УДК 517.95

Обратная задача определения функции источника в недивергентном параболическом уравнении

В. Л. Камынин, Т. И. Бухарова

Кафедра высшей математики
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Каширское шоссе, 31, Москва, Россия, 115409

Получена однозначная разрешимость обратной задачи определения неизвестной правой части в многомерном недивергентном параболическом уравнении. В качестве дополнительной информации задаётся интеграл от решения по времени с некоторой заданной весовой функцией. Приведены примеры обратных задач, для которых применимы полученные в работе результаты.

Ключевые слова: обратная задача, недивергентные параболические уравнения, интегральное наблюдение по пространственным переменным.

1. Введение. Постановка обратной задачи

В работе изучается однозначная разрешимость обратной задачи определения пары функций $\{u(t,x), f(x)\}$, удовлетворяющих в $Q \equiv [0,T] \times \overline{\Omega}$ уравнению

$$\rho(t,x)u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + d(t,x)u = f(x)g(t,x), \tag{1}$$

краевым условиям

$$u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Gamma \equiv \{0\} \times \overline{\Omega} \cup [0,T] \times \partial\Omega, \tag{2}$$

а также дополнительному условию

$$\int\limits_0^T u(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{3}$$

Здесь Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$; $\rho(t,x)$, $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $d(t,x)$, $g(t,x)$, $\chi(t)$, $\varphi(x)$ — заданные функции.

Близкие обратные задачи при других предположениях на входные данные и другими методами изучались ранее в [1–6] и др.

В настоящей работе установлены достаточные условия, при которых решение обратной задачи (1)–(3) существует и единственно.

Используемые в работе пространства Лебега, Соболева и Гёльдера с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [7,8]).

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи (1)–(3), измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

(A) $\quad 0 < \rho_1 \leqslant \rho(t,x) \leqslant \rho_2,\ |\rho_t| \leqslant K_\rho, \quad (t,x) \in Q;$

Статья поступила в редакцию 4 марта 2012 г.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11278).

$$a_1|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant a_2|\xi|^2,\ x\in\overline{\Omega},\ \xi\equiv(\xi_1,\dots,\xi_n)\in R^n;\ |\xi| = \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad i,j=1,2,\dots,n, \quad x\in\overline{\Omega};$$

(B) $|b_i(x)|\leqslant K_b,\ i=1,2,\dots,n,\ x\in\overline{\Omega},\ -d_1\leqslant d(t,x)\leqslant d_2,\ |g(t,x)|\leqslant K_g,\ (t,x)\in Q;$

$$(C) \quad \chi(t)\in W_1^1([0,T]),\ \|\chi(t)\|_{L_1([0,T])}\leqslant K_\chi,\ \|\chi'(t)\|_{L_1([0,T])}\leqslant K_\chi^*,$$

$$\left|\int_0^T g(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t\right| \geqslant g_0 > 0;$$

$$(D) \quad \varphi(x)\in W_\infty^2(\Omega), \varphi(x)=0,\ x\in\partial\Omega;$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\varphi_{x_ix_j}(x)\right| \leqslant K_\varphi, \left|\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\varphi_{x_i}(x)\right| \leqslant K_\varphi^*,\ x\in\overline{\Omega}.$$

Здесь $\rho_1,\rho_2,a_1,a_2,K_\chi,K_g,g_0=\mathrm{const}>0;\ K_\varphi,K_\varphi^*,K_b,d_1,d_2=\mathrm{const}\geqslant 0.$

Положим

$$K_d = \max\{d_1,d_2\}. \tag{4}$$

Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)–(3) будем называть пару функций $\{u(t,x),f(x)\}$, $u(t,x)\in W_2^{1,2}(Q)\bigcap C^{0,\alpha}(Q), \alpha=\mathrm{const}\in(0,1)$, $f(x)\in L_\infty(\Omega)$ такую, что эта пара удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в Q, а функция $u(t,x)$ удовлетворяет условиям (2), (3).

