
УДК 519.6

Моделирование спотовых цен на электроэнергию с использованием марковских процессов переключения режимов

Е. Ю. Щетинин, С. В. Каплунов, П. Н. Марков

*Кафедра прикладной математики
ФБГОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»
Вадковский пер. 3а, Москва, Россия, 119136*

Рассмотрены проблемы моделирования и оценивания спотовых цен на электроэнергию на основе марковских процессов с переключением режимов. Использование диффузионных моделей гетероскедастичности в базовом режиме и тяжелохвостых распределений в режиме выбросов позволило описать исследуемые процессы с высокой точностью.

Ключевые слова: спотовые цены, марковские процессы, переключение режимов, выбросы, гетероскедастичность, MGARCH.

Введение

Разработка моделей временных рядов спотовых цен вызвана её практической важностью для оптимизации стратегии управления и хеджирования рисков реально функционирующих производственных систем как производителями электроэнергии, так и её потребителями. Методы прогноза на сутки вперёд востребованы участниками рынка, имеющими возможность гибко изменять свои объёмы на сутки вперёд, а также участниками, желавшими извлечь максимальную выгоду из краткосрочных спекулятивных рыночных действий.

Проблемы их моделирования связаны с большим количеством факторов, имеющих влияние на них: объёмы производства и потребления в регионе рассмотрения цены, график ремонтов генерирующего и сетевого оборудования, погодные условия, выбор состава генерирующего оборудования, ценовые стратегии участников и т. п. Поэтому, если строить динамическую модель для описания такой связи, она будет многопараметрической, эти параметры будут определяться только эмпирически, а законы их изменения во времени останутся неизвестными. Например, совместная генерация тепловой и электрической энергии на ТЭЦ отчасти зависит от температуры воздуха — в том смысле, что прогноз погоды на сутки вперёд определяет, в соответствии с нормативными требованиями для определённого сезона, количество сжигаемого топлива и режим работы турбин. Но сам прогноз погоды может, во-первых, не совпасть с действительностью, и, во-вторых, между температурой воздуха и спросом на электроэнергию нет прямых физических или экономических связей. Вследствие этого модели со многими параметрами, как правило, не являются особенно точными для того, чтобы получать на их основе прогнозы, имеющие практическую важность. Большая часть влияющих на систему факторов недоступна участнику рынка, поэтому моделирование без использования факторов и только на основе статистических данных является первым и, возможно, единственным научным методом.

1. Модели спотовых цен на электроэнергию: современное состояние

Многочисленные усилия исследователей направлены на создание таких моделей, которые бы учитывали не только основные эмпирические свойства показателей спотовых цен, но и успешно применялись в прогнозировании, а также задачах оценивания деривативов. Ряды спотовых цен являются нестационарными, содержат сложные сезонные компоненты различного порядка, внешние факторы отдельных дней недели, а также резкие непредсказуемые изменения их значений, именуемые выбросами (spikes). Пример такого временного ряда приведён на

рис. 1, на котором построены спотовые цены на электроэнергию немецкого рынка EEX.

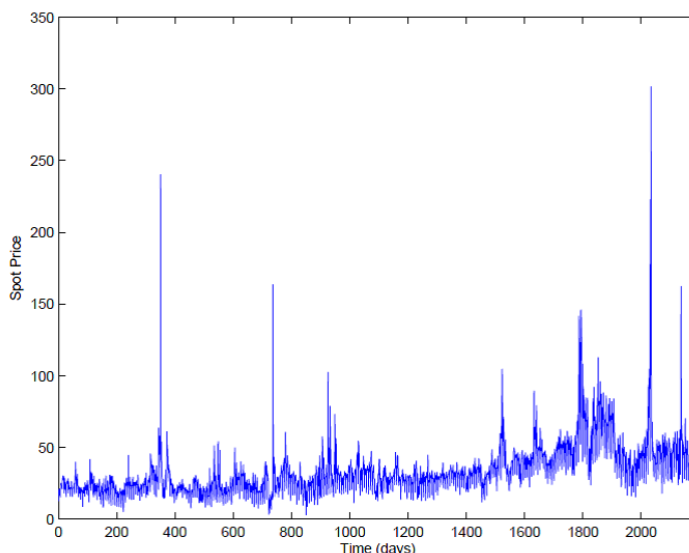


Рис. 1. График почасовых спотовых цен на электроэнергию на рынке EEX.de.

