УДК 621.39

О стационарном распределении вероятностей состояний модели мультисервисной сети с тройной услугой

И. А. Гудкова

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

Современные мультисервисные сети неразрывно связаны с коммерческой концепцией «тройная услуга», при которой пользователю по высокоскоростному каналу одновременно предоставляются три услуги — телефония, телевидение и передача данных Интернет. Трафик, генерируемый этими услугами, можно также разделить на три типа — одноадресный (unicast), многоадресный (multicast) и эластичный (elastic). В статье построена модель звена мультисервисной сети с тройной услугой, получена приближенная формула для стационарного распределения вероятностей состояний и предложен точный алгоритм для расчёта характеристик при помощи снижения размерности решаемой задачи.

Ключевые слова: тройная услуга, звено сети, потоковый трафик, одноадресный трафик, многоадресный трафик, эластичный трафик, стационарное распределение, приближенный метод, точный алгоритм.

1. Введение

В настоящее время происходит процесс конвергенции сетей, а инфокоммуникационные компании разрабатывают новые стратегии для успешного предоставления новых услуг в сетях следующих поколений. Процесс такой конвергенции связан с коммерческой концепцией «тройная услуга» («triple play») [1], подразумевающей предоставление в одной сети одним провайдером услуг, которые можно разделить на три крупные категории — «голос», «видео» и «данные». Каждая категория фактически является пакетной услугой: «голос» — IP-телефония, Skype, SIP-телефония; «видео» — IPTV, видео по запросу, потоковое видео поверх одноранговых сетей P2P; «данные» — передача файлов, электронная почта, обмен мгновенными сообщениями.

Трафик, генерируемый столь разнообразными услугами, пользующимися различной степени популярностью, различается не только по объёму, но и чувствительностью к потерям пакетов, побитовой скоростью, временем передачи и пр. Потоковый трафик — это трафик реального времени с фиксированным временем передачи, тогда как для эластичного трафика важна передача блоков данных заданного объёма, причём время передачи может варьироваться в зависимости от загрузки сети. В табл. 1 показаны типы трафика, основные режимы передачи и примеры соответствующих услуг. Используя табл. 1, можно говорить о трёх типах трафика — «одноадресный потоковый трафик», «многоадресный потоковый трафик» и «эластичный трафик», причём эластичный трафик может использовать оба режима передачи, но в статье рассматривается только одноадресный режим.

С точки зрения анализа математических моделей, теория телетрафика развивается последовательно, шаг за шагом. Изначально специалисты предлагали модели только с одним типом трафика, например, как в [2–4]. Отметим, что модели только с эластичным трафиком описываются в терминах систем массового обслуживания (СМО) с дисциплиной разделения процессора (Processor Sharing, PS), а в обзоре С.Ф. Яшкова [5] даётся подробный анализ большинства из этих

Статья поступила в редакцию 27 июля 2011 г.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-07-00487-а).
Автор выражает благодарность д.т.н., профессору, заведующему кафедрой систем телекоммуникаций РУДН К.Е. Самуйлову за постановку задачи, полезные советы в процессе исследований и неоценимую помощь при подготовке статьи.

СМО. Позднее проводился анализ попарных комбинаций трафика — одноадресного и многоадресного [2, 6, 7], одноадресного и эластичного [8–10]. Для моделей с однородным трафиком были найдены аналитические решения и разработаны рекуррентные алгоритмы, чего нельзя сказать о моделях совместного обслуживания одноадресного и эластичного трафика, для которых пока известны лишь приближенные методы. Модель, учитывающая все три типа трафика, впервые была построена в [11], но точные алгоритмы там также предложены не были. В данной статье разработаны как приближенный метод (раздел 3), так и точный алгоритм (раздел 4) для анализа и расчёта модели звена сети с тремя типами трафика.

