилизацию связей.

Для описания дифференциальных связей исходной системы $\Psi(q,\dot{q},t)=0$ используются уравнения, составленные в соответствии со структурой (1). Уравнения динамики несвободных механических систем в форме Лагранжа могут быть получены на основе интегрального вариационного принципа Гамильтона–Остроградского

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\delta T+G^T\delta x\right]\mathrm{d}t=0, \tag{7}$$

$$\delta T=\frac{\partial T}{\partial x}\delta x+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}, \tag{8}$$

$$\delta x=\begin{pmatrix}\delta q\\ \delta z\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}G_q\\ G_z\end{pmatrix},$$

$$G_q = -\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial D}{\partial \dot q} + Q + R, \quad G_z = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial D}{\partial \dot z}, \quad \dot z = \begin{pmatrix} \dot y \\ y' \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$Q = Q(q, \dot q, t)$ – вектор обобщенных непотенциальных внешних сил, $R = R(q, \dot q, t)$ – вектор управляющих сил.

Интегрируя по частям второе слагаемое выражения (8) с учетом равенств $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$ и $\delta \dot x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x$, выражение (7) можно представить в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} F^T \delta x \mathrm{d}t = 0. \tag{10}$$

Здесь $F = (F^q - R, F^z)$,

$$F^q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot q} - Q, \quad F^z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot z} - \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial D}{\partial \dot z}. \tag{11}$$

Если вариации избыточных переменных определяются из уравнений (3)–(5) по правилу

$$\Theta^T \delta q = \delta z, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \Phi_q \\ \Psi_{\dot q} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

то возможные перемещения δq_ν исходной системы должны быть определены решением системы $m_1 + m_2$ линейных алгебраических уравнений (12) относительно m неизвестных.

Следуя основной лемме вариационного исчисления, с учетом общего решения уравнения (12) и выражения элементарной работы обобщенных управляющих сил в случае идеальных связей условие (10) выполняется только тогда, когда справедливы равенства

$$F^q = \Theta^T \lambda, \quad F^z = 0, \tag{13}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{m_1+m_2})$ – вектор произвольных множителей. Тогда, используя принятые обозначения (9) и (11), выражения (13) можно представить в следующем виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot q} = \Theta^T \lambda + Q, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot y} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot y} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial y'} + \frac{\partial D}{\partial y'} = 0. \tag{16}$$

Для представления уравнений второго порядка (14)- (16) системой уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, можно уравнения динамики записать в канонических переменных

$$\begin{aligned} \dot q &= \frac{\partial H}{\partial p}, & \dot p + \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot q} &= \Theta^T \lambda + Q, \\ \dot y &= \frac{\partial H}{\partial r}, & \dot r + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot y} &= 0, \\ y' &= \frac{\partial H}{\partial s}, & \dot s + \frac{\partial D}{\partial y'} &= 0, \end{aligned}$$

где $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q}$, $r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot y}$, $s = \dfrac{\partial L}{\partial y'}$ – векторы обобщенных импульсов, $L(y, \dot y, y', q, \dot q, t) = T(y, \dot y, y', q, \dot q) - P(y, q, t)$ – функция Лагранжа,

$$H(y, r, s, q, p, t) = \sum_{\nu=1}^{m} p_\nu \dot q_\nu(q, p, t) + \sum_{\mu=1}^{m_1} r_\mu \dot r_\mu(y, r, t) + \sum_{\eta=1}^{m_2} s_\eta y'_\eta(s, t) - \\ - L(y, \dot y(y, r, t), y'(s, t), q, \dot q(q, p, t), t) \text{ – функция Гамильтона.}$$

