УДК 517.977.54

Задачи стабилизации и оптимальной стабилизации нелинейных управляемых систем

А. В. Щенников, В. Н. Щенников, Ю. Ю. Вагапова

ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» ул. Большевистская, д. 68, г. Саранск, Республика Мордовия, Россия, 430005

Решаются задачи стабилизации и оптимальной стабилизации в постановке В. В. Румянцева относительно части переменных применительно к нелинейным управляемым системам.

Ключевые слова: оптимальная стабилизация, дополнительные силы, функционал качества управления.

Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущённого движения

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x). \tag{1}$$

Пусть система задана в области

$$\Omega = \{t, x : t \geqslant t_0,\ \|x\| < H,\ 0 < H = \mathrm{const}\}, \tag{2}$$

где норма вектора $x = (x_1, ..., x_n)^T$ евклидова, $f(t, x) \in C^{(0,1)}_{t,x}$, $f(t, 0) = 0$. Предположим, что для системы (1) существует однозначная функция $V(t, x) \in C^{(1,1)}_{t,x}(\Omega)$, допускающая бесконечно малый высший предел, полная производная которой по времени t на решениях системы (1), т.е.

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\mathrm{grad}_x V(t, x), f(t, x))) \equiv -W(t, x),$$

является определённо-отрицательной или знакопостоянной отрицательной функцией. Указанные выше условия гарантируют либо асимптотическую устойчивость, либо устойчивость положения равновесия $x = 0$ системы (1) [1].

Рассмотрим далее возмущённую систему

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x) + f_1(t, x)u \tag{3}$$

по отношению к системе (1). Здесь $f_1(t, x)u$ является вектором дополнительных сил, вектор управляющих воздействий $u(t, x) = (u_1(t, x), ..., u_r(t, x))^T$, $r \leqslant n$, определён и непрерывен в области (2), $u(t, 0) \equiv 0$. Будем считать, что правая часть системы (3) в области (2) удовлетворяет некоторым условиям существования и единственности решений, кроме того, $f_1(t, 0, 0) \equiv 0$.

Во многих случаях приложением к системе (1) дополнительных сил $f_1(t, x)u$ положение равновесия системы (3) $x = 0$ удаётся сделать асимптотически устойчивым и при этом функционал

$$J = \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega(t, x[t], u[t])\mathrm{d}t \tag{4}$$

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2012 г.

принимает наименьшее значение. Здесь символ $u[t]$ означает величину управляющего воздействия $u[t] = u(t, x[t])$, реализующегося в системе (3) при $u = u(t, x)$ и являющегося, следовательно, функцией времени, а символ $x[t]$ означает движение системы (3), порождающегося управлением $u = u[t]$.

В. В. Румянцев в работе [2] сформулировал применительно к системе (3) и функционалу (4) задачу об оптимальной стабилизации устойчивого движения дополнительными силами, т.е. $f_1(t, x)u$, при условии минимизации интегрального функционала качества управления (4) и дал её решение. В процессе решения задачи об оптимальной стабилизации были найдены оптимальные управления и подынтегральная функция в критерии качества управления. При этом известная функция Ляпунова для системы без управления является оптимальной функцией Ляпунова той же системы, но при действии дополнительных сил. Указанная задача решена относительно всех фазовых переменных. Помимо этого В. В. Румянцев в этой работе [2] сформулировал и доказал аналог теоремы об оптимальной стабилизации Н. Н. Красовского относительно части фазовых переменных.

В данной работе используются основные идеи решения задачи об оптимальной стабилизации в смысле В.В. Румянцева [2, 3].

1. Задача

Решить задачу об оптимальной стабилизации в постановке В.В. Румянцева [2, 3] относительно части переменных, но без предположения о существовании функции Ляпунова для системы (1), решающей вопрос об асимптотической устойчивости её положения равновесия относительно части переменных.

2. Решение задачи

Будем решать задачу в два этапа, т.е. на уровне подсистем (на локальном уровне) и на уровне исходной системы (на глобальном уровне) [4, 5].

