
Математическое моделирование

УДК 519.624.3

Исследование решений краевых задач для квазипотенциального уравнения с использованием оператора сдвига

И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар,
И. Сархадов, З. А. Шарипов

*Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри д.6, Дубна, Московская область, 141980, Россия*

Квазипотенциальные уравнения широко применяются для релятивистского описания системы двух частиц, например, кварка и антикварка. В работе, используя оператор сдвига, исследованы решения краевых задач для квазипотенциального уравнения с кулоновским потенциалом при различных значениях параметра ε . Установлено, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеется решение, которое стремится к решению уравнения Шрёдингера. Кроме того, обнаружены так называемые погранслоиные решения и переход одного типа решения в другой. Исследования проведены при использовании системы символьных вычислений MAPLE.

Ключевые слова: квазипотенциальное уравнение, краевая задача, оператор сдвига, символьные вычисления.

1. Введение

Одной из актуальных задач теории элементарных частиц является построение модели для единообразного описания спектра и форм-факторов взаимодействия лёгких и тяжёлых мезонов, так называемых кваркониев, рассматриваемых как связанные состояния кварка и антикварка. Тяжёлые кварконии в некотором приближении успешно описываются нерелятивистской квантовой механикой — решение уравнения Шрёдингера на собственные значения [1]. При описании лёгких мезонов возникает необходимость учёта релятивистских эффектов.

Квазипотенциальные уравнения [2] широко применяются для релятивистского описания системы двух частиц, например, кварка и антикварка. В данной работе, так же как и в предыдущих наших работах [3–12], мы рассматриваем квазипотенциальное уравнение [2, 13]. В частном случае для S - волны, оно имеет вид

$$[E_\varepsilon - H_\varepsilon - V(r)] \psi(r) = 0, \quad (1)$$

где

$$E_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} - 1 \right] = \frac{2q^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} + 1}, \quad H_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\operatorname{ch} \left(i\varepsilon \frac{d}{dr} \right) - 1 \right],$$

ε — безразмерный параметр, $V(r) = -\frac{2Z}{r}$ — кулоновский потенциал взаимодействия. В уравнении (1), разлагая оператор $\operatorname{ch} \left(i\varepsilon \frac{d}{dr} \right)$ в ряд, можно получить дифференциальное уравнение бесконечного порядка [14]. При $\varepsilon \rightarrow 0$, $E_\varepsilon \rightarrow q^2$, $H_\varepsilon \rightarrow -\frac{d^2}{dr^2}$, т.е. уравнение (1) переходит в нерелятивистское уравнение Шрёдингера

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - V(r) + q^2 \right] \psi(r) = 0. \quad (2)$$

Задача Коши для таких систем дифференциальных уравнений была рассмотрена в работах [15, 16]. Краевые задачи для сингулярно возмущённых уравнений являются предметом изучения широкого круга работ [17, 18].

Обозначим $E_\varepsilon = -\alpha^2$ — собственное значение, где $\alpha^2 > 0$. Тогда уравнение (1) будет иметь вид:

$$\left[-\alpha^2 - H_\varepsilon + \frac{2Z}{r}\right] \psi(r) = 0. \quad (3)$$

2. Постановка задачи

В предыдущих наших работах [3–12] исследовались краевые задачи для дифференциального уравнения высокого порядка. В данной работе, используя оператор сдвига

$$\exp\left(\pm i\varepsilon \frac{d}{dr}\right) f(r) = f(r \pm i\varepsilon), \quad (4)$$

уравнение (3) исследуем со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0, & \psi(r \rightarrow \infty) &= 0, \\ \psi'(0) &= 1, & \psi'(r \rightarrow \infty) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

В дальнейшем решение задачи (3)–(5) будем сравнивать с решением уравнения Шрёдингера, поэтому ниже приведём необходимые сведения о решении уравнения Шрёдингера (дискретный спектр) при $\ell = 0$.

