УДК 519.711.3; 517.958

Алгоритм символьно-численного вычисления функции Грина дифференциальных уравнений второго порядка

И. Н. Беляева*, В. Е. Богачев†, Н. А. Чеканов†

* *Кафедра информатики и вычислительной техники*
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
ул. Победы, 85, Белгород, Россия, 308015

† *Кафедра прикладной математики и механики*
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
ул. Студенческая, 14, Белгород, Россия, 308007

Разработан алгоритм и составлена программа символьно-численного построения функции Грина, в общем, в виде обобщённых степенных рядов для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с краевыми условиями первого рода, которое может содержать особые регулярные точки. Приведены примеры вычисления функции Грина для ряда краевых задач, которые показывают эффективность работы разработанной программы.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, функция Грина, символьно-численные вычисления.

1. Введение

Как известно, краевую задачу на собственные значения для дифференциального уравнения эквивалентным образом можно представить в виде интегрального уравнения Фредгольма, в котором учтены граничные условия [1–3]. Теория интегральных уравнений Фредгольма достаточно хорошо разработана и может быть эффективно использована для решения дифференциальных уравнений, в частности, уравнения Шрёдингера.

Однако для такого интегрального представления необходимо вычислить функцию Грина для исходного дифференциального уравнения, которую для большинства дифференциальных уравнений нельзя построить в явном аналитическом виде. Поэтому для её вычисления используют как приближенные аналитические методы, так и прямые численные расчёты (см., например, [4, 5]).

В последнее время перспективным направлением являются методы, сочетающие символьные преобразования с последующим при необходимости численным расчётом, с применением современных математических пакетов, например, Maple, Reduce, Mathematica, MACSYMA и др. [6, 7].

Для вычисления функции Грина, например, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка необходимо знать его два линейно независимых решений, что крайне затруднительно при ручных вычислениях для сложных уравнений. Кроме того, с целью решения задачи на собственные значения с использованием методов интегральных преобразований следует строить функцию Грина с нужной точностью. Этим определяется актуальность нахождения функции Грина с помощью компьютерных систем алгебраических вычислений.

В настоящей работе разработан алгоритм и составлена программа для символьно-численного построения функции Грина обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, допускающего особые регулярные точки, с использованием системы компьютерной алгебры Maple.

Статья поступила в редакцию 27 апреля 2012 г.

2. Метод построения функции Грина

Рассмотрим построение функции Грина для однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$L \equiv (PP(x) \cdot y'(x))' + QQ(x) \cdot y(x) = 0, \tag{1}$$

которое на отрезке $[a, b]$ может иметь регулярные особые точки, с однородными граничными условиями

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) перепишем следующим образом

$$y''(x) + P(x) \cdot y'(x) + Q(x) \cdot y(x) = 0, \tag{3}$$

где

$$P(x) = \frac{PP'(x)}{PP(x)}, \quad Q(x) = \frac{QQ(x)}{PP(x)}. \tag{4}$$

В случае, если коэффициенты-функции $P(x)$ и $Q(x)$ не содержат регулярных особых точек и являются голоморфными функциями в окрестности точки $x = x_0$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \tag{5}$$

то линейно независимые решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ могут быть представлены в виде степенных сходящихся рядов:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)} (x - x_0)^k, \\ y_2(x) &= (x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^k. \end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты $c_k^{(1)}$ и $c_k^{(2)}$ определяются единственным образом посредством подстановки рядов (5) в уравнение (3) и приравниванием к нулю коэффициентов при различных степенях независимой переменной в левой части полученного равенства.