Этап 1. Предположим, что система (3) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= Y(t, y, z) + b_1(t, y, z)u^{(1)}, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= Z(t, y, z) + b_2(t, y, z)u^{(2)}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $y = (x_1, ..., x_k)^T$, $z = (x_{k+1}, ..., x_n)^T$, $b_1(t, y, z)$ и $b_2(t, y, z)$ — матрицы размерности соответственно $k \times r_1$ и $(n-k) \times r_2$, $u = ({u^{(1)}}^T, {u^{(2)}}^T)^T$ — m-мерный вектор управляющих воздействий, $r_1 + r_2 = m \leqslant n$. Здесь $u^{(1)}$ — r_1-мерный вектор, $u^{(2)}$ — r_2-мерный вектор, $r_1 \leqslant k$, $r_2 \leqslant n - k$. Верхний индекс ^{T} означает транспонирование. Будем считать, что система (5) определена в области

$$t \geqslant t_0, \quad \|y\| \leqslant H, \quad \|z\| < \infty, \tag{5_1}$$

и правая часть системы (5) в области (5_1) удовлетворяет некоторым условиям существования и единственности решений, кроме того, $b_1(t, 0, 0) \equiv 0$, $b_2(t, 0, 0) \equiv 0$. Представим вектор управляющих воздействий в виде

$$u^{(1)} = u^{(1)}_\Lambda + u^{(1)}_\Gamma, \quad u^{(2)} = u^{(2)}_\Lambda + u^{(2)}_\Gamma.$$

Тогда окончательно система (5) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= Y(t,y,z) + b_1(t,y,z)(u_\Lambda^{(1)} + u_\Gamma^{(1)}), \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= Z(t,y,z) + b_2(t,y,z)(u_\Lambda^{(2)} + u_\Gamma^{(2)}). \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим далее систему

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= Y(t,y,z) + b_1(t,y,z)u_\Lambda^{(1)}, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= Z(t,y,z) + b_2(t,y,z)u_\Lambda^{(2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть имеем некоторую функцию Ляпунова $V_1(t,y,z) \in C_{t,y,z}^{(1,1,1)}$ в области (5_1), удовлетворяющую условию

$$a(\|y\|) \leqslant V_1(t,y,z) \leqslant b(\|y\|), \tag{8}$$

где $a(\|y\|)$ и $b(\|y\|)$ являются функциями Хана [3]. Найдём

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}V_1(t,y,z)}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)} = \frac{\partial V_1}{\partial t} + (\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z), Y(t,y,z) + b_1(t,y,z)u_\Lambda^{(1)}) + \\ + (\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z), Z(t,y,z) + b_2(t,y,z)u_\Lambda^{(2)}), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z) = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial V_1}{\partial x_k}\right)$, $\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z) = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_{k+1}}, ..., \frac{\partial V_1}{\partial x_n}\right)$. Обозначим

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + (\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z), Y(t,y,z)) + (\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z), Z(t,y,z)) = W_1(t,y,z),$$

Тогда окончательно выражение (9) примет вид

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}V_1(t,y,z)}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)} = W_1(t,y,z) + (\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z), b_1(t,y,z)u_\Lambda^{(1)}) + \\ + (\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z), b_2(t,y,z)u_\Lambda^{(2)}). \end{aligned} \tag{10}$$

Выберем для системы (7) стабилизирующее управление $u_\Lambda = \left(\left(u_\Lambda^{(1)}\right)^T, \left(u_\Lambda^{(2)}\right)^T\right)^T$ относительно фазовых переменных $x_1, .., x_k$ (y — стабилизирующее управление) в виде

$$\begin{aligned} u_\Lambda^{(1)} &= \left[-\frac{c(\|y\|) + P_1(t,y,z)}{(\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z), b_1(t,y,z))^2} E_1 + N_1(t,y,z)\right] (\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z), b_1(t,y,z)), \\ u_\Lambda^{(2)} &= \left[-\frac{c(\|y\|) + P_2(t,y,z)}{(\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z), b_2(t,y,z))^2} E_2 + N_2(t,y,z)\right] (\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z), b_2(t,y,z)), \end{aligned} \tag{11}$$

определённые в области (5_1). Здесь E_1 и E_2 — единичные матрицы размерности соответственно $r_1 \times r_1$, $r_2 \times r_2$, $P_1(z,y,t) = (\mathrm{grad}_y V_1(t,y), Y(t,y,z))$, $P_2(z,y,t) = (\mathrm{grad}_z V_1(t,y), Z(t,y,z))$, $N_1(t,y,z)$ и $N_2(t,y,z)$ — матрицы размерности соответственно $r_1 \times r_1$ и $r_2 \times r_2$, удовлетворяющие условию

$$(\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z))(b_1^T(t,y,z)N_1 b_1(t,y,z))(\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z))^T+$$
$$+(\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z))(b_2^T(t,y,z)N_2 b_2(t,y,z))(\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z))^T=(-1+\rho)c(\|y\|),$$

где $c(\|y\|)$ – определённо-положительная функция.