Таблица 1

Типы трафика и режимы передачи «тройной услуги»

Трафик	Одноадресный режим «точка – точка»	Многоадресный режим «точка – много точек»
Потоковый	Видео по требованию, IP-телефония, голосовая почта, онлайн прослушивание аудио-файлов, индивидуальные и групповые игры, обмен информацией бизнес-приложений с хранилищем данных	Вещательное телевидение IPTV, вещательное телевидение высокого качества HDTV, телевидение с оплатой за просмотр (pay per view), видеоконференции, широковещательное и потоковое радио
Эластичный	Поиск каналов IPTV, предварительная загрузка аудиофайлов для MP3-плееров, факс-приложения, оповещения службы мониторинга, передача гипертекста в формате HTML, обмен сообщениями SMS	Групповые игры с предоплатой лимита времени, приложения электронной коммерции, удалённое управление и мониторинг в домашней сети, обмен мгновенными сообщениями, рассылка электронной почты

2. Построение модели для отдельного звена сети с тройной услугой

Аналогично мультисервисным моделям, построенным в [2–4, 6, 7], рассматривается звено сети с C условными единицами канального ресурса (ЕКР), например, ЕКР = 1 бит/с. Также как и в [11], по звену передаётся одноадресный (u := unicast), многоадресный (m := multicast) и эластичный (e := elastic) трафик. Нагрузочные параметры модели определены в табл. 2. Предполагается, что входящие потоки являются пуассоновскими с интенсивностями λ_k, а длительности обслуживания распределены по экспоненциальному закону со средними μ_k^{-1}, причём запросы каждого типа трафика требуют b_k ЕКР, $k \in \{\mathrm{u},\ \mathrm{m},\ \mathrm{e}\}$. В случае одноадресного и многоадресного трафика число выделяемых для каждого соединения ЕКР не меняется, тогда как блоки эластичных данных всегда занимают всю оставшуюся ёмкость звена. В исследуемой нами модели каждый блок требует как минимум b_{e} ЕКР, в противном случае запрос на передачу блока данных будет потерян. Основное отличие между тремя типами трафика заключается в дисциплине их обслуживания. Запросы на установление одноадресных соединений обрабатываются по дисциплине FCFS (First Come — First Served). Запросы на установление многоадресного соединения обслуживаются по принципу «прозрачных заявок» [7], т.е. b_{m} ЕКР занимаются единожды при установлении соединения на все его время, пока хотя бы один запрос продолжает обслуживаться. Наконец, блоки эластичных данных разделяют все свободные ЕКР звена с дисциплиной EPS (Egalitarian PS) [5].

Таблица 2

Нагрузочные параметры модели

Параметр	Тип трафика	Описание
λ_k	$k = \mathrm{u}$	Интенсивность потока запросов на установление одноадресных соединений.
	$k = \mathrm{m}$	Интенсивность потока запросов на установление многоадресного соединения
	$k = \mathrm{e}$	Интенсивность потока запросов на передачу блоков эластичных данных
μ_k^{-1}	$k = \mathrm{u}$	Среднее время занятия одноадресного соединения [с]
	$k = \mathrm{m}$	Среднее время занятия многоадресного соединения [с]
	$k = \mathrm{e}$	Средняя длина блока эластичных данных [бит]
$\rho_k := \lambda_k \mu_k^{-1}$	$k = \mathrm{u}$	Предложенная нагрузка одноадресного трафика [Эрланг]
	$k = \mathrm{m}$	Предложенная нагрузка многоадресного трафика [Эрланг]
	$k = \mathrm{e}$	Предложенная нагрузка эластичного трафика [ЕКР]
b_k	$k = \mathrm{u}$	Требование к ЕКР одноадресного соединения
	$k = \mathrm{m}$	Требование к ЕКР многоадресного соединения
	$k = \mathrm{e}$	Требование к ЕКР блока эластичных данных
n_k	$k = \mathrm{u}$	Число установленных одноадресных соединений $n_{\mathrm{u}} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{C}{b_{\mathrm{u}}} \right\rfloor \right\}$
	$k = \mathrm{m}$	Состояние многоадресного соединения: $n_{\mathrm{m}} = 1$ обслуживание запроса(ов), $n_{\mathrm{m}} = 0$ в противном случае
	$k = \mathrm{e}$	Число передаваемых блоков эластичных данных $n_{\mathrm{e}} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{C}{b_{\mathrm{e}}} \right\rfloor \right\}$