При наличии полюсов не выше второго порядка в точке $x = x_0$ вид решений (6) будет иным в зависимости от корней определяющего уравнения (см., например, [1, 2]). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2] известно, что для того чтобы уравнение, в частности вида (1), имело в окрестности особой точки $x = x_0$ хотя бы одно частное решение в виде обобщённого степенного ряда

$$y(x) = (x - x_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad (c_0 \neq 0), \tag{7}$$

достаточно, чтобы это уравнение имело вид

$$y''(x) + \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k}{x - x_0} y'(x) + \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^2} y(x) = 0. \tag{8}$$

где показатели ρ являются корнями определяющего уравнения:

$$\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0=0. \tag{9}$$

Пусть ρ_1 и ρ_2 есть корни уравнения (9) и $\rho_1 \geqslant \rho_2$. Если корни определяющего уравнения различны, но их разность $\rho_1-\rho_2$ не равна целому положительному числу, то линейно независимые решения имеют вид:

$$\begin{aligned} y_1(x,E) &= (x-x_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(x-x_0)^k, \quad (c_0^{(1)}\neq 0),\\ y_2(x,E) &= (x-x_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)}(x-x_0)^k, \quad (c_0^{(2)}\neq 0). \end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициенты $c_k^{(1)}$ и $c_k^{(2)}$ определяются подстановкой рядов (10) в уравнение (8), при этом коэффициенты $c_0^{(1)}$ и $c_0^{(2)}$ остаются произвольными, которые далее положим равными единице. Если же $\rho_1-\rho_2$ есть целое положительное число, то одно решение, соответствующее корню ρ_1, по-прежнему имеет вид

$$y_1(x)=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(x-x_0)^k, \tag{11}$$

а второе линейно независимое решение определяется следующим рядом, содержащим логарифмический член:

$$y_2(x)=(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)}(x-x_0)^k+\xi_{-1}y_1(x)\ln(x-x_0). \tag{12}$$

Если случится, что $\xi_{-1}=0$, то второе линейно независимое решение будет иметь вид обобщённого степенного ряда. В случае равенства $\rho_1-\rho_2=0$ одно частное решение имеет вид (11), а второе линейно независимое решение уравнения (8) имеет вид (12), но при этом коэффициент $\xi_{-1}\neq 0$.

Из представления решений уравнения (1) в виде рядов (6) видно, что решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ автоматически удовлетворяют, соответственно, условиям

$$\begin{cases} y_1(x_0)=1, & y_2(x_0)=0,\\ y_1'(x_0)=0, & y_2'(x_0)=1 \end{cases} \tag{13}$$

и для их символьно-численного построения можно использовать Maple программу [8]. Точка x_0 совпадает с одним из концов отрезка $[a,b]$ и может быть регулярной особой точкой дифференциального уравнения (1).

Так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в виде степенных (6) или обобщённых рядов (10)–(12) являются линейно независимыми решениями уравнения (1), то с их помощью находим его общее решение

$$y(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x), \qquad C_1,\ C_2-\text{const}. \tag{14}$$

Зная общее решение (14), можно построить функцию Грина для дифференциального уравнения (1) с однородными граничными условиями (2).

Как известно, функцией Грина краевой задачи (1), (2) называется функция $G(x,\xi)$ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$, которая имеет следующие свойства.

1. Функция $G(x,\xi)$ является непрерывной в точке $x=\xi$ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$.

2. Её производная в точке $x = \xi$ имеет разрыв 1-го рода, причём скачок равен $1/PP(\xi)$, т. е.

$$G'_x(x,\xi)|_{x=\xi+0} - G'_x(x,\xi)|_{x=\xi-0} = \frac{1}{PP(\xi)}. \qquad (15)$$

3. В каждом из интервалов $[a,\xi)$ и $(\xi,b]$ функция $G(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от x, является решением уравнения (1).

4. Функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет граничным условиям (2).

При выполнении перечисленных свойств существует одна и только функция Грина.

Для построения функции Грина из общего решения (14) находим линейно независимые решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ такие, которые удовлетворяют однородным краевым условиям $u_1(a) = 0$, $u_1(b) \neq 0$ и $u_2(b) = 0$, $u_2(a) \neq 0$ соответственно. Тогда функция Грина строится следующим образом

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_1(x)\cdot u_2(\xi)}{PP(\xi)\cdot W(\xi)}, & a \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{u_1(\xi)\cdot u_2(x)}{PP(\xi)\cdot W(\xi)}, & \xi \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \qquad (16)$$

где

$$W(\xi) \equiv W[u_1,u_2] = u_1(\xi)\cdot u'_2(\xi) - u'_1(\xi)\cdot u_2(\xi) \qquad (17)$$

есть функциональный определитель Вронского.