Хорошо известно, что при выполнении только условий (A) и (B) (и при $f(x)\in L_\infty(\Omega)$) при $n>1$ невозможно получить априорную оценку в $L_2(Q)$ старших производных решения $u(t,x)$ прямой задачи (1)–(2), и, следовательно, доказать разрешимость прямой задачи в пространстве $W_2^{1,2}(Q)$. Требуется наложить те или иные дополнительные требования на старшие коэффициенты уравнения (1), например, условие непрерывности (см., например, [8]) или условие типа Кордеса (см., например, [9]). Предположив, что выполнено одно из указанных дополнительных условий на старшие коэффициенты уравнения (1), мы в следующем пункте устанавливаем однозначную разрешимость обратной задачи (1)–(3).

2. Основной результат. Существование и единственность решения обратной задачи (1)–(3)

Предположим сначала, что при $n>1$ дополнительно к условиям $(A)-(D)$ выполнено ещё условие

$$(A') \quad a_{ij}(x)\in C(\overline{\Omega}),\ \rho(t,x)\in C(Q).$$

Рассмотрим прямую задачу (1)–(2) с $f(x)\in L_\infty(\Omega)$. Тогда в силу условий (A), (A'), (B) можно применить результаты из [8, с. 388], согласно которым существует единственное решение $u(t,x)\in W_q^{1,2}(Q)$ (для любого $q\geqslant 2$) прямой задачи (1)–(2), причём для него справедлива оценка

$$\|u\|_{W_q^{1,2}(Q)} \leqslant c_1. \tag{5}$$

Поскольку, как было отмечено, число q в (5) может быть выбрано любым из промежутка $[2,\infty)$, то в силу известных теорем вложения $u(t,x)\in C^{0,\alpha}(Q)$ при некотором $\alpha\in(0,1)$ и справедлива оценка

$$|u|_{C^{0,\alpha}(Q)}\leqslant c_2. \tag{6}$$

В оценках (5), (6) c_1 и c_2 – положительные константы, зависящие от входных данных задачи (1)–(2), а также от q и от $\|f\|_{L_\infty(\Omega)}$. Кроме того, в силу принципа максимума (см., например, [7, с. 60–61]) для этого решения справедлива также оценка

$$|u(t,x)|\leqslant M_f\equiv\left(e^{\lambda l}-1\right)\frac{K_g}{\rho_1}e^{(d_1T)/\rho_1}\|f\|_{L_\infty(\Omega)},\ (t,x)\in Q, \tag{7}$$

где l — размер области Ω в направлении оси x_1, а $\lambda=\mathrm{const}>0$, для которой

$$\frac{a_{11}(x)}{\rho(t,x)}\lambda^2+\frac{b_1(x)}{\rho(t,x)}\lambda\geqslant 1. \tag{8}$$

Предположим теперь, что при $n>1$ вместо условия (A') дополнительно к $(A)-(D)$ выполнено условие

$$(A'')\quad \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname*{ess\,sup}_{Q}\Big(\frac{a_{ij}(x)}{\rho(t,x)}\Big)^2+1\Big)\Big/\Big(\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{ess\,inf}_{Q}\frac{a_{ii}(x)}{\rho(t,x)}+1\Big)^2\leqslant\frac{1}{n+\varepsilon},$$

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\Omega}}\ a_{ij}^2(x)\Big)\Big/\Big(\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{ess\,inf}_{\overline{\Omega}}a_{ii}(x)\Big)^2\leqslant\frac{1}{n-1+\varepsilon}$$

при некотором $\varepsilon\in(0,1)$ (см. [9,10]).

Замечание 1. Неравенства, входящие в (A''), являются условиями типа Кордеса, характеризующими близость главной части уравнения (1) к оператору теплопроводности $u_t-\triangle u$.

Рассмотрим снова прямую задачу (1)–(2) с $f(x)\in L_\infty(\Omega)$. Тогда в силу результатов работы [9] с учётом п.4 из работы [11] существует единственное решение $u(t,x)$ прямой задачи (1)–(2) из пространства $W_2^{1,2}(Q)$, причём для него справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(Q)}\leqslant c_3. \tag{9}$$

Кроме того, из результатов [12, с. 120, 142] следует, что $u(t,x)\in C^{0,\alpha}(Q)$ при некотором $\alpha\in(0,1)$ и справедлива оценка (6).