Из изложенного следует, что пространство состояний модели звена сети с тройной услугой имеет вид

$$\mathcal{X} := \left\{ (n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}) : \quad 0 \leqslant \sum_{k \in \{\mathrm{u,\ m,\ e}\}} n_k b_k \leqslant C \right\}. \tag{1}$$

Функционирование рассматриваемой системы описывает марковский процесс над пространством состояний $\mathcal{X}$, и, учитывая [11], можно получить систему уравнений равновесия (СУР) в виде

$$p\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right)\left(\sum_{k\in\{\mathrm{u},\ \mathrm{e}\}} \lambda_k \cdot 1\left\{\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right) \notin \mathcal{B}_k\right\} + \right.$$
$$+ \lambda_{\mathrm{m}} \cdot 1\left\{\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right) \notin \mathcal{B}_{\mathrm{m}} \ \wedge \ n_{\mathrm{m}} = 0\right\} + n_{\mathrm{u}}\mu_{\mathrm{u}} + \lambda_{\mathrm{m}}\left(e^{\rho_{\mathrm{m}}} - 1\right)^{-1} \cdot 1\left\{n_{\mathrm{m}} = 1\right\} +$$
$$\left. + c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)\mu_{\mathrm{e}} \cdot 1\left\{n_{\mathrm{e}} > 0\right\}\right) = p\left(n_{\mathrm{u}} - 1, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right) \cdot \lambda_{\mathrm{u}} \cdot 1\left\{n_{\mathrm{u}} > 0\right\} +$$
$$+ p\left(n_{\mathrm{u}}, 0, n_{\mathrm{e}}\right) \cdot \lambda_{\mathrm{m}} \cdot 1\left\{n_{\mathrm{m}} = 1\right\} + p\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}} - 1\right) \cdot \lambda_{\mathrm{e}} \cdot 1\left\{n_{\mathrm{e}} > 0\right\} +$$
$$+ p\left(n_{\mathrm{u}} + 1, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right) \cdot \left(n_{\mathrm{u}} + 1\right)\mu_{\mathrm{u}} \cdot 1\left\{\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right) \notin \mathcal{B}_{\mathrm{u}}\right\} +$$
$$+ p\left(n_{\mathrm{u}}, 1, n_{\mathrm{e}}\right) \cdot \lambda_{\mathrm{m}}\left(e^{\rho_{\mathrm{m}}} - 1\right)^{-1} \cdot 1\left\{\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right) \notin \mathcal{B}_{\mathrm{m}} \ \wedge \ n_{\mathrm{m}} = 0\right\} +$$
$$+ p\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}} + 1\right) \cdot c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)\mu_{\mathrm{e}} \cdot 1\left\{\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right) \notin \mathcal{B}_{\mathrm{e}}\right\}, \quad \left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right) \in \mathcal{X}. \quad (2)$$

Здесь величина $c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right) := C - n_{\mathrm{u}}b_{\mathrm{u}} - n_{\mathrm{m}}b_{\mathrm{m}}$ является числом ЕКР, не занятых потоковым трафиком и $\mathcal{B}_k$, $k \in \{\mathrm{u},\ \mathrm{m},\ \mathrm{e}\}$ множества блокировок, определяемые формулами:

$$\mathcal{B}_k := \left\{ \left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right) \in \mathcal{X} : \quad \sum_{j\in\{\mathrm{u},\ \mathrm{m},\ \mathrm{e}\}} n_j b_j + b_k > C \right\}, \quad k \in \{\mathrm{u},\ \mathrm{e}\},$$
$$\mathcal{B}_{\mathrm{m}} := \left\{ \left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right) \in \mathcal{X} : \quad \sum_{j\in\{\mathrm{u},\ \mathrm{m},\ \mathrm{e}\}} n_j b_j + b_{\mathrm{m}} > C \ \wedge \ n_{\mathrm{m}} = 0 \right\}.$$