3. Описание алгоритма

Ниже кратко представлен разработанный алгоритм для построения функции Грина линейного дифференциального уравнения второго порядка (1).

Шаг 1. Ввод двух коэффициентов-функций $PP(x)$ и $QQ(x)$, определяющих само дифференциальное уравнение (1), граничных условий (2), а также желаемый максимальный порядок n степенного ряда.

Шаг 2. Преобразование дифференциального уравнения (1) к виду (3).

Шаг 3. Назначение флага $TypeV$:

если $TypeV = 1$, то дифференциальное уравнение (1) не содержит особенностей в точке x_0;

если $TypeV = 0$, то дифференциальное уравнение (1) имеет полюс не выше второго порядка в точке x_0.

Шаг 4. Нахождение двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ по формулам (6), если $TypeV = 1$.

Шаг 5. При $TypeV = 0$ находим корни ρ_1, ρ_2 определяющего уравнения (9) и коэффициенты $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ рядов для двух линейно независимых решений уравнения (1), а также коэффициент ξ_{-1} ряда (12).

Шаг 6. Проверка решений $y_1(x)$, $y_2(x)$.

Шаг 7. Нахождение общего решения уравнения (3) согласно выражению (14).

Шаг 8. Построение функции Грина $G(x,\xi)$ для дифференциального уравнения (1) с однородными граничными условиями (2) по формуле (16).

Шаг 9. Проверка основных свойств функции Грина.

4. Примеры вычисления функции Грина

Разработанная программа позволяет находить функцию Грина в виде степенных или обобщённых рядов, в общем, произвольной степени n, но ограниченной возможностями конкретной вычислительной машины. Поэтому в представленных решениях ниже приводится небольшое количество членов ряда. С помощью этой программы в качестве примеров были проведены символьно-численные вычисления функции Грина для конкретных дифференциальных уравнений, результаты которых совпадают с точной функцией Грина при её разложении в степенной ряд до той же степени n, а в некоторых случаях имеет место полное совпадение (примеры 1, 4, 5).

1. Если коэффициенты-функции имеют значения $PP(x) = 1$, $QQ(x) = 0$, то уравнение (1) примет простейший вид

$$y''(x) = 0, \tag{18}$$

для которого без потери общности граничные условия выбираем в виде $a = 0$, $b = 1$, так как заменой $x \to (x - a)/(b - a)$ отрезок $[a, b]$ можно свести к отрезку $[0, 1]$. С помощью разработанной программы получены два линейно независимых решения, в общем тривиальных, $y_1 = 1$, $y_2 = x$, а затем по формулам (16) построена функция Грина

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(\xi - 1), & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1, \\ \xi(x - 1), & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{19}$$

которая точно совпадает с её аналитическим видом [3].

2. При коэффициентах-функциях, равных $PP(x) = 1$, $QQ(x) = k^2$ ($k = \mathrm{const}$), уравнение (1) имеет вид

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0, \tag{20}$$

которое, как и уравнение (18), также не имеет особых точек. Для граничных условий $a = 0$, $b = 1$ получаем два линейно независимых решения в виде рядов до степени $n = 7$:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1}{24}k^4x^4 - \frac{1}{720}k^6x^6, \\ y_2(x) &= x - \frac{1}{6}k^2x^3 + \frac{1}{120}k^4x^5 - \frac{1}{5040}k^6x^7, \end{aligned} \tag{21}$$