Основная цель настоящей работы состоит в разработке группы моделей, адекватно описывающих указанные свойства. К числу первых таких моделей можно отнести авторегрессионные модели *ARIMA*, сезонные *ARIMA*, группу авторегрессионных моделей с внешним (экзогенным) регрессором *ARX*, *ARMAX*, пороговые *TARX*, а также авторегрессионные модели дробно-интегрированных процессов [1, 2]. Отдельную группу моделей составляют модели с переключением режимов, применение которых в последнее время стало особенно популярно при описании спотовых цен на электроэнергию [2, 3]. Мы сосредоточимся на исследовании этой группы моделей. При разработке модели стоимостных показателей цен на электроэнергию мы используем не сами цены P_t , а их логарифмы $p_t = \log P_t$. Феноменология спотовых цен обнаруживает внутрисуточную и внутринедельную сезонные компоненты, а также следующие экзогенные факторы понедельника D_{mon} , субботы D_{sat} , воскресенья D_{sun} . Таким образом, наша модель обрела следующий вид:

$$p_t = f(t) + d_1 D_{mon} + d_2 D_{sat} + d_3 D_{sun} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где $f(t)$ — детерминированная компонента, учитывающая сезонность различного порядка и линейный тренд, ε_t — стохастическая компонента:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 D_1 + \beta_2 D_2 + \beta_3 t + \gamma_1 \sin\left((\gamma_2 + t) \frac{2\pi}{24}\right) + \gamma_3 \sin\left((\gamma_4 + t) \frac{2\pi}{168}\right), \quad (2)$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — параметры модели. Переменные $D_{mon}, D_{sat}, D_{sun}$ являются бинарными.

Весьма важной компонентой исследуемых процессов являются нерегулярные и экстремальные изменения в стоимости электроэнергии, так называемые выбросы (*spikes*) и падения (*drops*). Разрешению этой проблемы посвящено значительное количество работ, поскольку влияние этих пиков на качество модели и результаты прогноза является весьма существенным. Один из таких подходов предложен в работе [4] и состоит в усечении стоимостных показателей при превышении ими

некоторого порогового значения:

$$P_t = T \left(1 + \log_{10} \left(P_t / T \right) \right), \quad (3)$$

$P_t > T$, где T — пороговое значение. Однако выбор самого порога T является нетривиальным. Ряд авторов предлагают классифицировать все цены выше 75(100) евро за МВт как экстремальное наблюдение. Достаточно полный обзор и глубокий анализ современных методов моделирования выбросов можно найти в [5]. Пример применения порогового подхода типа (3) приведён на рис. 2.

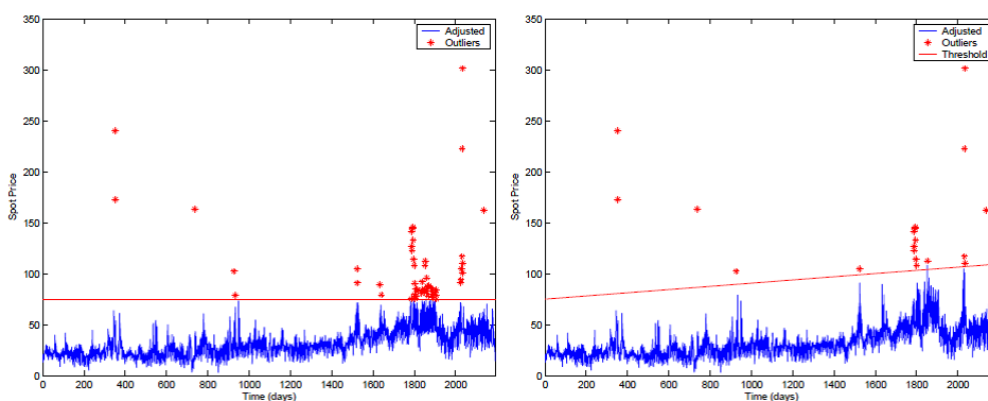


Рис. 2. Графики цен P_t : а) после применения порогового метода, б) после применения методики 3)

Дальнейшее развитие методов моделирования стохастической компоненты после устранения тренда и сезонных составляющих различного порядка связано с применением авторегрессионных моделей $ARIMA(p, q)$. Наиболее известные из них можно найти в работах [1–3, 6]. Однако, как показали дальнейшие исследования, указанные модели не в полной мере удовлетворяют всем предъявляемым к ним требованиям. В частности, природа выбросов оказалась слишком сложной, чтобы описать их с помощью линейных моделей авторегрессии.