Собственные значения имеют вид

$$E_n = q^2 = -\alpha_n^2 = -\frac{Z^2}{(n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Вводя обозначение $y = Zr$, приведём конкретные выражения нескольких решений с различными узлами.

$$\begin{aligned} \psi_0(y) &= Z^{\frac{3}{2}} 2ye^{-y}, \\ \psi_1(y) &= Z^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} y \left(1 - \frac{1}{2}y\right) e^{-\frac{y}{2}}, \\ \psi_2(y) &= Z^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3\sqrt{3}} y \left(1 - \frac{2}{3}y + \frac{2}{27}y^2\right) e^{-\frac{y}{3}}, \\ \psi_3(y) &= Z^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4} y \left(1 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{192}y^3\right) e^{-\frac{y}{4}}, \\ \psi_4(y) &= Z^{\frac{3}{2}} \frac{2}{5\sqrt{5}} y \left(1 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{25}y^2 - \frac{4}{375}y^3 + \frac{2}{9375}y^4\right) e^{-\frac{y}{5}}. \end{aligned}$$

3. Алгоритм решения

Решение с n узлами ищем в виде

$$\psi_n(r) = r \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i r^i\right) \exp(-kr), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6)$$

где $k, a_1, a_2, a_3, \dots, a_i$ — неизвестные постоянные. Подставляя это выражение в уравнение (3), используя оператор сдвига и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях r , получаем уравнения для нахождения параметра k

$$\sin(\varepsilon k) - \frac{Z\varepsilon}{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

для нахождения α^2

$$\alpha^2 + \frac{2}{\varepsilon^2}(\cos(\varepsilon k) - 1) = 0, \quad (8)$$

и систему n уравнений для нахождения $a_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$. При $n = 0$ — это безузловое решение, $n = 1$ — решение с одним узлом, $n = 2$ — решение с двумя узлами и т. д. Приведём для фиксированных значений n решения $a_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ этих уравнений.

При $n = 0, \quad a_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$.

При $n = 1, \quad a_1 = \frac{Z}{2} \frac{1}{\cos(\varepsilon k)}$.

При $n = 2, \quad a_1 = \frac{-18Z \cos(\varepsilon k)}{D_2}, \quad a_2 = \frac{2Z^2}{D_2}$, где $D_2 = 27 \cos^2(\varepsilon k) - Z^2 \varepsilon^2$.

При $n = 3, \quad a_1 = \frac{1}{12} \frac{Z(11\varepsilon^2 Z^2 - 144)}{\cos(\varepsilon k) D_3}, \quad a_2 = \frac{2Z^2}{D_3}, \quad a_3 = -\frac{1}{12} \frac{Z^3}{\cos(\varepsilon k) D_3}$, где $D_3 = 16 \cos^2(\varepsilon k) - Z^2 \varepsilon^2$.

При $n = 4, \quad a_1 = \frac{500}{3} \frac{Z \cos(\varepsilon k)(Z^2 \varepsilon^2 - 15)}{D_4}, \quad a_2 = -\frac{10}{3} \frac{Z^2(7Z^2 \varepsilon^2 - 150)}{D_4},$
 $a_3 = -\frac{100}{3} \frac{Z^3 \cos(\varepsilon k)}{D_4}, \quad a_4 = \frac{2}{3} \frac{Z^4}{D_4}$, где $D_4 = 11Z^4 \varepsilon^4 - 250Z^2 \varepsilon^2 + 3125 \cos^4(\varepsilon k)$.

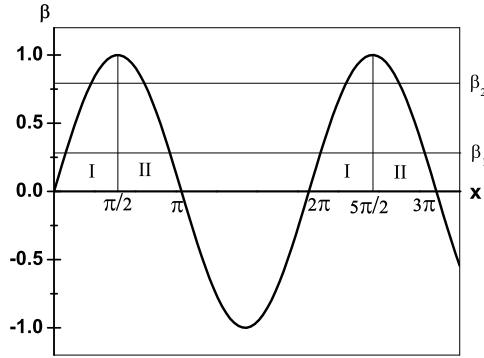
Таким образом, алгоритм нахождения собственных функций и собственных значений краевой задачи (3)–(5) сводится к следующему:

1. Для заданных значений ε и n ищем действительные и положительные (для удовлетворения граничному условию при $r \rightarrow \infty$ необходимо, чтобы $k > 0$) решения уравнения (7).
2. Из уравнения (8) находим собственные значения.
3. Подставляя найденные значения параметров k и $a_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, находим ненормированное решение (6), которое удовлетворит граничному условию $\psi'(0) = 1$.
4. Далее изучим свойства нормированных решений. Для этого умножим функцию ψ_n на константу A_n , которая находится из условия $A_n \sqrt{\int_0^\infty \psi_n^2 dr} = 1$.