с помощью которых находим функцию Грина в виде степенных рядов:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} Green\_L, & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1, \\ Green\_R, & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered} Green\_L = x(-5040 + 840k^2x^2 - 42k^4x^4 + k^6x^6)(-3628800 - 30240k^4 + 1814400k^2\xi^2 - \\ - 151200k^4\xi^4 + 5040k^6\xi^6 - 604800k^2\xi^3 + 30240k^4\xi^5 - 720k^6\xi^7 - 302400k^4\xi^2 + \\ + 25200k^6\xi^4 + 720k^6 + 3628800\xi - 840k^8\xi^6 + 15120k^6\xi^2 - 1260k^8\xi^4 + 42k^10\xi^6 - 360k^8\xi^2 + \\ + 30k^{10}\xi^4 - k^{12}\xi^6 - 1814400k^2\xi + 302400k^4\xi^3 - 15120k^6\xi^5 + 360k^8\xi^7 + 151200k^4\xi - \\ - 25200k^6\xi^3 + 1260k^8\xi^5 - 30k^{10}\xi^7 - 5040k^6\xi + 840k^8\xi^3 - 42k^{10}\xi^5 + k^{12}\xi^7 + 604800k^2)/ \\ (3628800(-5040 - 42k^4 + k^6 + 840k^2)), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Green\_R = \xi(-3628800 + 1814400k^2x^2 - 1814400k^2x - 151200k^4x^4 + 302400k^4x^3 - \\ - 302400k^4x^2 - 30240k^4 + 720k^6 - 720k^6x^7 + 5040k^6x^6 - 15120k^6x^5 + 25200k^6x^4 + \\ + 3628800x + 604800k^2 - 604800k^2x^3 + 30240k^4x^5 - 840k^8x^6 + 360k^8x^7 + 15120k^6x^2 - \\ - 1260k^8x^4 - 360k^8x^2 + 30k^{10}x^4 + 151200k^4x - 25200k^6x^3 + 1260k^8x^5 - 5040k^6x + 840k^8x^3 - \end{gathered}$$

$$-42k^{10}x^5+42k^10x^6-k^{12}x^6-30k^{10}x^7+k^{12}x^7)(-5040+840k^2\xi^2-42k^4\xi^4+k^6\xi^6)/ (3628800(-5040-42k^4+k^6+840k^2)).$$

Вычисленная функция Грина в виде ряда (22) совпадает с разложением точной функции Грина [3]

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin(k(\xi-1))\cdot\sin(kx)}{k\cdot\sin(k)}, & 0\leqslant x\leqslant\xi\leqslant 1,\\ \dfrac{\sin(k(x-1))\cdot\sin(k\xi)}{k\cdot\sin(k)}, & 0\leqslant\xi\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

в степенной ряд до той же степени n.

3. Для дифференциального уравнения

$$y''(x)+y(x)=0, \tag{23}$$

с граничными условиями $a=0$, $b=1$ были получены следующие два линейно независимых решения в виде рядов до степени $n=7$:

$$y_1(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6,\quad y_2(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7 \tag{24}$$

и построена функция Грина

$$G(x,\xi)=\begin{cases}Green\_L, & 0\leqslant x\leqslant\xi\leqslant 1,\\ Green\_R, & 0\leqslant\xi\leqslant x\leqslant 1,\end{cases} \tag{25}$$

где

$$Green\_L=x(-5040+840x^2-42x^4+x^6)(3053520-1526760\xi^2+127230\xi^4- -4241\xi^6-1960560\xi+326760\xi^3-16338\xi^5+389\xi^7)/15389740800,$$

$$Green\_R=\xi(3053520-1526760x^2+127230x^4-4241x^6-1960560x+326760x^3- -16338x^5+389\xi^7)(-5040+840\xi^2-42\xi^4+\xi^6)/15389740800.$$

4. Если коэффициенты-функции имеют значения $PP(x)=x$, $QQ(x)=-m^2/x$, $m=0,1,2,3,\ldots$, то уравнение (1) является уравнением Бесселя m-го порядка

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)-\frac{m^2}{x^2}y(x)=0, \tag{26}$$

которое имеет особую регулярную точку $x_0=0$ на левом конце отрезка $[0,1]$. При граничных условиях (2), для которых решение уравнения (26) ограничено в точке $a=0$ и равно нулю при $b=1$, с помощью разработанной программы получено общее решение (14), где $y_1=x^{-m}$, $y_2=x^m$.

Затем по формуле (16) построена функция Грина:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}x^m(\xi^m-\xi^{-m})/2m, & 0\leqslant x\leqslant\xi\leqslant 1,\\ \xi^m(x^m-x^{-m})/2m, & 0\leqslant\xi\leqslant x\leqslant 1,\end{cases} \tag{27}$$

которая совпадает с известным аналитическим выражением [9].