Заметим, что для формального применения результатов из [12] требуется, чтобы $u(t,x)\in W_q^{1,2}(Q)$ при $q\geqslant n+1$. Однако это требование легко обойти. Именно, сгладим коэффициенты уравнения (1) с помощью средних функций. Нетрудно проверить, что условие (A'') типа Кордеса останется справедливым и для «сглаженного» уравнения. Получим оценки (9) и (6) для решения $u^h(t,x)$ «сглаженного» уравнения (они не будут зависеть от параметра сглаживания h). Затем перейдём к пределу при $h\to\infty$ и воспользуемся единственностью решения $u(t,x)$ из пространства $W_2^{1,2}(Q)$ исходной задачи (1)–(2) (см. [9]). Как и выше, для решения $u(t,x)$ задачи (1)–(2) будет также справедлива оценка (7).

В дальнейшем при $n>1$ будем предполагать выполненным одно из условий (A') или (A''), так что прямая задача однозначно разрешима для любой функции $f(x)\in L_\infty(\Omega)$.

Замечание 2. При $n = 1$ однозначная разрешимость прямой задачи (1)–(2) без условий (A') или (A'') следует из [13].

Рассмотрим обратную задачу (1)–(3) и выведем операторное уравнение для неизвестной функции $f(x)$. Умножим уравнение (1) на $\chi(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. Учитывая условия (2), (3) и предположения $(A), (C), (D)$, приходим к соотношению

$$f(x) = \frac{1}{G(x)}\Big\{\rho(T,x)\chi(T)u(T,x) + \int\limits_0^T [d(t,x)\chi(t) - \rho_t(t,x)\chi(t) - \rho(t,x)\chi'(t)]u(t,x)\mathrm{d}t - \\ - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\varphi_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)\varphi_{x_i}(x)\Big\}, \quad (10)$$

где $G(x) \equiv \int_0^T g(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t$, так что в силу условия (C) $|G(x)| \geqslant g_0 > 0$.

Введём линейный оператор $\mathcal{A} : L_\infty(\Omega) \to L_\infty(\Omega)$ по формуле

$$\mathcal{A}(f) = \frac{1}{G(x)}\Big\{\rho(T,x)\chi(T)u(T,x) + \int\limits_0^T [d(t,x)\chi(t) - \rho_t(t,x)\chi(t) - \rho(t,x)\chi'(t)]u(t,x)\mathrm{d}t\Big\}, \quad (11)$$

где $u(t,x)$ – обобщённое решение прямой задачи (1)–(2) с заданной функцией $f(x) \in L_\infty(\Omega)$ в правой части уравнения (1).

В силу условий $(A) - (D)$, а также (A') или (A'') (если $n > 1$) оператор $\mathcal{A}$ действительно действует из $L_\infty(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$, а соотношение (10) можно переписать в виде

$$f = \mathcal{A}(f) + \frac{1}{G(x)}\Big\{-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\varphi_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\varphi_{x_i}\Big\}. \quad (12)$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия $(A) - (D)$, а также (A') или (A''), если $n > 1$. Тогда для того, чтобы пара $\{u(t,x), f(x)\}$ была обобщённым решением задачи (1)–(3), необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла соотношениям (1), (2), (12).*

Доказательство. Необходимость доказана выше при выводе соотношения (12).

Докажем достаточность. Пусть $f^*(x) \in L_\infty(\Omega)$ является решением уравнения (12). Рассмотрим функцию $u^*(t,x)$ как единственное обобщённое решение прямой задачи (1)–(2) с выбранной функцией $f(x) = f^*(x)$ в правой части уравнения (1). Положим

$$\varphi^*(x) = \int\limits_0^T u^*(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t. \quad (13)$$

Тогда $\varphi^*(x) \in W_2^2(\Omega)\bigcap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Повторяя рассуждения, приведённые выше при выводе (10) (в этих рассуждениях достаточно, чтобы $\varphi^*(x) \in W_2^2(\Omega)\bigcap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$), приходим к соотношению

$$f^*(x)G^*(x) = \rho(T,x)\chi(T)u^*(T,x) + \int\limits_0^T [d(t,x)\chi(t) - \rho_t(t,x)\chi(t) - \rho(t,x)\chi'(t)]u^*(t,x)\mathrm{d}t - \\ - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\varphi^*_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)\varphi^*_{x_i}(x). \quad (14)$$