3. Определение управляющих сил

Вектор управляющих сил, действующих на систему с целью обеспечения стабилизации связей, наложенных на исходную систему, определяется в виде

$$R = \Theta^T \lambda.$$

Для определения выражений компонент вектора множителей λ необходимо продифференцировать уравнения (4), (5) с учетом уравнений (14)–(16), разрешенных относительно старших производных. Тогда вектор обобщенных управляющих сил определяется следующим выражением

$$R = \begin{pmatrix} \Phi_q \\ \Psi_{\dot q} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = -(\Phi_q \dot q + 2\Phi_{qt} + \Phi_q H_{pq} - H_{qr})\dot q - (\Phi_q H_{py} - H_{ry})\dot y + \\ + (\Phi_q H_{pr} - H_{rr})(H_y + D_{\dot y}) + (\Phi_q H_{ps} - H_{rs})D_{y'} - \Phi_q H_{pt} + H_{rt} - \Phi_{tt},$$

$$A_2 = -(\Psi_q + \Psi_{\dot q} - H_{qs})\dot q - (\Psi_{\dot q} H_{py} - H_{ys})\dot y + \\ + (\Psi_{\dot q} H_{pr} - H_{rs})(H_y + D_{\dot y}) + (\Psi_q H_{ps} - H_{ss})D_{y'} - \Psi_{\dot q} H_{pt} + H_{st} - \Psi_t,$$

$$B_1 = (\Phi_q H_{pp} - H_{pr})[Q - H_q - D_{\dot q}], \quad B_2 = (\Psi_{\dot q} H_{pp} - H_{ps})[Q - H_q - D_{\dot q}].$$

4. Иллюстрация примеров моделирования

Пример 1. Управление движением манипулятора с обходом препятствия.

Используя предложенные методы построения уравнений динамики, решается задача управления движением манипулятора с обходом подвижного препятствия [6]. В результате численного решения уравнений динамики получены траектории движения конца схвата манипулятора при различных начальных условиях (рис. 1).

Пример 2. Управление движением мобильного робота с обходом подвижных препятствий.

Для построения множества траекторий, огибающих движущиеся навстречу друг другу препятствия, составляются уравнения нестационарных неголономных связей в соответствии с (1). Задача моделирования сводится к решению системы семи уравнений динамики и трех уравнений программных связей. Для построения уравнений, решения задачи управления и численного моделирования использована система компьютерной математики Maple. В результате численного моделирования была получена траектория движения центра масс системы с обходом подвижных препятствий (рис. 2) [7].

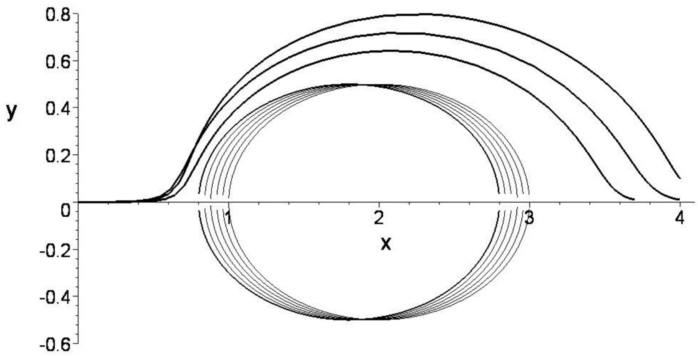

Рис. 1. Траектории движения конца схвата манипулятора при различных начальных условиях

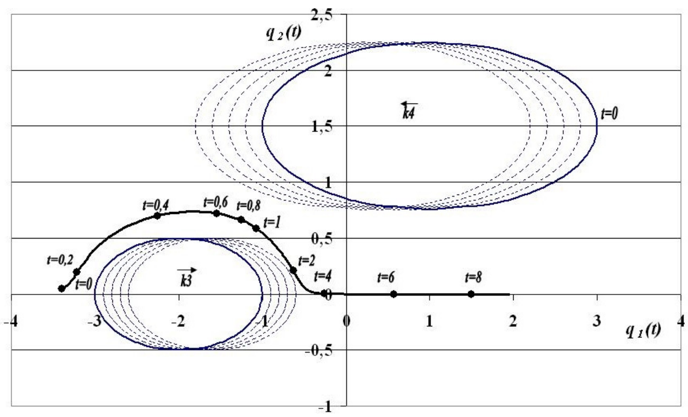

Рис. 2. Траектория движения цента масс системы с обходом подвижных препятствий

Заключение

Результаты исследований и численных экспериментов свидетельствуют об эффективности изложенных методов математического моделирования кинематических свойств и построения уравнений динамики систем с программными связями, а также их применимости для решения прикладных задач управления движением механических систем.