5. Для дифференциального уравнения

$$y''(x) = 0 \tag{28}$$

с граничными условиями $a = 0$, $b = \pi/2$ с помощью разработанной программы найдены два линейно независимых решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$ и построена функция Грина

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(2\xi - \pi)/\pi, & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant \pi/2, \\ \xi(2x - \pi)/\pi, & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant \pi/2, \end{cases} \tag{29}$$

которая точно совпадает с её аналитическим видом [3].

6. Как известно [1–3], решение неоднородного дифференциального уравнения $L(y) \equiv f(x)$ с граничными условиями (2) при помощи функции Грина можно найти в виде следующего интеграла

$$y(x) = \int\limits_a^b f(\xi) G(x,\xi) d\xi. \tag{30}$$

В качестве примера найдём решение следующего неоднородного дифференциального уравнения

$$y''(x) - y(x) = x, \tag{31}$$

с однородными краевыми условиями $y(0) = y(1) = 0$. Соответствующее однородное дифференциальное уравнение с теми же краевыми условиями имеет точную функцию Грина [3] в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(x)\cdot\sinh(\xi - 1)}{\sinh(1)}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1, \\ \dfrac{\sinh(\xi)\cdot\sinh(x - 1)}{\sinh(1)}, & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{32}$$

С помощью разработанной программы найдены два линейно независимых решения в виде рядов до степени $n = 10$:

$$\begin{gathered} y_1 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{3628800}x^{10}, \\ y_2 = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 \end{gathered} \tag{33}$$

и в этом приближении по общим формулам (16) получена функция Грина

$$G(x,\xi) = \begin{cases} Green\_L, & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1, \\ Green\_R, & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{34}$$

где

$$\begin{gathered} Green\_L = -x(362880 + 60480x^2 + 3024x^4 + 72x^6 + x^8)(1547527161600 + \\ + 773763580800\xi^2 + 64480298400\xi^4 + 2149343280\xi^6 + 38381130\xi^8 + 426457\xi^{10} - \\ - 2031957809280\xi - 338659634880\xi^3 - 16932981744\xi^5 - 403166232\xi^7 - 5599531\xi^9)/ \\ 561566656401408000, \end{gathered}$$

$$Green\_R = -\xi(1547527161600 + 773763580800x^2 + 64480298400x^4 +$$

$$+ 2149343280x^6 + 38381130x^8 + 426457x^{10} - 2031957809280x - 338659634880x^3 - \\ - 16932981744x^5 - 403166232x^7 - 5599531x^9)(362880 + 60480\xi^2 + 3024\xi^4 + 72\xi^6 + \xi^8)/ \\ 561566656401408000.$$

Проведённые расчёты показывают, что максимальная относительная погрешность вычисленной функции Грина по отношению к точной составляет менее 9%, 0.000035%, $8 \cdot 10^{-11}$% при $n = 3, 10, 15$, соответственно.

Решение неоднородного дифференциального уравнения (31) с однородными краевыми условиями согласно формуле (30) в виде обрезанного степенного ряда до степени $n = 10$ равно

$$y(x) = -0.149081864449 \cdot x + 0.141819689258 \cdot x^3 + 0.007090984462 \cdot x^5 + \\ + 0.000168832963 \cdot x^7 + 0.234490226948 \cdot 10^{-5} \cdot x^9. \quad (35)$$

Вычисленная функция Грина (35) и разложение в степенной ряд точной функции Грина

$$y(x)_{theor} = \sinh(x)/\sinh(1) - x = \\ = -0.149081871760 \cdot x + 0.141819688039 \cdot x^3 + 0.007090984401 \cdot x^5 + \\ + 0.000168832961 \cdot x^7 + 0.234490224933 \cdot 10^{-5} \cdot x^9, \quad (36)$$

полностью совпадают с точностью до 8-го знака после десятичной запятой.