Заметим, что в отличие от классических моделей [2], решение СУР (2) не является мультипликативным, что связано с зависимостью интенсивности $\mu_{\mathrm{e}} \cdot c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)$ передачи блоков эластичных данных от состояния системы. Следовательно требуется разработка приближенных и точных методов расчёта стационарного распределения вероятностей состояний модели, что и сделано в следующих двух разделах статьи.

3. Приближенная формула для оценки стационарного распределения вероятностей состояний

Введём $\mathrm{P}\left\{n_{\mathrm{e}} = i_{\mathrm{e}} \mid n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right\}$ условную вероятность того, что в некоторый момент времени по звену сети передаются i_{e} блоков эластичных данных при условии, что установлено $n_{\mathrm{u}} \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{C}{b_{\mathrm{u}}} \right\rfloor\right\}$ одноадресных и $n_{\mathrm{m}} \in \{0,\ 1\}$ многоадресных соединений. Обозначим $P_{\mathrm{m}}\left(n_{\mathrm{u}}\right)$ вероятность того, что многоадресное соединение может быть установлено при условии, что установлено n_{u} одноадресных соединений, и пусть $P_{\mathrm{u}}\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)$ — вероятность того, что одноадресное соединение может быть установлено при условии, что установлено n_{u} одноадресных и $n_{\mathrm{m}} \in \{0,\ 1\}$ многоадресных соединений. Сформулированные ниже без доказательства леммы определяют формулы для распределения вероятностей $p\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}\right)$ состояний модели с тремя типами трафика.

Лемма 1. *Условное распределение числа блоков эластичных данных вычисляется по формуле*

$$\mathrm{P}\left\{n_{\mathrm{e}} = i_{\mathrm{e}} \mid n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right\} = \left(\frac{\rho_{\mathrm{e}}}{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)}\right)^{i_{\mathrm{e}}} \frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)^{\left\lfloor \frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}} \right\rfloor}\left(c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right) - \rho_{\mathrm{e}}\right)}{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)^{\left\lfloor \frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}} \right\rfloor + 1} - \rho_{\mathrm{e}}^{\left\lfloor \frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}} \right\rfloor + 1}},$$
$$i_{\mathrm{e}} = 0, \ldots, \left\lfloor \frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}} \right\rfloor, \quad n_{\mathrm{u}} = 0, \ldots, \left\lfloor \frac{C - n_{\mathrm{m}}b_{\mathrm{m}}}{b_{\mathrm{u}}} \right\rfloor, \quad n_{\mathrm{m}} = 0,\ 1. \quad (3)$$

Лемма 2. *Маргинальное распределение состояний одноадресных и многоадресного соединений вычисляется приближённо по формуле*

$$\mathrm{P}\left\{n_{\mathrm{u}}=i_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}=i_{\mathrm{m}}\right\}:=\sum_{i_{\mathrm{e}}=0}^{\left\lfloor \frac{C}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor} p\left(i_{\mathrm{u}}, i_{\mathrm{m}}, i_{\mathrm{e}}\right) \approx$$

$$\approx G^{-1}\cdot\left(\left(e^{\rho_{\mathrm{m}}}-1\right)^{i_{\mathrm{m}}} P_{\mathrm{m}}^{i_{\mathrm{m}}}\left(i_{\mathrm{u}}\right)\right)\left(\frac{\rho_{\mathrm{u}}^{i_{\mathrm{u}}}}{i_{\mathrm{u}}!}\prod_{j=0}^{i_{\mathrm{u}}-1} P_{\mathrm{u}}\left(j, i_{\mathrm{m}}\right)\right),$$

$$i_{\mathrm{u}}=0,\ldots,\left\lfloor\frac{C-i_{\mathrm{m}} b_{\mathrm{m}}}{b_{\mathrm{u}}}\right\rfloor,\quad i_{\mathrm{m}}=0,\ 1, \tag{4}$$

