УДК 517. 437.078

О регулярных и сингулярных возмущенных модельных системах ОДУ полиномиального типа с особенностями

Ю. А. Коняев, В. Б. Мергия, Нгуен Вьет Хоа

Кафедра высшей математики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

С помощью метода аналогий исследована структура решений некоторых регулярных и сингулярных возмущенных модельных систем ОДУ, включая задачи со степенным погранслоем.

Ключевые слова: метод аналогий, метод расщепления, регулярные и сингулярных возмущенные задачи для модельных неавтономных систем ОДУ с особенностями.

1. Введение

В данной статье с помощью метода аналогий и одного из последних вариантов метода расщепления изучена структура решения некоторых классов регулярных и сингулярных возмущенных задач для модельных систем полиномиального типа, включая сингулярные возмущенные задачи со степенных погранслоем, для которых построено точное решение.

2. Регулярные и сингулярные возмущенные модельные системы ОДУ полиномиального типа с особенностями

Решается задача анализа поведения решения регулярных и сингулярных возмущенных задач для систем ОДУ полиномиального типа

$$t\dot{x} = A(t)x, \quad x(0,\varepsilon) = x^0, \quad t \in [0,1]; \quad \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

$$\varepsilon t\dot{x} = A(t)x, \quad x(0,\varepsilon) = x^0, \quad t \in [0,1]; \quad \in \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

включая сингулярные возмущенные задачи со степенным погранслоем

$$(t+\varepsilon)\dot{x} = A(t)x, \quad x(0,\varepsilon) = x^0, \quad t \in [0,1]; \quad \in \mathbf{R}^n, \tag{3}$$

где $A(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ — матричный ряд, который сходится абсолютно и равномерно по некоторой норме при $|t| < 1 + 2\delta$. В работах [1–3] применялись различные аналитические и асимптотические методы. В данной статье системы (1)–(3) исследованы с помощью метода аналогий и одного из последних вариантов метода расщепления [4–6].

Следуя методу расщепления, были разработаны различные видоизменённые его редакции, что позволило учетом с специфики поставленных в работе задач (1)–(3), получить конструктивный алгоритм для их решения, включая сингулярные возмущенные задачи (2) и (3). Термин сингулярность здесь означает, что предельная ($\varepsilon = 0$) алгебраическая задача в общем случае может не удовлетворить начальному условию.

Метод аналогий бывает весьма полезен для анализа самых различных задач, и в данном случае (после соответствующего обоснования) он позволил получить ряд нетривиальных результатов [4, 6], что дополняет или уточняет известные результаты [1–3].

Статья поступила в редакцию 6 марта 2012 г.

Теорема 1. *Для систем с простой особенностью* (1) *в случае, если спектр* $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ *матрицы* A_0 *удовлетворяет условию*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{oj} - \lambda_{0k} \neq 0, \pm 1 \ \pm 2, ..., \quad (j \neq k, \quad j, k = \overline{1, n}),$$

существует невырожденное и аналитическое при $|t| < 1 + \delta$ *преобразование*

$$x = P(t)z; \quad P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k t^k, \tag{4}$$

приводящее систему (1) *к виду* $t\dot{z} = A_0 z$*, имеющему явное решение* $(A_0 \sim \Lambda_0)$.

Доказательство. Существование аналитической замены (4) доказано в работах [1,5]. Мы приведем конструктивный вариант построения соответствующего преобразования [5], используя конструктивный аппарат метода расщепления [4,5]. После невырожденной замены

$$x = S_0 y; \quad (S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = \mathrm{diag}\{\lambda_{01}, ..., \lambda_{0n}\})$$

от системы (1) перейдем к системе:

$$t\dot{y} = B(t)y; \quad B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k; \quad |t| < 1 + \delta \quad (B_0 = \Lambda_0)$$