При этом граничное условие $\psi'_n(0) = 1$ переходит в $\psi'_n(0) = A_n$.

Анализ действительных и положительных решений уравнения (7) проводим графически (рис. 1). Для этого вводим обозначения $x = \varepsilon k, \quad \beta = \frac{Z\varepsilon}{n+1}$ и перепишем уравнение (7) в виде

$$\sin(x) - \beta = 0. \quad (9)$$

Рис. 1. График функции $\sin(x)$ и β

Решениями трансцендентного уравнения (9) являются точки пересечений горизонтальных линий для различных значений β ($0 < \beta < 1$) графиком функции $\sin(x)$. Для любого фиксированного значения ε в интервале $0 < \varepsilon < \frac{n+1}{Z}$ существует бесконечное число положительных решений k уравнения (7), когда x находится в следующих подынтервалах:

$$2m\pi < x < \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi, \text{ - подынтервал I,}$$

$$\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi < x < (2m + 1)\pi, \text{ - подынтервал II, где } m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Мы специально разбили интервал на два подынтервала, так как решения в этих подынтервалах сильно отличаются друг от друга, что легче продемонстрировать для решений с различными узлами. Действительно, решения уравнения (7) в этих подынтервалах можно представить в виде

$$K_{mI} = \frac{1}{\varepsilon} \left(2m\pi + \arcsin \left(\frac{Z\varepsilon}{n+1} \right) \right),$$

$$K_{mII} = \frac{1}{\varepsilon} \left((2m + 1)\pi - \arcsin \left(\frac{Z\varepsilon}{n+1} \right) \right),$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

С учётом особенности решений в этих подынтервалах и используя уравнения (7) и (8), находим собственные значения E_n

$$E_n = -\alpha^2 = -\frac{2Z^2}{(n+1)^2} \frac{1}{\left[1 + \sqrt{1 - \frac{Z^2\varepsilon^2}{(n+1)^2}} \right]}$$

в подынтервале I и

$$E_n = -\alpha^2 = -\frac{2}{\varepsilon^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{Z^2\varepsilon^2}{(n+1)^2}} \right]$$

в подынтервале II.

Так как функция $\cos(\varepsilon k) > 0$ в подынтервале I и $\cos(\varepsilon k) < 0$ в подынтервале II, то, с учётом уравнения (7), выражения для a_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, перепишем в следующем виде:

$$\text{Для } n = 1 \quad a_1 = \pm \frac{Z}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Z^2 \varepsilon^2}{4}}},$$

где знак '+' принимает значение в подынтервале I, '-' — в подынтервале II.

$$\text{Для } n = 2 \quad a_1 = \mp \frac{18Z \sqrt{1 - \frac{Z^2 \varepsilon^2}{9}}}{D_2}, \quad a_2 = \frac{2Z^2}{D_2}, \quad \text{где } D_2 = 27 - 4Z^2 \varepsilon^2,$$

знак '-' принимает значение в подынтервале I, а '+' — в подынтервале II.

Для $n = 3$

$$a_1 = \pm \frac{1}{12} \frac{Z(11Z^2 \varepsilon^2 - 144)}{D_3 \sqrt{1 - \frac{Z^2 \varepsilon^2}{16}}}, \quad a_2 = \frac{2Z^2}{D_3}, \quad a_3 = \pm \frac{1}{12} \frac{-Z^3}{D_3 \sqrt{1 - \frac{Z^2 \varepsilon^2}{16}}},$$

где $D_3 = 2(8 - Z^2 \varepsilon^2)$, знак '+' принимает значение в подынтервале I, а '-' — в подынтервале II.

Для $n = 4$

$$a_1 = \pm \frac{500}{3} \frac{\sqrt{1 - \frac{Z^2 \varepsilon^2}{25}} (Z^2 \varepsilon^2 - 15)}{D_4}, \quad a_2 = -\frac{10}{3} \frac{Z^2 (7Z^2 \varepsilon^2 - 150)}{D_4},$$

$$a_3 = \pm \frac{100}{3} \frac{-Z^3 \sqrt{1 - \frac{Z^2 \varepsilon^2}{25}}}{D_4}, \quad a_4 = \frac{2}{3} \frac{Z^4}{D_4},$$

где $D_4 = 16Z^4 \varepsilon^4 - 500Z^2 \varepsilon^2 + 3125$, знак '+' принимает значение в подынтервале I, '-' — в подынтервале II.