С другой стороны, $f^*(x)$ является решением уравнения (12), поэтому учитывая определение оператора $\mathcal{A}$ в (11), имеем

$$f^*(x)G(x) = \rho(T,x)\chi(T)u^*(T,x) + \int\limits_0^T [d(t,x)\chi(t) - \rho_t(t,x)\chi(t) - \rho(t,x)\chi'(t)]u^*(t,x)\mathrm{d}t - \\ - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\varphi_{x_ix_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)\varphi_{x_i}(x). \quad (15)$$

Заметим, что из определения функции $\varphi^*(x)$ в (13) и условия (D) следует, что

$$\varphi^*(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (16)$$

Положим $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi^*(x)$. Тогда, вычитая (14) из (15) и учитывая (16), получаем, что $\psi(x) \in W_2^2(\Omega) \bigcap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ является в $\overline{\Omega}$ обобщённым решением краевой задачи

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\psi_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\psi_{x_i} = 0, \quad \psi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Поэтому $\psi(x) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$: при выполнении условия (A') это следует из [14, с. 225], при выполнении условия (A'') – из [10], а при $n = 1$ – из [14, с. 173]. Следовательно, пара $\{u^*(t,x), f^*(x)\}$ является обобщённым решением обратной задачи (1)–(3). Лемма 1 доказана. □

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $(A) - (D)$, *а также* (A') *или* (A''), *если* $n > 1$. *Положим*

$$m = \left(e^{\lambda l} - 1\right) \frac{K_g}{g_0\rho_1} e^{(d_1T)/\rho_1} \left(K_dK_\chi + K_\rho K_\chi + \rho_2 K_\chi^* + \rho_2|\chi(T)|\right), \quad (17)$$

где K_d *из* (4), λ *удовлетворяет условию* (8). *Пусть выполнено неравенство*

$$m < 1. \quad (18)$$

Тогда обобщённое решение $\{u(t,x), f(x)\}$ *задачи* (1)–(3) *существует и единственно, причём справедливы оценки*

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \frac{K_\varphi + K_\varphi^*}{(1-m)g_0} \quad (19)$$

$$|u(t,x)| \leqslant \left(e^{\lambda l} - 1\right) \frac{K_g}{\rho_1} e^{(d_1T)/\rho_1} \frac{K_\varphi + K_\varphi^*}{(1-m)g_0}, \ (t,x) \in Q. \quad (20)$$

Доказательство. В силу определения оператора $\mathcal{A}$ в (11), с учётом условий $(A) - (D)$ и оценки (7), имеем, что для любого $x \in \overline{\Omega}$

$$|\mathcal{A}(f)(x)| \leqslant \frac{1}{G(x)}\Big\{|\rho(T,x)||\chi(T)||u(T,x)| + \\ + \int\limits_0^T |d(t,x)\chi(t) - \rho_t(t,x)\chi(t) - \rho(t,x)\chi'(t)||u(t,x)|\mathrm{d}t\Big\} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{g_0}\left(K_dK_\chi + K_\rho K_\chi + \rho_2K_\chi^* + \rho_2|\chi(T)|\right) M_f.$$

Учитывая определение M_f в (7) и m в (17), получаем отсюда, что

$$\|\mathcal{A}(f)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \frac{1}{g_0}\left(K_d K_\chi + K_\rho K_\chi + \rho_2 K_\chi^* + \rho_2|\chi(T)|\right) \times \\ \times \left(e^{\lambda l} - 1\right) \frac{K_g}{\rho_1} e^{(d_1 T)/\rho_1} \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \equiv m\|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \quad (21)$$

В силу (18) $m < 1$, поэтому оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим оператором в $L_\infty(\Omega)$. Следовательно, уравнение (12) имеет единственное решение $f(x) \in L_\infty(\Omega)$, причём в силу (21) с учётом условия (D) для $f(x)$ справедлива оценка (19). Пусть $u(t,x)$ – решение прямой задачи (1)–(2) с найденной $f(x)$ в правой части уравнения (1), которое существует, поскольку при $n > 1$ выполнено одно из условий (A') или (A''). В силу (7) и (8) для $u(t,x)$ справедлива оценка (20), а в силу леммы 1 пара $\{u(t,x), f(x)\}$ является обобщённым решением обратной задачи (1)–(3).