и далее с помощью невырожденного при $|t| < 1 + \delta$ преобразования

$$y = H(t)z; \quad (H(t) = E + \sum H_k t^k; \quad \delta > 0)$$

получим нужный результат

$$t\dot{z} = \Lambda_0 z,$$

если матрицы $B(t), H(t)$ и Λ_0 связаны соотношением

$$t\dot{H} = B(t)H(t) - H(t)\Lambda_0. \tag{5}$$

Приравнивая в (5) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим набор однотипных алгебраических матричных уравнений для однозначного определения каждого $H_k \quad k \geqslant 1$:

$$\Lambda_0 H_0 - H_k \Lambda_0 = k H_k - P_k; \quad (k \geqslant 1); \quad P_1 = B_1, \tag{6}$$

$P_k = B_k + \sum\limits_{j=1}^{k-1} B_j H_{k-j}$.

Следуя методу расщепления для удобства дальнейшего изложения для произвольной квадратной матрицы $A = \{a_{jk}\}_1^n$ введем специальные обозначения для её диагональной $\overline{A} = \mathrm{diag}\{a_{11}, ..., a_{nn}\}$ и бездиагональной частей $\overline{\overline{A}} = A - \overline{A}$.

Из уравнения (6) сразу имеем $\overline{H}_k = \frac{P_k}{k}$ (с учетом $H_k = \{h_{ijk}\}$) $\quad \{P_k = p_{ijk}\}$ $h_{ijk} = \frac{P_{ijk}}{(k - \sigma_{ij})}$. $\quad (j \neq k)$, что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Сингулярная возмущенная система с простой особенностью вида* (2) *в случае, если спектр* $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ *матрицы* A_0 *удовлетворяет условию*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \geqslant \sigma_0 > 0, \quad (j \neq k, \quad j, k = \overline{1, n}),$$

может быть с помощью невырожденного при достаточно малых t преобразованиях

$$x = S_0 \left(E + \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{H}}_k(\varepsilon)t^k \right) = S_0 H(t,\varepsilon); \quad (S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = \mathrm{diag}\{\lambda_{01}, ..., \lambda_{0n}\})$$

приведена к системе с почти диагональной матрицей

$$\varepsilon t \dot{z} = \sum_{k=0}^{N} \Lambda_k t^k + \underline{0}(t^{N+1}) z = Q(t)z. \tag{7}$$

Доказательство. После замены $x = S_0 y$, система (2) приводится к виду

$$\varepsilon t \dot{y} = B(t)y; \quad B(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k t^k; \quad B_0 = \Lambda_0.$$

Последующее невырожденное при достаточно малых $|t| < 1$ и $|\varepsilon| < \frac{\sigma_0}{N}$ преобразование

$$y = H(t,\varepsilon)z; \quad H(t,\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{N} \overline{\overline{H}}_k(\varepsilon)t^k$$

приведет к нужному результату (7), если матрицы $B(t)$, $H(t,\varepsilon)$ и $Q(t)$ удовлетворяют соотношению

$$\varepsilon t \dot{H} = B(t)H - Q(t). \tag{8}$$

Приравнивая в (8) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим набор однотипных матричных уравнений для однозначного определения всех диагональных Λ_k и бездиагональных $\overline{\overline{H}}_k(\varepsilon)$ $(k = \overline{1,N})$ матриц:

$$\Lambda_0 \overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k \Lambda_0 = \varepsilon k \overline{\overline{H}}_k - P_k(t)\Lambda_k \quad (k = \overline{1,N}) \quad P_1 = B_1, \tag{9}$$

$P_k = B_k + \sum\limits_{j=1}^{k-1} (B_j H_{k-j}(\varepsilon) - H_{k-j}(\varepsilon)\Lambda_j(\varepsilon))$. При этом из уравнения (9) матрицы $\Lambda_k(\varepsilon) = \overline{P}_k(\varepsilon)$ и $\overline{\overline{H}}_k(\varepsilon)$ $(k = \overline{1,n})$ определяются единственным образом с учетом того, что: $\overline{\overline{H}}_k(\varepsilon) = \{h_{ijk}(\varepsilon)\}$, $\overline{\overline{P}}_k(\varepsilon) = \{p_{ijk}(\varepsilon)\}$; $h_{ijk}(\varepsilon) = -p_{ijk}(\varepsilon)(\sigma_{ij} - \varepsilon k)$, что и требовалось доказать. □