Их логическим развитием стали модели марковских процессов с переключением режимов. Наиболее известной из них, несомненно, является модель Хэмилтона [7]. В отличие от неё авторегрессионная модель очищенного от тренда и сезонной компоненты процесса Y_t впервые предложена в работе [4]

$$Y_t = S_{t, R_t}, \quad (4)$$

где S_{t, R_t} является скрытой марковской цепью, состояния которой описывают два режима процесса Y_t : базовый режим $R_t = base$ и режим выбросов $R_t = spike$. Процессы $S_{t,1}$ и $S_{t,2}$ являются независимыми от состояний R_t . Количество режимов является переменным. Так, некоторые авторы вводят режим сбросов (R_t) = drops [8]. Как правило, это происходит в результате перехода к логарифмическим ценам и возникновению так называемых сбросов (drops), т.е. значительным кратковременным изменениям p_t с последующим возвратом процесса в базовый режим. Мы в своей работе будем использовать модель с двумя режимами. Матрица Π переходов содержит условные вероятности p_{ij} переходов процесса

из режима i в момент времени t в режим j в момент времени $t + 1$:

$$\Pi = (p_{ij})_{i,j=1,2} = (P(R_{t+1} = j | R_t = i))_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

Вероятность достичь состояния j из состояния i за время $t + m$ можно записать в следующем виде

$$(P(R_{t+m} = j | R_t = i))_{i,j=1,2} = (P^T)^m e_i, \quad (5)$$

где e_i обозначает i -й столбец единичной матрицы, P^T — транспонированная матрица.

Таким образом, необходимо решить проблему разделения смеси двух ненаблюдаемых стохастических процессов (случайных величин), что является достаточно сложной проблемой. Первые результаты, связанные с её решением, получены в работах [4, 5, 8]. В этих работах предложено рассматривать в качестве модели процесса в базовом режиме $S_{t,1}$ авторегрессионный стационарный процесс, например, AR(1)

$$S_{t,1} = \varphi S_{t-1,1} + c + \varepsilon_t, \quad t \in N. \quad (6)$$

В качестве процесса, описывающего режим выбросов, используются случайные величины с некоторым законом распределения $S_{t,2} \sim F$, $t \in N$. Моделями таких распределений могут быть нормальное, логнормальное, Парето и другие.

Следующим этапом в развитии модели (6) в качестве модели базового режима предложено попробовать использовать известное в финансовом анализе уравнение Васичека (в стохастическом анализе — уравнение Орнштейна–Уленбека [5])

$$dp_t = (\alpha - \delta p_t) dt + \sigma dW_t, \quad (7)$$

где W_t — винеровский процесс, α, δ, σ — параметры модели.

Однако для некоторых периодов ценовых показателей характерны высокая волатильность, которую довольно сложно описать с помощью уравнения (7). В работе Кокса [9], а также Р. Верона [8], предложена модель диффузионного типа процесса p_t , учитывающая его волатильность в следующем виде:

$$dp_t = (\alpha - \delta p_t) dt + \sigma_t p_t^\gamma dW_t, \quad (8)$$

где γ — параметр. Нужно заметить, что в этой модели волатильность зависит от текущего значения p_t . Для $\gamma > 0$ чем выше цена p_t , тем больше её волатильность. Для $\gamma < 0$ чем меньше цена p_t , тем больше её волатильность. Параметр γ можно было бы интерпретировать как показатель силы эффекта леввериджа. В частности, если $\gamma > 0$, то положительные скачки значений цен приводят к большей волатильности, чем отрицательные их изменения. Если сравнивать модели (8) и (7), то новая модель позволяет классифицировать экстремальные цены преимущественно не как выбросы, но как наблюдения базового режима. Этот эффект можно легко увидеть, сравнив графики выбросов на рис. 3 б, 4 б. Более подробный анализ численных экспериментов будет приведён ниже.