Литература

1. *Мухарлямов Р. Г.* К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1967. — Т. 3, № 10. [*Mukharlyamov R. G.* K obratnihm zadacham kachestvennoyj teorii differencialjnihkh uravneniyj // Differencialjnihe uravneniya. — 1967. — T. 3, No 10.]
2. *Ибушева О. В., Мухарлямов Р. Г.* Построение неавтономной системы дифференциальных уравнений по заданной совокупности частных интегралов в многомерном пространстве // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2008. — Т. 150, № 3. [*Ibusheva O. V., Mukharlyamov R. G.* Postroenie

neavtonomnoyj sistemih differencialjnihkh uravneniyj po zadannoyj sovokupnosti chastnihkh integralov v mnogomernom prostranstve // Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-matem. nauki. — 2008. — T. 150, No 3.]

3. *Мухарлямов Р. Г.* Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений манипуляционных систем // Известия РАН. МТТ. — 2011. — № 4. [*Mukharlyamov R. G.* Differencialjno-algebraicheskie uravneniya programmnihkh dvizheniyj manipulyacionnihkh sistem // Izvestiya RAN. MTT. — 2011. — No 4.]
4. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференциальные уравнения. — 1969. — Т. 5, № 4. [*Mukharlyamov R. G.* O postroenii mnozhestva sistem differencialjnihkh uravneniyj ustoyjchivogo dvizheniya po integraljnomu mnogoobraziyu // Differencialjnihe uravneniya. — 1969. — T. 5, No 4.]
5. *Мухарлямов Р. Г.* Стабилизация движения механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // Прикладная математика и механика. — 2006. — Т. 70, № 2. [*Mukharlyamov R. G.* Stabilizaciya dvizheniya mekhanicheskikh sistem na zadannihkh mnogoobraziyakh fazovogo prostranstva // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 2006. — T. 70, No 2.]
6. *Ибушева О. В., Мухарлямов Р. Г.* О построении уравнений динамики механических систем с программными связями // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. — 2010. — № 1. [*Ibusheva O. V., Mukharlyamov R. G.* O postroenii uravneniyj dinamiki mekhanicheskikh sistem s programmnihmi svyazyami // Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva. — 2010. — No 1.]
7. *Матухина О. В.* Управление движением мобильного робота с обходом препятствий // Математика и физика в системе инженерного образования: материалы межвузовской научно-практической конференции. — Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) КГТУ, 2011. — С. 23–26. [*Matukhina O. V.* Upravlenie dvizheniem mobiljnogo robota s obkhodom prepyatstviyj // Matematika i fizika v sisteme inzhenernogo obrazovaniya: materialih mezhvuzovskoyj nauchno-prakticheskoyj konferencii. — Nizhnekamsk: Nizhnekamskiyj khimiko-tekhnologicheskiyj institut (filial) KGTU, 2011. — S. 23–26.]

UDC 531.1, 531.3

Modeling of Kinematic Properties and Dynamics Control of Systems with Program Constraints

O. V. Matukhina

Department of Information Systems and Technology
Chemist-technological institute of Nizhnekamsk
Stroiteley pr., 47, Nizhnekamsk, Russia, 423570

The present paper proposes the differential equations systems construction method which is used for determination of non-stationary nonholonomic constraints equations. The problem of dynamic equations construction is considered based on the integral variation principle. The expressions for control forces acting on the system in order to ensure consistence with constraints equations imposed on the system, are determined. Some results of solving the applied problems illustrate efficiency of the described methods.

Key words and phrases: dynamics control, nonholonomic constraints, program constraints, stabilization, variation principle.