Таким образом, мы получили точные аналитические решения поставленной задачи для $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Теперь обсудим основные свойства полученных решений.

А) При $\varepsilon \rightarrow 0$ в подынтервале I при $m = 0$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) все решения с различными узлами ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) и собственные значения полностью переходят в решение уравнения Шрёдингера, а при $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ собственные значения и точка пересечения узлов с осью так же стремятся к решению уравнения Шрёдингера, однако параметр K_m растёт при увеличении m . Поэтому все эти решения становятся погранслойными (т.е. при больших K_m , e^{-K_m} быстро затухает).

Б) При $\varepsilon \rightarrow 0$ в подынтервале II при всех $m = 0, 1, 2, \dots$ собственные значения стремятся к бесконечности, собственные функции являются безузловыми и погранслойными.

В) Для каждого типа решения с различными значениями n параметр ε меняется в интервале $0 < \varepsilon < \frac{n+1}{Z}$ (только при этих значениях ε уравнение (7) имеет действительные и положительные решения). При этом при определённых фиксированных значениях ε_i , $i = 1, 2, 3, 4$ параметры a_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ меняют свои знаки. В тех случаях, когда одновременно все параметры a_i меняют свои знаки (это происходит при тех значениях ε когда $D_j = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$), только в этом случае меняется количество узлов (т.е. меняется тип решения).

Для $n = 0$ решения в обоих подынтервалах являются безузловыми и при $\varepsilon \rightarrow \frac{1}{Z}$ эти решения (собственные значения и собственные функции) практически совпадают.

Для $n = 1$ решение в подынтервале I является одноузловым, и при $\varepsilon \rightarrow \frac{2}{Z}$ узел решения стремится к нулю, а в подынтервале II является безузловым.

Для $n = 2$ изменение типа решения происходит при значении $\varepsilon_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598076212$. В интервале $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ решение в подынтервале I является двухузловым, а при $\varepsilon_1 < \varepsilon < \frac{3}{Z}$ становится одноузловым. В интервале $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$,

решение в подынтервале II является безузловым и становится одноузловым при $\varepsilon_1 < \varepsilon < \frac{3}{Z}$. При $\varepsilon \rightarrow \frac{3}{Z}$ решения в обоих подынтервалах (собственные значения и собственные функции) практически совпадают.

Для $n = 3$ изменение типа решения происходит при значении $\varepsilon_2 = 2\sqrt{2} \approx 2.828427124$. В интервале $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ решение в подынтервале I является трёхузловым, а при $\varepsilon_2 < \varepsilon < \frac{4}{Z}$ становится двухузловым. Следует отметить, что при $\varepsilon \rightarrow \frac{4}{Z}$ один узел решения стремится к нулю (см. рис. 3b). В интервале $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ решение в подынтервале II является безузловым, а при $\varepsilon_2 < \varepsilon < \frac{4}{Z}$ становится одноузловым.

Для $n = 4$ изменение типа решения в обоих подынтервалах происходит два раза, один раз при $\varepsilon_3 = \frac{5}{4}\sqrt{10 - \sqrt{20}} \approx 2.938926261$, а второй раз при $\varepsilon_4 = \frac{5}{4}\sqrt{10 + \sqrt{20}} \approx 4.755282582$. В интервале $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$ в подынтервале I решение является четырёхузловым, а при $\varepsilon_3 < \varepsilon < \varepsilon_4$ становится трёхузловым. В интервале $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$ в подынтервале II решение является безузловым и становится одноузловым при $\varepsilon_3 < \varepsilon < \varepsilon_4$. Далее при $\varepsilon_4 < \varepsilon < \frac{5}{Z}$ в подынтервале I трёхузловое решение становится двухузловым, а в подынтервале II одноузловое решение становится двухузловым. При $\varepsilon \rightarrow \frac{5}{Z}$ решения в обоих подынтервалах (собственные значения и собственные функции) практически совпадают.

На рис. 2, 3 приведены некоторые свойства решений для $n = 3$ (трёхузловое решение).