Процедура оценивания параметров моделей (4)–(8) является достаточно сложной, поскольку режим выбросов, как уже было отмечено, является ненаблюдаемым процессом. В работе Хэмилтона предложен алгоритм *EM* (*Expectation-Maximization*) [3, 7], позволяющий это делать за два последовательных шага. В дальнейшем он был улучшен Ким [10]. На рис. 3, 4 приведены результаты его применения на данных немецкого рынка *EEEX*.

2. Численные эксперименты и анализ результатов

В настоящей работе мы исследовали спотовые цены австрийского и немецкого рынков как наиболее стабильных европейских рынков электроэнергии с помощью моделей (2)–(8). Для демонстрации того, как работают модели, анализируемые данные разделялись два различных периода: 1) 01.01.2001–31.12.2005 гг. (ЕЕХ1) и 2) 1.01.2006–01.01.10 гг. (ЕЕХ2). Заметим, что начиная с 2004 г. цены формируют восходящий тренд и высокую волатильность, что может быть связано как с ростом цен на топливо, в том числе и на нефть, так и введением платы за эмиссию CO_2 в Европе в январе 2005 г. Рост волатильности во втором периоде можно также объяснить и наступлением subprime кризиса в 2008 г. в США и дальнейшего его распространения на Европу в 2009 г. Этот эффект можно увидеть на данных второго периода.

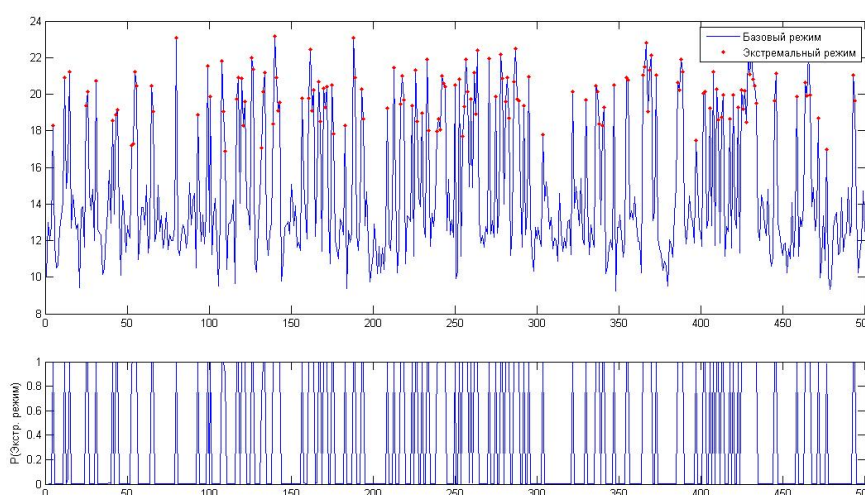


Рис. 3. Описание $ЕЕХ$ данных моделью Васичека (7): а) верхний график отображает базовый режим и выбросы (отмечены точками); б) нижний график отображает вероятности перехода из базового режима в режим выбросов

Для них были получены оценки параметров модели (4)–(8), они приведены в табл. 1, 2. Получены также оценки для условных вероятностей p_{bb} , p_{ss} и безусловных вероятностей $P(R = i)$ нахождения в i -м режиме. Также вычислено количество выбросов, получаемых соответствующими моделями распределений, и их квантили высокого порядка. Оказалось, что при использовании распределения Парето в качестве модели выбросов их количество в искусственно смоделированных данных значительно превышает исходные. Как следует из рис. 4, те наблюдения, которые были отнесены моделью Васичека к выбросам, моделью гетероскедастичности, уже таковыми не считаются.

В дальнейшем, в качестве модели распределения выбросов в работе использовались α -устойчивые распределения, в частности, логнормальное. Далее, сравнивая значения логарифмических функций максимального правдоподобия, мы отмечаем, что во всех периодах оценивания для модели (8) получено наилучшее приближение. Тесты Андерсона–Дарлинга, Колмогорова–Смирнова и W^2 -критерий Крамера–фон Мизеса показали во всех случаях достаточно хорошее приближение моделью (8) как базового, так и пикового режимов (с уровнем значимости 0,05). Наконец, для оценок параметра γ нами получены следующие значения и

Таблица 1
 Результаты оценивания параметров модели (4)–(8). Модель Васичека (7)