где

$$G:=\sum_{i_{\mathrm{u}}=0}^{\left\lfloor\frac{C}{b_{\mathrm{u}}}\right\rfloor} \frac{\rho_{\mathrm{u}}^{i_{\mathrm{u}}}}{i_{\mathrm{u}}!}\prod_{j=0}^{i_{\mathrm{u}}-1} P_{\mathrm{u}}(j, 0)+\sum_{i_{\mathrm{u}}=0}^{\left\lfloor\frac{C-b_{\mathrm{m}}}{b_{\mathrm{u}}}\right\rfloor}\left(\left(e^{\rho_{\mathrm{m}}}-1\right) P_{\mathrm{m}}\left(i_{\mathrm{u}}\right)\right)\cdot\left(\frac{\rho_{\mathrm{u}}^{i_{\mathrm{u}}}}{i_{\mathrm{u}}!}\prod_{j=0}^{i_{\mathrm{u}}-1} P_{\mathrm{u}}(j, 1)\right), \tag{5}$$

$$P_{\mathrm{m}}\left(n_{\mathrm{u}}\right):=\sum_{i_{\mathrm{e}}=0}^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, 1\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor} \mathrm{P}\left\{n_{\mathrm{e}}=i_{\mathrm{e}} \mid n_{\mathrm{u}}, 0\right\}=\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, 0\right)^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, 1\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor}\left(c\left(n_{\mathrm{u}}, 0\right)-\rho_{\mathrm{e}}\right)}{c\left(n_{\mathrm{u}}, 0\right)^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, 1\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor+1}-\rho_{\mathrm{e}}^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, 1\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor+1}} \times$$

$$\times \frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, 0\right)^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, 0\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor}\left(c\left(n_{\mathrm{u}}, 0\right)-\rho_{\mathrm{e}}\right)}{c\left(n_{\mathrm{u}}, 0\right)^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, 0\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor+1}-\rho_{\mathrm{e}}^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, 0\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor+1}},\quad n_{\mathrm{u}}=0,\ldots,\left\lfloor\frac{C}{b_{\mathrm{u}}}\right\rfloor, \tag{6}$$

$$P_{\mathrm{u}}\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right):=\sum_{i_{\mathrm{e}}=0}^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}+1, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor} \mathrm{P}\left\{n_{\mathrm{e}}=i_{\mathrm{e}} \mid n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right\}=$$

$$=\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}+1, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor}\left(c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)-\rho_{\mathrm{e}}\right)}{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}+1, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor+1}-\rho_{\mathrm{e}}^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}+1, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor+1}}\cdot\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor}\left(c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)-\rho_{\mathrm{e}}\right)}{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor+1}-\rho_{\mathrm{e}}^{\left\lfloor\frac{c\left(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}\right)}{b_{\mathrm{e}}}\right\rfloor+1}},$$

$$n_{\mathrm{u}}=0,\ldots,\left\lfloor\frac{C-n_{\mathrm{m}} b_{\mathrm{m}}}{b_{\mathrm{u}}}\right\rfloor,\quad n_{\mathrm{m}}=0,\ 1. \tag{7}$$

Теперь стационарное распределение состояний модели звена сети с тройной услугой может быть вычислено по формуле:

$$p\left(i_{\mathrm{u}}, i_{\mathrm{m}}, i_{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{P}\left\{n_{\mathrm{e}}=i_{\mathrm{e}} \mid n_{\mathrm{u}}=i_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}=i_{\mathrm{m}}\right\}\cdot \mathrm{P}\left\{n_{\mathrm{u}}=i_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}=i_{\mathrm{m}}\right\},$$

$$\left(i_{\mathrm{u}}, i_{\mathrm{m}}, i_{\mathrm{e}}\right)\in\mathcal{X}. \tag{8}$$