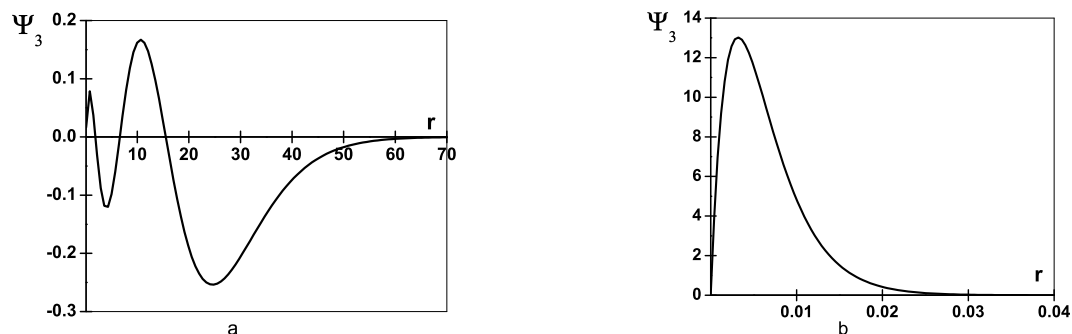


Рис. 2. Решения при $\varepsilon \rightarrow 0$: а — в подынтервале I (трёхузловое решение), б — в подынтервале II (безузловое и погранслойное решение)

4. Заключение

В работе, используя оператор сдвига $\exp\left(\pm i\varepsilon \frac{d}{dr}\right) f(r) = f(r \pm i\varepsilon)$, исследованы решения краевых задач для квазипотенциального уравнения с кулоновским потенциалом при различных значениях параметра ε . Разработан алгоритм нахождения аналитического решения поставленной задачи для любого количества узлов ($n = 0, 1, 2, \dots$). В явном виде приведены собственные значения и собственные функции для $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Исследована зависимость этих решений от параметра ε (рис. 4). Исследования проведены с использованием системы символьных вычислений MAPLE.

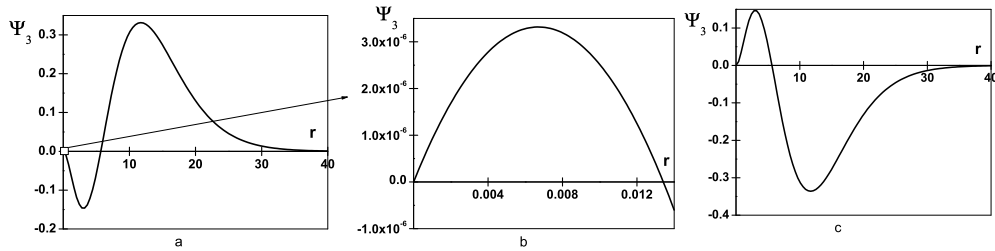


Рис. 3. Решения при $\varepsilon \rightarrow 4$: а — в подынтервале I (двухузловое решение), б — узел решения а, который стремится к нулю; с — в подынтервале II (одноузловое решение)

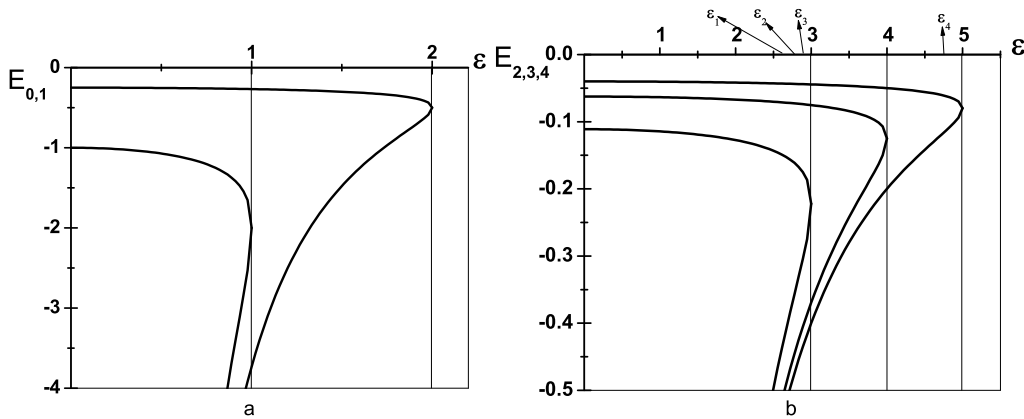


Рис. 4. Зависимость собственных значений E_n от параметра ε : а — при $n = 0, 1$ и б — при $n = 2, 3, 4$