Данные	Оценки параметров модели				
	γ	p_{bb}	p_{ss}	$R_t = b$	$R_t = s$
ЕЕХ1	0	0.90	0.83	0.73	0.27
ЕЕХ2	0	0.95	0.92	0.78	0.22

Таблица 2
 Результаты оценивания параметров модели (4)–(8). Модель Кокса-Ингерсола (8)

Данные	Оценки параметров модели				
	γ	p_{bb}	p_{ss}	$R_t = b$	$R_t = s$
ЕЕХ1	0.184	0.92	0.91	0.68	0.32
ЕЕХ2	0.562	0.93	0.89	0.85	0,15

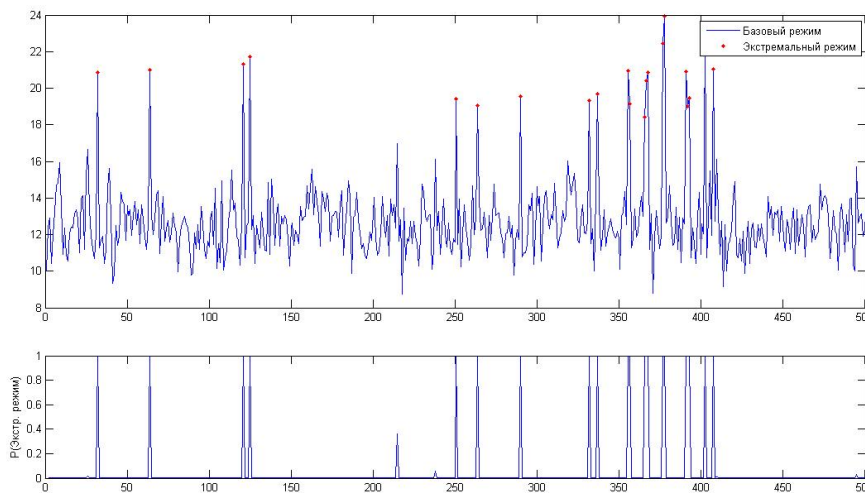


Рис. 4. Описание *ЕЕХ* данных моделью (8): а) верхний график отображает базовый режим и выбросы (отмечены точками); б) нижний график отображает вероятности перехода из базового режима в режим выбросов

$\gamma_{ЕЕХ1} = 0,184$, $\gamma_{ЕЕХ2} = 0,562$ соответствующие динамике модели Васичека в первом периоде и модели высокой волатильности Кокса-Ингерсола во втором периоде. Их положительные значения также подтверждают известный феномен финансового рычага, когда положительные ценовые скачки приводят к большему росту волатильности, нежели их падения, что можно наблюдать на рис. 4.

Заключение

В статье рассмотрены ключевые проблемы моделирования и методы оценивания спотовых цен на электроэнергию на примере немецкого рынка ЕЕХ в различные временные периоды его функционирования. Показано, что спотовые цены успешно могут быть описаны так называемыми марковскими процессами с переключением режимов, учитывающих такие свойства как возвратность цен к среднему и наличие в них выбросов. Предложена модель двухрежимной стохастической динамики спотовых цен, в которой базовый режим управляется диффузионным процессом типа Орнштейна–Уленбека (модель Васичека (7)), а второй режим представлен экстремальными наблюдениями (выбросами) и описывается α -устойчивыми распределениями. Показано, что важную роль в идентификации этих режимов играют методы выделения тренда и сезонных компонент исследуемых процессов спотовых цен. Как показали численные эксперименты, некорректное разделение компонент может привести к возникновению ложных выбросов (spikes) и падений (drops) и, в дальнейшем, ошибочным выводам при построении моделей спотовых цен.