Следовательно, при $\rho<1$ система (7) становится асимптотически y-устойчивой.

Этап 2. Итак, пусть $\rho<1$. На этом этапе будем решать задачу оптимальной y-стабилизации применительно к системе (3) с учётом выбранных управлений $u_\Lambda^{(1)}$ и $u_\Lambda^{(2)}$ в виде (11) и функционала

$$I[u]=\int\limits_{t_0}^{\infty}\omega(t,y,z,u_\Gamma), \tag{12}$$

где $u_\Gamma=\left(\left(u_\Gamma^{(1)}\right)^T,\left(u_\Gamma^{(2)}\right)^T\right)^T$.

В процессе решения указанной задачи найдём $\omega(t,y,z,u_\Gamma)$.

Перепишем далее систему (3) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=F_1(t,y,z,u_\Lambda^{(1)})+b_1(t,y,z)u_\Gamma^{(1)},\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=F_2(t,y,z,u_\Lambda^{(1)})+b_2(t,y,z)u_\Gamma^{(2)}.\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь

$$F_1(t,y,z,u_\Lambda^{(1)})=Y(t,y,z)+b_1(t,y,z)u_\Lambda^{(1)}=Y(t,y,z)+b_1(t,y,z)\times$$
$$\times[-\frac{c(\|y\|)+P_1(t,y,z)}{(\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z),b_1(t,y,z))^2}E_1+N_1(t,y,z)](\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z),b_1(t,y,z)),$$

$$F_2(t,y,z,u_\Lambda^{(2)})=Z(t,y,z)+b_2(t,y,z)u_\Lambda^{(2)}=Z(t,y,z)+b_2(t,y,z)\times$$
$$\times[-\frac{c(\|y\|)+P_2(t,y,z)}{(\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z),b_2(t,y,z))^2}E_2+N_2(t,y,z)](\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z),b_2(t,y,z)).$$

В качестве функции $\omega(t,y,z,u_\Gamma)$ выберем функцию вида [3]

$$\omega(t,y,z,u_\Gamma)=F(t,y,z)+u_\Gamma^T\beta u_\Gamma, \tag{14}$$

где $\beta=\begin{pmatrix}\beta_1 & 0\\ 0 & \beta_2\end{pmatrix}$, β_1 и β_2 – определённо-положительные симметрические матрицы соответственно порядка $r_1\times r_1$ и $r_2\times r_2$, а $F(t,y,z)$ – определённо-положительная функция, которую определим позднее. Тогда в соответствии с теоремой об оптимальной y-стабилизации [2, 3] выпишем функцию

$$B[V_1,t,y,z,u_\Gamma]=-W_2(t,y,z)+(\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z),b_1(t,y,z))u_\Gamma^{(1)})+$$
$$+(\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z),b_2(t,y,z)u_\Gamma^{(2)}+F(t,y,z)+u_\Gamma^T\beta u_\Gamma, \tag{15}$$

где $-W_2(t,y,z) = \left.\dfrac{\mathrm{d}V_1(t,y,z)}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)}$ при управлениях (11) и $\rho < 1$ является определённо-отрицательной функцией относительно координат вектора y. Во многих случаях выражение

$$\Omega(t,y,z) = (\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z), b_1^T(t,y,z)u_\Gamma^{(1)}) + \\ + (\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z), \quad b_2^T(t,y,z)u_\Gamma^{(2)}) + u_\Gamma^T \beta u_\Gamma$$

можно [2] представить в виде

$$\Omega(t,y,z) = (u_\Gamma - u_\Gamma^0)^T \beta (u_\Gamma - u_\Gamma^0) - (u_\Gamma^0)^T \beta (u_\Gamma^0). \tag{15_1}$$

Известно [3], что функция $B[V_1^0, t, y, z, u_\Gamma] \geqslant 0$, а на оптимальном управлении $u_\Gamma = u_\Gamma^0$ обращается в нуль, т.е. $B[V_1^0, t, y, z, u_\Gamma^0] = 0$. Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно оптимального управления u_Γ^0, т.е.