Литература

1. Быков А. А., Дремлин И. М., Леонидов А. В. // УФН. — 1984. — Т. 143. — С. 3–32. [Bihkov A. A., Dremmin I. M., Leonidov A. V. // UFN. — 1984. — Т. 143. — S. 3–32.]
2. Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. // Nuovo. Cimento. A. — 1968. — Vol. 55. — Pp. 233–257.
3. Amirkhanov I. V., Zhidkov E. P., Konnova S. V. Computer Physics Communications the Factorization Method and Particular Solutions of the Relativistic Schrödinger Equation of n th Order ($n = 4, 6$). — 2000. — Vol. 126. — Pp. 12–15.
4. Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В. Исследование решения краевой задачи для сингулярно-возмущенного уравнения Шредингера // Сообщение ОИЯИ, P11-2000-154. — Дубна, 2000. — 10 с. [Amirkhanov I. V., Zhidkov E. P., Konnova S. V. Issledovanie resheniya kraevoyj zadachi dlya singulyarno-vozmuthennogo uravneniya Shredingera // Soobthenie OIYaI, P11-2000-154. — Dubna, 2000. — 10 s.]
5. Асимптотическая аппроксимация решений и собственных значений краевой задачи для сингулярно-возмущенного релятивистского аналога уравнения Шредингера / И. В. Амирханов, С. А. Васильев, Е. П. Жидков, И. Е. Жидкова // Дифф. Урав. — 2000. — Т. 37, № 1. — С. 83–90. [Asimptoticheskaya approksimaciya reshenijj i sobstvennikh znachenijj kraevoyj zadachi dlya singulyarno-vozmuthennogo relyativistskogo analoga uravneniya Shredingera / I. V. Amirkhanov, S. A. Vasiljev, E. P. Zhidkov, I. E. Zhidkova // Diff. Urav. —

2000. — Т. 37, № 1. — С. 83–90.]
6. Асимптотика собственных функций и собственных значений краевой задачи для сингулярно возмущенного релятивистского аналога уравнения Шредингера при произвольном потенциале / И. В. Амирханов, С. А. Васильев, Е. П. Жидков, И. Е. Жидкова // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, № 9. — С. 3–16. [Asimptotika sobstvennikh funktsiy i sobstvennikh znacheniy kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmuthennogo relyativistskogo analoga uravneniya Shredingera pri proizvoljnom potencie / I. V. Amirkhanov, S. A. Vasiljev, E. P. Zhidkov, I. E. Zhidkova // Matematicheskoe modelirovanie. — 2003. — Т. 15, № 9. — С. 3–16.]
 7. Исследование краевых задач для уравнения высокого порядка с малым параметром при старших производных / И. В. Амирханов, Е. П. Жидков, Н. Р. Саркар, И. Сархадов // Сообщение ОИЯИ P11-2004-147. — Дубна, 2004. — 22 с. [Issledovanie kraevihkh zadach dlya uravneniya vihsokogo porjadka s malim parametrom pri starshikh proizvodnikh / I. V. Amirkhanov, E. P. Zhidkov, N. R. Sarkar, I. Sarkhadov // Soobthenie OIYaI P11-2004-147. — Dubna, 2004. — 22 s.]
 8. Исследование краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка / И. В. Амирханов, Е. П. Жидков, Д. З. Музафаров и др. // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 11. — С. 65–79. [Issledovanie kraevihkh zadach dlya singulyarno-vozmuthennogo differencialjnogo uravneniya vihsokogo porjadka / I. V. Amirkhanov, E. P. Zhidkov, D. Z. Muzafarov и др. // Matematicheskoe modelirovanie. — 2007. — Т. 19, № 11. — С. 65–79.]
 9. Решение краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка / И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар и др. // Сообщение ОИЯИ P11-2007-148. — Дубна, 2007. — 16 с. [Reshenie kraevihkh zadach dlya singulyarno-vozmuthennogo differencialjnogo uravneniya vihsokogo porjadka / I. V. Amirkhanov, D. Z. Muzafarov, N. R. Sarkar и др. // Soobthenie OIYaI P11-2007-148. — Dubna, 2007. — 16 s.]
 10. Исследование решений краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка в поле кулоновского потенциала / И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар и др. — 2008. [Issledovanie resheniy kraevihkh zadach dlya singulyarno-vozmuthennogo differencialjnogo uravneniya vihsokogo porjadka v pole kulonovskogo potenciala / I. V. Amirkhanov, D. Z. Muzafarov, N. R. Sarkar и др. — 2008.]
 11. Исследование решений краевых задач для дифференциального уравнения высокого порядка в поле кулоновского потенциала / И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар и др. // Препринт ОИЯИ P11-2009-150. — 2009. [Issledovanie resheniy kraevihkh zadach dlya differencialjnogo uravneniya vihsokogo porjadka v pole kulonovskogo potenciala / I. V. Amirkhanov, D. Z. Muzafarov, N. R. Sarkar и др. // Preprint OIYaI P11-2009-150. — 2009.]
 12. Исследование решений краевых задач для дифференциального уравнения высокого порядка в поле кулоновского потенциала / И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар и др. // Вестник РУДН, сер. «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 3, вып. 2. — С. 16–20. [Issledovanie resheniy kraevihkh zadach dlya differencialjnogo uravneniya vihsokogo porjadka v pole kulonovskogo potenciala / I. V. Amirkhanov, D. Z. Muzafarov, N. R. Sarkar и др. // Vestnik RUDN, ser. «Matematika. Informatika. Fizika». — 2010. — No 3, вып. 2. — С. 16–20.]
 13. *Кадышевский В. Г., Мир-Касымов Р. М., Скачков Н. Б.* Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел // ЭЧАЯ. — 1972. — Т. 2, № 3. — С. 637. [*Kadihshevskiy V. G., Mir-Kasihmov R. M., Skachkov N. B.* Trekhmernaya formulirovka relyativistskoj problemih dvukh tel // EhChAYa. — 1972. — Т. 2, № 3. — С. 637.]