Вместе с тем искусственно смоделированные *спотовые цены обнаружили несколько большее число выбросов, чем их должно быть в реальности*. В качестве предположения причины этого феномена была выдвинута гипотеза о непостоянстве вариации остатков и предложено моделировать динамику базового режима с помощью диффузионных процессов типа Кокса–Ингерсола–Росса (CIR-model), содержащих нелинейную компоненту, учитывающую волатильность цен. В результате численных экспериментов на искусственных и реальных данных было показано, что в периоды высокой волатильности модель (8) демонстрирует более высокую точность в описании спотовых цен на электроэнергию, по сравнению с моделью Васичека. Однако эффективность применения построенных моделей к построению прогнозов и к оцениванию стоимости энергетических деривативов оставляет желать лучшего, поскольку точность получаемых прогнозов достаточно лишь на ближайшие сутки или двое. В частности, это связано с тем, что гипотеза о независимости режимов переключения является не всегда справедливой. Как было показано в [11], стохастическая динамика режимов переключения может быть описана с помощью многомерных моделей авторегрессионной гетероскедастичности MGARCH. Разработке моделей динамики зависимых режимов переключения будут посвящены наши дальнейшие исследования.

Литература

1. *Bunn D. W.* Modeling Prices in Competitive Electricity Markets. — Chichester: Wiley, 2003.
2. *Щетинин Е. Ю.* Методы моделирования и прогнозирования спотовых цен на электроэнергию // Финансовая аналитика: проблемы и решения. — 2008. — № 11(8). [Shchetinin Eu. Yu. Metodih modelirovaniya i prognozirovaniya spotovihkh cen na ehlektroehnergiyu // Finansovaya analitika: problemih i resheniya. — 2008. — No 11(8)]
3. *Weron R.* Modeling and Forecasting Electricity Loads and Prices: A Statistical Approach. — Chichester: Wiley, 2006.
4. *Huisman R., Mahieu R.* Regime Jumps in Electricity Prices // Energy Economics. — 2003. — Vol. 25. — Pp. 425–434.
5. *Weron R., Bierbrauer M., Truck S.* Modelling Electricity Prices: Jump Diffusion and Regime Switching // Physica A. — 2004. — Vol. 336. — Pp. 39–48.
6. *Щетинин Е. Ю.* О методах оценивания длинной памяти финансовых временных рядов // Финансовая аналитика. — 2010. — № 13(37). [Shchetinin Eu. Yu. O metodakh ocenivaniya dlinnoy pamyati finansovihkh vremennihkh ryadov // Finansovaya analitika. — 2010. — No 13(37)]
7. *Hamilton J. D.* A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle // Econometrica. — 1989. — Vol. 57. — Pp. 357–384.

8. *Janczura J., Weron R.* Regime Switching Models for Electricity Spot Prices: Introducing Heteroskedastic Base Regime Dynamics and Shifted Spike Distributions // IEEE Conference Proceedings EEM'09. — 2009.
9. *Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A.* A Theory of the Term Structure of Interest Rates // *Econometrica*. — 1985. — Vol. 53. — Pp. 385–407.
10. *Kim C.-J.* Dynamic Linear Models with Markov-Switching // *J. Econom.* — 1994. — Vol. 60. — Pp. 1–22.
11. *Каплунов С. В., Щетинин Е. Ю.* Разработка и исследование модели мультирежимной стохастической динамики корреляционных связей показателей спотовых цен на электроэнергию // XLVI Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии, 19-23 апреля 2010 г. — Москва: РУДН, 2010. [Kaplunov S. V., Shchetinin Eu. Yu. Razrabotka i issledovanie modeli muljtirezhimnoj stokhasticheskoyj dinamiki korrelyacionnihkh svyazeyj pokazateley spotovihkh cen na ehlektroehnergiyu // XLVI Vserossiyjskaya konferenciya po problemam matematiki, informatiki, fiziki i khimii, 19-23 aprelya 2010 g. — Moskva: RUDN, 2010]

UDC 519.6

Spot Electricity Prices Modelling with Regime Switching Models

Eu. Yu. Shchetinin, S. V. Kaplunov, P. N. Markov

*Chair of Applied Mathematics
Moscow State Technology University "STANKIN"
3a, Vadkovsky lane, Moscow, Russia, 119136*

We address the issue of modeling spot electricity prices with regime switching models. After reviewing the stylized facts about power markets we propose and fit various models to spot prices from german energy market EEX. Afterwards we assess their performance by comparing simulated and market prices. Our empirical study shows that (1) models with MRS are more realistic for spikes and jumps and (2) introducing herteroskedasticity in the base regime model leads to better spike identification and goodness-of-fit than in MRS models with mean-reverting, constant volatility dynamics.

Key words and phrases: electricity spot prices, regime-switching models, spikes, heteroscedasticity, MGARCH.