Замечание 1. Результаты теоремы 2 (в отличие от теоремы 1) носят асимптотический характер. Для сингулярных возмущенных задач (3) в работе [3] было построено асимптотическое решение задачи Коши, содержащее особенности в окрестности t=0 в виде так называемого «степенного погранслоя». Ниже мы приведем алгоритм построения точного решения задачи Коши для системы (3).

Теорема 3. *Сингулярная возмущенная начальная задача* (3) *в случае, если спектр* $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ *матрицы* A_0 *удовлетворяет условию*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{oj} - \lambda_{0k} \neq 0, \pm 1 \pm 2, ..., \quad \mathrm{Re}\,\lambda_{0j} \leqslant 0; \quad (j \neq k, \quad j,k = \overline{1,n}),$$

может быть с помощью невырожденного при достаточно малых $|t| < 1 + \delta$, *и* $|\varepsilon| < \delta$

$$x = S(\varepsilon)H(t+\varepsilon,\varepsilon)z; \quad S^{-1}(\varepsilon)A(-\varepsilon)S(\varepsilon) = A_0(\varepsilon) = \mathrm{diag}\{\lambda_{01}(\varepsilon), ..., \lambda_{0k}(\varepsilon)\}$$

$$H(t+\varepsilon,\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(\varepsilon)(t+\varepsilon)^k$$

приведено к виду

$$(t+\varepsilon)\dot z = \Lambda_0(\varepsilon)z.$$

При этом точное решение задачи Коши $x(0,\varepsilon) = x^0$ (3) *может быть представлено в виде*

$$x(t,\varepsilon) = S(\varepsilon)H(t+\varepsilon,\varepsilon)\left(1+\frac{t}{\varepsilon}\right)^{\Lambda_0(\varepsilon)} H^{-1}(\varepsilon,\varepsilon)S^{-1}(\varepsilon)X^0, \tag{10}$$

где структура матричной функции $\left(1+\frac{t}{\varepsilon}\right)^{\Lambda_0(\varepsilon)}$ *отражает в случае* $\operatorname{Re}\lambda_{0j} \leqslant 0$*;* $j,k=\overline{1,n}$, *наличие степенного погранслоя в точке* $t=0$.

Доказательство. С учетом обозначения $\tau = t+\varepsilon$ система (3) преобразуется к виду

$$\tau\dot x = A(\tau-\varepsilon)x = A(\tau,\varepsilon)x, \tag{11}$$

где ряд $A(\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(\varepsilon)\tau^k$ в условиях теоремы (3) будет сходиться при $|t| < 1+\delta$, и $|\varepsilon| < \delta$ и все матричные функции $A_k(\varepsilon)$ будут аналитическими при $|\varepsilon| < \delta$.

Используя конструктивный (здесь обозначено $A_0(\varepsilon)A(-\varepsilon)$) аналог алгоритма метода расщепления [5], построим матричную функцию $S(\varepsilon)$ такую, что замена $x = S(\varepsilon)y$ приводит систему (11) к виду

$$\tau\dot y = B(\tau,\varepsilon)y; \quad B(\tau,\varepsilon)x = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(\varepsilon)\tau^k; \quad B_0(\varepsilon) = \Lambda_0(\varepsilon). \tag{12}$$