14. Жидков Е. П., Кадышевский В. Г., Катыхшев Ю. В. К вопросу о предельном переходе в релятивистском предельном переходе // ТМФ. — 1970. — Т. 3, № 2. — С. 191–196. [*Zhidkov E. P., Kadihshevskiy V. G., Katihshev Yu. V.* К вопросу о predel'nom perekhode v relyativistskom predel'nom perekhode // ТМФ. — 1970. — Т. 3, № 2. — С. 191–196.]
15. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. Сбор. — 1948. — Т. 22 (64), № 2. — С. 193–204. [*Tikhonov A. N.* О zavisimosti resheniy differentsial'nykh uravneniy ot malogo parametra // Matem. Sbor. — 1948. — Т. 22 (64), No 2. — S. 193–204.]
16. Тихонов А. Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. Сбор. — 1950. — Т. 27(69), № 1. — С. 147–156. [*Tikhonov A. N.* О sistemakh differentsial'nykh uravneniy, soderzhathikh parametrah // Matem. Sbor. — 1950. — Т. 27(69), No 1. — S. 147–156.]
17. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. — 1957. — Т. 12, вып. 5 (77). — С. 3–122. [*Vishik M. I., Lyusternik L. A.* Regulyarnoe vyzozhdenie i pogranchniy sloj dlya lineynykh differentsial'nykh uravneniy s malim parametrom // UMN. — 1957. — Т. 12, вып. 5 (77). — С. 3–122.]
18. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. [*Vasiljeva A. B., Butuzov V. F.* Asimptoticheskie metodih v teorii singulyarnykh vozmutheniy. — М.: Vihsshaya shkola, 1990.]

UDC 519.624.3

**Investigation of Solutions of Boundary Problems for the
Quasipotential Equation Using the Shift Operator**
**I. V. Amirkhanov, D. Z. Muzafarov, N. R. Sarker, I. Sarhadov,
Z. A. Sharipov**

*Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

The quasipotential equations are widely applied to the relativistic description of a system of two particles, for example, a quark and an antiquark. In the work, the solutions of boundary problems for the quasipotential equation with the Coulomb potential at various values of parameter ε are investigated with use of the shift operator. It is established that at $\varepsilon \rightarrow 0$ there is a solution which aspires to the Schrödinger equation solution. Besides, the so-called frontier layer solutions and transition of one type of the solution into another are found out. Investigations are carried out using the system of symbolical evaluations MAPLE.

Key words and phrases: quasipotential equation, boundary problem, shift operator, symbolic computing.