Заметим, что приближенное решение СУР (2) может быть найдено несколькими способами (см., например, [8–10]), но проведённые автором данной статьи численные исследования показали, что только распределение, вычисленное по формулам (3)–(8), подходит для расчёта основной характеристики модели — среднего времени передачи блока эластичных данных, при этом относительная погрешность вычислений составляет менее 1%.

4. Точный алгоритм для снижения размерности решаемой задачи

В данном разделе получен точный алгоритм для расчёта ненормированных вероятностей $q(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}})$ состояний модели звена сети с тремя типами трафика. Алгоритм, сформулированный в лемме 3, выписан в предположениях $b_{\mathrm{e}} < b_{\mathrm{u}}$ и $b_{\mathrm{e}} < b_{\mathrm{m}}$, которые основаны на реальных исходных данных для сетей с тройной услугой (см. книгу [1]).

Лемма 3. *Ненормированные вероятности состояний модели звена сети с тройной услугой вычисляются по формулам*

$$q(0,0,0) = 1, \tag{9}$$

$$q(n_{\mathrm{u}}, 0, 0) = X_{n_{\mathrm{u}},0}, \quad n_{\mathrm{u}} = 1, \ldots, \left\lfloor \frac{C}{b_{\mathrm{u}}} \right\rfloor, \tag{10}$$

$$q(n_{\mathrm{u}}, 1, 0) = X_{n_{\mathrm{u}},1}, \quad n_{\mathrm{u}} = 0, \ldots, \left\lfloor \frac{C - b_{\mathrm{m}}}{b_{\mathrm{u}}} \right\rfloor, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} q(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}) = \alpha_{00}(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}) + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{C}{b_{\mathrm{u}}} \right\rfloor} \alpha_{i0}(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}) \cdot X_{i0} + \\ + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{C-b_{\mathrm{m}}}{b_{\mathrm{u}}} \right\rfloor} \alpha_{i1}(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}) \cdot X_{i1}, \quad (n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}) \in \mathcal{X}, \ \ n_{\mathrm{e}} > 0. \end{gathered} \tag{12}$$

В формуле (12) коэффициенты $\alpha_{ij}(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}})$ вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\alpha_{ij}(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_{ij}(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}), & n_{\mathrm{e}} > 0, \ \ |n_{\mathrm{u}} - i - j| \leqslant n_{\mathrm{e}}, \\ 1, & n_{\mathrm{e}} = 0, \ \ i = n_{\mathrm{u}}, \ \ j = n_{\mathrm{m}}, \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