Докажем единственность решения обратной задачи (1)–(3). Пусть, вопреки утверждению теоремы 1, существует два различных обобщённых решения $\{u^{(1)}(t,x), f^{(1)}(x)\}$ и $\{u^{(2)}(t,x), f^{(2)}(x)\}$ этой задачи. Тогда обязательно

$$f^{(1)}(x) \not\equiv f^{(2)}(x), \quad x \in [0,l], \quad (22)$$

иначе и $u^{(1)}(t,x) \equiv u^{(2)}(t,x)$ в силу единственности решения прямой задачи (1)–(2) (при $n > 1$ – в случае выполнения условия (A') (см. [8, с. 388]) и в случае выполнения условия (A'') (см. [9]), а при $n = 1$ – см. [13]). Но в силу леммы 1 $f^{(1)}(x)$ и $f^{(2)}(x)$ являются решениями операторного уравнения (12), и соотношение (22) противоречит тому, что оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим. Теорема доказана. □

3. Некоторые примеры

Приведём примеры обратных задач, для которых справедлива доказанная в работе теорема существования и единственности.

Пример 1. Рассмотрим в $Q = [0,T] \times [0,l]$ $(n = 1, \Omega = (0,l))$ обратную задачу

$$\left(2 + \sin\frac{xt}{T}\right) u_t - u_{xx} + b(x)u_x + d(t,x)u = f(x), \quad (t,x) \in Q; \quad (23)$$

$$u(t,x) = 0, \ (t,x) \in \Gamma; \quad (24)$$

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t,x)\mathrm{d}t = \varphi(x), \ x \in [0,l], \quad (25)$$

с произвольными функциями $b(x)$, $d(t,x)$, $\varphi(x)$, удовлетворяющими условиям (B) и (D), при условии, что константы K_b, K_d не зависят от l и T.

Заметим, что условие (25) имеет простой физический смысл: это взятие среднего по времени от функции $u(t,x)$.

Очевидно, для задачи (23)–(25) выполнены условия (A) – (D), а константа λ из (8) может быть выбрана не зависящей от l и T. Нетрудно посчитать, что m в условии (17) равна

$$m = \left(e^{\lambda l} - 1\right) e^{d_1 T}\left(K_d + \frac{l+3}{T}\right). \quad (26)$$

Таким образом, если T фиксировано, то при достаточно малых l для m будет выполнено условие (18), а следовательно, в этом случае существует и единственно решение обратной задачи (23)–(25).

Если же функция $d(t,x)$ в уравнении (23) равна нулю, то из (26) следует, что величина m будет удовлетворять условию (18) также и в случае достаточно больших T (при фиксированном l). Следовательно, в этом случае задача (23) – (25) также будет однозначно разрешима.

Пример 2. Рассмотрим в $Q = [0,T] \times [0,l]$ ($n = 1$, $\Omega = (0,l)$) обратную задачу для уравнения (23) с краевыми условиями (24), но с дополнительным условием

$$\int\limits_0^T u(t,x)t(T-t)\mathrm{d}t = f(x), \quad x \in (0,l). \tag{27}$$

Как и в примере 1, предполагаем, что функции $b(x)$, $d(t,x)$, $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям (B) и (D), а константы K_b, K_d не зависят от l и T.

Как и выше, для задачи (23), (24), (27) выполнены условия $(A)-(D)$, а константа λ из (8) может быть выбрана не зависящей от l и T.

В данном случае

$$m = \left(e^{\lambda l} - 1\right) e^{d_1 T} \left(K_d + \frac{l+9}{T}\right).$$

Таким образом, как и в примере 1, если T фиксировано, то при достаточно малых l величина m удовлетворяет условию (18), а, следовательно, существует и единственно решение обратной задачи (23), (24), (27).

Если же функция $d(t,x) \equiv 0$, то условие (18) будет выполнено также и в случае достаточно больших T (при фиксированном l). Следовательно, в этом случае обратная задача (23), (24), (27) также будет однозначно разрешима.