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial B}{\partial u_\Gamma^{(1)}}\right|_{(u_\Gamma^{(1)})^0} &= (\mathrm{grad}_y V_1(t,y,z), b_1(t,y,z)) + 2\beta_1 (u_\Gamma^{(1)})^0 = 0, \\ \left.\frac{\partial B}{\partial u_\Gamma^{(2)}}\right|_{(u_\Gamma^{(2)})^0} &= (\mathrm{grad}_z V_1(t,y,z), b_2(t,y,z)) + 2\beta_2 (u_\Gamma^{(2)})^0 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Из системы (16) находим оптимальное управление $u_\Gamma^0 = \left(\left(\left(u_\Gamma^{(1)} \right)^0 \right)^T, \left(\left(u_\Gamma^{(2)} \right)^0 \right)^T \right)^T$.

Подставляя найденное управление в функцию (15) и учитывая при этом (15_1), получим

$$F(t,x) = W_2(t,y,z) + (u_\Gamma^0)^T \beta u_\Gamma^0. \tag{17}$$

Следовательно, с учётом выражения (14), критерий качества управления (12) окончательно принимает вид

$$I = \int\limits_{t_0}^{\infty} (W_2(t,y,z)) + (u_\Gamma^0)^T \beta (u_\Gamma^0) + u_\Gamma^T \beta u_\Gamma) \mathrm{d}t.$$

Так как функция $W_2(t,y,z)$ — определённо-положительная относительно координат вектора y, то из выражения (17) следует, что $F(t,y,z)$ является определённо-положительной. Таким образом, в критерии качества (12) функция $F(t,y,z)$ обеспечивает монотонное затухание величины $\|y(t)\|$ при $\|z(t)\| < \infty$ и $t \geqslant t_0$. Таким образом, задача об оптимальной y-стабилизации полностью решена.

Пример. Пусть дана система

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= y_1 + u_\Lambda^{(1)} + f_1(t, y_1, y_2, z_1, z_2) + u_\Gamma^{(1)}, \\ \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} &= f_2(t, y_1, y_2, z_1, z_2), \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} &= y_2 + u_\Lambda^{(2)} + f_3(t, y_1, y_2, z_1, z_2) + u_\Gamma^{(2)}, \\ \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} &= f_4(t, y_1, y_2, z_1, z_2). \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $Y(t,y,z) = y_1 + f_1(t,y_1,y_2,z_1,z_2)$, $Z(t,y,z) = y_2 + f_2(t,y_1,y_2,z_1,z_2)$. Предположим, что правая часть системы (18) удовлетворяет всем условиям, что и правая часть системы (6). В данном случае система вида (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= y_1 + u_\Lambda^{(1)} + f_1(t,y_1,y_2,z_1,z_2), & \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} &\equiv f_2(t,y_1,y_2,z_1,z_2), \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} &= y_2 + u_\Lambda^{(2)} + f_3(t,y_1,y_2,z_1,z_2), & \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} &\equiv f_4(t,y_1,y_2,z_1,z_2). \end{aligned} \tag{19}$$

В качестве функции Ляпунова для исходной системы (18) возьмём функцию

$$V(y_1,y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2).$$

Она же и будет оптимальной. Эта функция относится к классу функций (8), полная производная которой на решениях системы (19) имеет вид (10).