Заметим, что с помощью разработанной программы можно построить функцию Грина и в случае неоднородных краевых условий первого рода

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (37)$$

В самом деле, если дифференциальное уравнение задано в виде (1) с краевыми условиями (2), то, введя новую неизвестную функцию $z(x)$ вместо $y(x)$ согласно соотношению

$$z(x) = y(x) - \left(\frac{B-A}{b-a}\right)(x-a), \quad (38)$$

исходное уравнение (1) можно записать в виде следующего неоднородного уравнения

$$PP(x) \cdot z''(x) + PP'(x) \cdot z'(x) + QQ(x) \cdot z(x) = f(x), \quad (39)$$

где

$$f(x) = -\left(\frac{B-A}{b-a}\right) \cdot PP'(x) - QQ(x) \cdot \left(A + \left(\frac{B-A}{b-a}\right)(x-a)\right),$$

но тогда функция Грина вычисляется для уравнения (39) без правой части с однородными краевыми условиями $z(a) = 0$, $z(b) = 0$.

5. Заключение

В данной работе представлен алгоритм и программа символьно-численного построения функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений II порядка, которые могут содержать регулярные особые точки, в общем, в виде обобщённых степенных рядов с произвольным числом членов, число которых регулирует точность вычисления функции Грина. На приведённых примерах показано или полное совпадение вычисленной и теоретической, или хорошее их согласие даже при небольшом числе членов степенного ряда, представляющего функцию Грина. Отметим, что с помощью функции Грина достаточно просто найти решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, что иллюстрируется соответствующим примером.

Литература

1. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1962. [*Trikomi F.* Differencialjnihe uravneniya. — M.: IL, 1962.]
2. *Сансоне Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1953. [*Sansone D.* Obihknovennihe differencialjnihe uravneniya. — M.: IL, 1953.]
3. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. [*Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I.* Integraljnihe uravneniya. — M.: Nauka, 1975.]
4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. — Л.: Физматгиз, 1962. [*Kantorovich L. V., Krihlov V. I.* Priblizhennihe metodih vihsshego analiza. — L.: Fizmatgiz, 1962.]
5. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Наука, 1987. [*Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobeljkov G. M.* Chislennihe metodih. — M.: Nauka, 1987.]
6. *Дэвенпорт Д., Сирэ И., Турнье Э.* Компьютерная алгебра. — М.: Мир, 1991. [*Dehvenport D., Sireh I., Turnje Eh.* Kompjyuternaya algebra. — M.: Mir, 1991.]
7. Управляющие структуры и структуры данных в Maple / А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, Н. М. Добровольский, Ю. М. Мартынюк. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2007. [Upravlyayuthie strukturih i strukturih dannihkh v Maple / A. R. Esayan, V. N. Chubarikov, N. M. Dobrovoljskiyj, Yu. M. Martihnyuk. — Tula: Izd-vo Tul. gos. ped. un-ta im. L. N. Tolstogo, 2007.]
8. *Беляева И. Н., Чеканов Н. А.* Программа построения функции Грина для дифференциального уравнения второго порядка. Свидетельство о государственной регистрации для ЭВМ №2011616934. — 2011. [*Belyaeva I. N., Chekanov N. A.* Programma postroeniya funkcii Grina dlya differencialjnogo uravneniya vtorogo poryadka. Svideteljstvo o gosudarstvennoyj registracii dlya EhVM №2011616934. — 2011.]
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968. [*Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnihkh rabotnikov i inzhenerov. — M.: Nauka, 1968.]

UDC 519.711.3; 517.958

Algorithm of Symbolic-Numeric Calculation Green Function for Differential Equations of Second Order

I. N. Belyaeva*, **E. V. Bogachev**†, **N. A. Chekanov**†

* *Department of Informatics and Computational Technique*
National Research University "Belgorod State University"
Pobedy 85, Belgorod, Russia, 308015

† *Department of Applied Mathematics and Mechanics*
National Research University "Belgorod State University"
Studencheskaya 14, Belgorod, Russia, 308007

We develop algorithm and program of the symbolic-numeric construction of the Green function, in general, in the form of generalized power series for the ordinary differential equation of the second order with the first type boundary conditions that could consist the specific regular points. Examples of constructing the Green function for some boundary problems are given that show the efficiency of the developed program.

Key words and phrases: ordinary differential equations, the Green function, symbolic-numeric calculations.