Литература

1. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным переопределением // Математический сборник. — 1992. — Т. 183, № 4. — С. 49–68. [*Prilepko A. I., Kostin A. B.* O nekotorihkh obratnihkh zadachakh dlya parabolicheskikh uravneniyj s finaljnihm i integraljnihm pereopredeleniem // Matematicheskiyj sbornik. — 1992. — T. 183, No 4. — S. 49–68.]
2. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении II // Сиб. матем. журн. — 1993. — Т. 34, № 5. — С. 147–162. [*Prilepko A. I., Kostin A. B.* Ob obratnihkh zadachakh opredeleniya koehfficienta v parabolicheskom uravnenii II // Sib. matem. zhurn. — 1993. — T. 34, No 5. — S. 147–162.]
3. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. матем. — 1994. — Т. 58, № 2. — С. 167–188. [*Prilepko A. I., Tikhonov I. V.* Vosstanovlenie neodnorodnogo slagaemogo v abstraktnom ehvolyucionnom uravnenii // Izv. RAN. Ser. matem. — 1994. — T. 58, No 2. — S. 167–188.]
4. *Прилепко А. И., Ткаченко Д. С.* Свойства решений параболического уравнения и единственность обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журнал выч. матем. и матем. физики. — 2003. — Т. 43, № 4. — С. 562–570. [*Prilepko A. I., Tkachenko D. S.* Svoyjstva resheniyj parabolicheskogo uravneniya i edinstvennostj obratnoyj zadachi ob istochnike

s integraljnihm pereopredeleniem // Zhurnal vihch. matem. i matem. fiziki. — 2003. — T. 43, No 4. — S. 562–570.]

5. *Камынин В. Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Математические заметки. — 2005. — Т. 77, № 4. — С. 522–524. [*Kamynin V. L.* Ob obratnoyj zadache opredeleniya pravoyj chasti v parabolicheskom uravnenii s usloviem integraljnogo pereopredeleniya // Matematicheskie zametki. — 2005. — T. 77, No 4. — S. 522–524]
6. *Kozhanov A. I., Safiullova R. R.* Linear Inverse Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2010. — Vol. 18, No 1. — Pp. 1–24.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1962. — 428 с. [*Fridman A.* Uravneniya s chastnihmi proizvodnihmi parabolicheskogo tipa. — M.: Mir, 1962. — 428 s.]
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с. [*Ladihzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraljceva N. N.* Lineyjnihe i kvazilineyjnihe uravneniya parabolicheskogo tipa. — M.: Nauka, 1967. — 736 s.]
9. *Arena O.* Sopra una classe di equazioni paraboliche // Boll.U.M.I. — 1969. — Vol. 2, No 1. — Pp. 9–24.
10. *Chicco M.* Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellitiche del secondo ordine di tipo Cordes // Annali di Mat. Pura ed. Appl. — 1974. — Vol. 100, No 1. — Pp. 239–258.
11. *Arena O., Maugeri A.* Perturbazioni di operatori parabolici di ordine 2n con termini di ordine inferiore // Boll. U.M.I. — 1974. — Vol. 9, No 1. — Pp. 169–184.
12. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. — М.: Наука, 1985. — 376 с. [*Krihlov N. V.* Nelineyjnihe ehllipticheskie i parabolicheskie uravneniya vtorogo poryadka. — M.: Nauka, 1985. — 376 s.]
13. *Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Труды сем. им. И.Г.Петровского. — 1979. — Т. 31, № 5. — С. 217–272. [*Kruzhkov S. N.* Kvazilineyjnihe parabolicheskie uravneniya i sistemih s dvumya nezavisimihmi peremennihmi // Trudih sem. im. I.G.Petrovskogo. — 1979. — T. 31, No 5. — S. 217–272.]
14. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптичесие дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989. — 463 с. [*Gilbarg D., Trudinger N.* Ehllipticheskie differencialjnihe uravneniya s chastnihmi proizvodnihmi vtorogo poryadka. — M.: Nauka, 1989. — 463 s.]

UDC 517.95

Inverse Problem of Determination of Source Function in Nondivergent Parabolic Equation

V. L. Kamynin, T. I. Bukharova

Department of Mathematics
National Research Nuclear University "MEPhI"
31, Kashirskoe shosse, Moscow, Russia, 115409

We obtain unique solvability for the inverse problem of determination of the unknown right-hand side in multidimensional nondivergent parabolic equation. The additional information is included in the integral $\int_0^T u(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t$, where $\chi(t)$ is a given weight function. We adduce the examples of the inverse problems satisfying the conditions imposed.

Key words and phrases: inverse problem, parabolic equations, integral observation with respect to spatial variables.