Выберем в качестве $u_\Lambda^{(1)}$ и $u_\Lambda^{(2)}$ в соответствии с (11) стабилизирующие управления

$$u_\Lambda^{(1)} = \left(-\frac{2y_1^2 + y_1 f_1(t,y,z)}{y_1^2} + \frac{1}{2}\right) y_1, \quad u_\Lambda^{(2)} = \left(-\frac{2y_2^2 + y_2 f_3(t,y,z)}{y_2^2} + \frac{1}{2}\right) y_2.$$

С учётом $u_\Lambda^{(1)}$ и $u_\Lambda^{(2)}$ система (19) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2}y_1, & \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} &= f_2(t,y_1,y_2,z_1,z_2), \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2}y_2, & \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} &= f_4(t,y_1,y_2,z_1,z_2). \end{aligned}$$

Система вида (13) здесь имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2}y_1 + u_\Gamma^{(1)}, & \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} &= f_2(t,y_1,y_2,z_1,z_2), \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2}y_2 + u_\Gamma^{(2)}, & \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} &= f_4(t,y_1,y_2,z_1,z_2). \end{aligned} \tag{20}$$

Далее составим функцию [2]

$$B[V,y_1,y_2,z_1,z_2,u_\Gamma] = -y_1^2 + 2y_1u_\Gamma^{(1)} - y_2^2 + 2y_2u_\Gamma^{(2)} + F(t,y_1,y_2,z_1,z_2) + \\ + (u_\Gamma^{(1)})^2 + (u_\Gamma^{(2)})^2.$$

Известно [3], что на оптимальном управлении эта функция обращается в нуль, а следовательно, оптимальное управление находится в виде

$$(u_\Gamma^{(1)})^0 = -y_1, \quad (u_\Gamma^{(2)})^0 = -y_2.$$

Подставив $(u_\Gamma^{(1)})^0$ и $(u_\Gamma^{(2)})^0$ в функцию $B[V,y_1,y_2,z_1,z_2,(u_\Gamma^{(1)})^0,(u_\Gamma^{(2)})^0]$, получим

$$F(t,y_1,y_2,z_1,z_2) = 2(y_1^2 + y_2^2). \tag{21}$$

Из (21) следует, что функционал качества управления определяется в виде

$$J[u_1^\Gamma, \quad u_1^\Gamma] = \int\limits_{t_0}^{\infty} \Big[2(y_1^2 + y_2^2) + (u_\Gamma^{(1)})^2 + (u_\Gamma^{(2)})^2\Big]\, \mathrm{d}t \tag{22}$$

Таким образом, управление $\left(u_\Gamma^{(1)}\right)^0 = -y_1$, $\left(u_\Gamma^{(2)}\right)^0 = -y_2$ для системы (18) является оптимальным в смысле функционала (22). Пример полностью решён.

Заключение

В результате настоящего исследования указан способ решения задачи оптимальной стабилизации относительно части фазовых переменных применительно к нелинейным управляемым динамическим системам.

Литература

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — С. 237–244. [*Demidovich B. P.* Lekcii po matematicheskoyj teorii ustoyjchivosti. — M.: Nauka, 1967. — S. 237–244.]
2. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. — 1970. — Т. 34. — С. 440–456. [*Rumyancev V. V.* Ob optimaljnoyj stabilizacii upravlyaemihkh sistem // PMM. — 1970. — T. 34. — S. 440–456.]
3. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987. — С. 125–139. [*Rumyancev V. V., Oziraner A. S.* Ustoyjchivostj i stabilizaciya dvizheniya po otnosheniyu k chasti peremennihkh. — M.: Nauka, 1987. — S. 125–139.]
4. *Воронов А. А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. — М.: Наука, 1985. — С. 314–324. [*Voronov A. A.* Vvedenie v dinamiku slozhnihkh upravlyaemihkh sistem. — M.: Nauka, 1985. — S. 314–324.]
5. *Шильяк Д.* Децентрализованное управление сложными системами. — М.: Мир, 1994. — С. 104–112. [*Shiljyak D.* Decentralizovannoe upravlenie slozhnihmi sistemami. — M.: Mir, 1994. — S. 104–112.]

UDC 517.977.54

Problems of Stabilization and Optimal Stabilization of Non-Linear Controlled Systems

A. V. Shchennikov, V. N. Shchennikov, J. J. Vagapova

Ogarev Mordovia State University
68 Bolshevistskaya str., Saransk, Republic of Mordovia, Russia, 430005

Problems of stabilization and optimal stabilization due to V. V. Rumjantsev concerning a part of variables for non-linear controlled systems are solved.

Key words and phrases: optimal stabilization, additional strenghts, functional of quality of control.