В силу теоремы 1 может быть построено невырожденное при $|t| < 1+\delta$ преобразование $y = \left(E + \sum\limits_{k=1}^{\infty} H_k(\varepsilon)\tau^k\right) z = H(\tau,\varepsilon)z$, позволяющее привести систему (12) к виду

$$\tau\dot z = \Lambda_0(\varepsilon)z,$$

решение которой имеет вид $z(\tau,\varepsilon) = \tau^{\Lambda_0\varepsilon} = (t+\varepsilon)^{\Lambda_0\varepsilon}C(\varepsilon)$. С учетом произведенных замен решение исходной задачи (11), эквивалентной ей задачи (3), может быть записано в виде $x = S(\varepsilon)H(t+\varepsilon,\varepsilon)(t+\varepsilon)^{\Lambda_0\varepsilon}C(\varepsilon)$, где с учетом начального условия $x = (0,\varepsilon) = x^0$ постоянный вектор $C(\varepsilon)$ определяется однозначно, что и приводит к нужному результату (10). □

Замечание 2. Если в условии теоремы 3 спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ матрицы A_0 удовлетворяет неравенствам:

$$\operatorname{Re}\lambda_{0j} < 0; \quad j=\overline{1,p}; \quad \operatorname{Re}\lambda_{0k} \geqslant 0; \quad (k = p+\overline{1,n}),$$

то при некоторых дополнительных условиях может быть построено решение краевой задачи для системы (3):

$$F_1(x)(0,\varepsilon) + F_2(1,\varepsilon) = \alpha.$$

3. Заключение

В данной работе, используя различные вариации метода расщепления [4–6], показана (и обоснована) эффективность метода аналогий при исследовании некоторых регулярных и сингулярных возмущенных задач для неавтономных систем ОДУ полиномиального типа.

Подобная методика проведения учебных и научно-исследовательских работ может быть весьма полезна на физико-математических и инженерных факультетах.

С помощью метода аналогии (после строгого обоснования) был доказан ряд нетривиальных теорем и построено точное решение сингулярной возмущенной задачи Коши со степенным погранслоем, что дополняет или уточняет известные ранее результаты [1–3, 5, 6].

Литература

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений ОДУ. — М., 1998. — 464 с. [*Vazov V.* Asimptoticheskie razlozheniya resheniyj ODU. — M., 1998. — 464 s.]
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с. [*Khartman F.* Obihknovennihe differencialjnihe uravneniya. — M.: Mir, 1970. — 720 s.]
3. *Ломов С. А.* Степенной погранслой в задачах с сингулярным возмущением // Изв. АН СССР. Сер. математ. — 1968. — № 3. — С. 525–572. [*Lomov S. A.* Stepennoyj pogransloyj v zadachakh s singulyarnihm vozmutheniem // Izv. AN SSSR. Ser. matemat. — 1968. — No 3. — S. 525–572.]
4. *Коняев Ю. А.* Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений // Математический сборник. — 1993. — Т. 184, № 12. — С. 133–144. [*Konyaev Yu. A.* Ob odnom metode issledovaniya nekotorihkh zadach teorii vozmutheniyj // Matematicheskiyj sbornik. — 1993. — T. 184, No 12. — S. 133–144.]
5. *Коняев Ю. А.* О некоторых методах исследования устойчивости // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 3. — С. 65–82. [*Konyaev Yu. A.* O nekotorihkh metodakh issledovaniya ustoyjchivosti // Matematicheskiyj sbornik. — 2001. — T. 192, No 3. — S. 65–82.]
6. *Коняев Ю. А.* Асимптотические и аналитические методы решения некоторых классов прикладных модельных задач. — М., 2005. — 160 с. [*Konyaev Yu. A.* Asimptoticheskie i analiticheskie metodih resheniya nekotorihkh klassov prikladnihkh modeljnihkh zadach. — M., 2005. — 160 s.]

UDC 517. 437.078

About Regular and Singular Perturbation System of ODE Polynomial Type with Singularity

Yu. A. Konyaev, W. B. Mergia, Nguyen Viet Khoa

Department of Mathematics
People's Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

Using the anagy method we study the structure of solutions to some regugar and singular perturbed model systems of ODE, the problems with power behavior of boundary layer being included.

Key words and phrases: regular, singular, perturbation, non-autonomous model, splitting method, analogy method system of ODE.