$$\begin{gathered} \tilde{\alpha}_{ij}(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}}) = \frac{1}{c(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}})\mu_{\mathrm{e}}} \left[\left(\lambda_{\mathrm{u}} \cdot 1 \left\{ \left\lfloor \frac{C - n_{\mathrm{m}} b_{\mathrm{m}} - (n_{\mathrm{e}} - 1) b_{\mathrm{e}}}{b_{\mathrm{u}}} \right\rfloor > n_{\mathrm{u}} \right\} + \right.\right. \\ + \lambda_{\mathrm{m}} \cdot 1 \left\{ n_{\mathrm{m}} = 0 \ \wedge \ 1 \left\{ \left\lfloor \frac{C - n_{\mathrm{u}} b_{\mathrm{u}} - (n_{\mathrm{e}} - 1) b_{\mathrm{e}}}{b_{\mathrm{m}}} \right\rfloor > 0 \right\} = 1 \right\} + \lambda_{\mathrm{e}} + \\ \left. + n_{\mathrm{u}} \mu_{\mathrm{u}} + \lambda_{\mathrm{m}} \left(e^{\rho_{\mathrm{m}}} - 1 \right)^{-1} \cdot 1 \{ n_{\mathrm{m}} = 1 \} + c(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}) \mu_{\mathrm{e}} \cdot 1 \{ n_{\mathrm{e}} \geqslant 2 \} \right) \cdot \alpha_{ij}(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}} - 1) - \\ - \lambda_{\mathrm{u}} \cdot 1 \{ n_{\mathrm{u}} > 0 \} \cdot \alpha_{ij}(n_{\mathrm{u}} - 1, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}} - 1) - \lambda_{\mathrm{m}} \cdot 1 \{ n_{\mathrm{m}} = 1 \} \cdot \alpha_{ij}(n_{\mathrm{u}}, 0, n_{\mathrm{e}} - 1) - \\ - \lambda_{\mathrm{e}} \cdot 1 \{ n_{\mathrm{e}} \geqslant 2 \} \cdot \alpha_{ij}(n_{\mathrm{u}}, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}} - 2) - (n_{\mathrm{u}} + 1) \mu_{\mathrm{u}} \times \\ \times 1 \left\{ \left\lfloor \frac{C - n_{\mathrm{m}} b_{\mathrm{m}} - (n_{\mathrm{e}} - 1) b_{\mathrm{e}}}{b_{\mathrm{u}}} \right\rfloor > n_{\mathrm{u}} \right\} \cdot \alpha_{ij}(n_{\mathrm{u}} + 1, n_{\mathrm{m}}, n_{\mathrm{e}} - 1) - \lambda_{\mathrm{m}} \left(e^{\rho_{\mathrm{m}}} - 1 \right)^{-1} \times \\ \left. \times 1 \left\{ n_{\mathrm{m}} = 0 \ \wedge \ 1 \left\{ \left\lfloor \frac{C - n_{\mathrm{u}} b_{\mathrm{u}} - (n_{\mathrm{e}} - 1) b_{\mathrm{e}}}{b_{\mathrm{m}}} \right\rfloor > 0 \right\} = 1 \right\} \cdot \alpha_{ij}(n_{\mathrm{u}}, 1, n_{\mathrm{e}} - 1) \right]. \end{gathered} \tag{13}$$

В формулах (10)–(12) величины X_{ij} являются решением системы линейных уравнений:

$$\beta_{00}(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m}) + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{C}{b_\mathrm{u}} \right\rfloor} \beta_{i0}(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m}) \cdot X_{i0} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{C-b_\mathrm{m}}{b_\mathrm{u}} \right\rfloor} \beta_{i1}(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m}) \cdot X_{i1} = 0,$$

$$n_\mathrm{u} = 1, \dots, \left\lfloor \frac{C}{b_\mathrm{u}} \right\rfloor \ \wedge \ n_\mathrm{m} = 0, \quad n_\mathrm{u} = 0, \dots, \left\lfloor \frac{C - b_\mathrm{m}}{b_\mathrm{u}} \right\rfloor \ \wedge \ n_\mathrm{m} = 1,$$

$$\beta_{ij}(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m}) = \Bigg(n_\mathrm{u}\mu_\mathrm{u} + \lambda_\mathrm{m} \left(e^{\rho_\mathrm{m}} - 1\right)^{-1} \cdot 1\{n_\mathrm{m} = 1\} + c(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m})\, \mu_\mathrm{e} \times$$
$$\times 1 \left\{ \left\lfloor \frac{c(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m})}{b_\mathrm{e}} \right\rfloor > 0 \right\} \Bigg) \cdot \alpha_{ij}\left(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m}, \left\lfloor \frac{c(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m})}{b_\mathrm{e}} \right\rfloor\right) - \lambda_\mathrm{u} \cdot 1\{n_\mathrm{u} > 0\} \times$$
$$\times \alpha_{ij}\left(n_\mathrm{u} - 1, n_\mathrm{m}, \left\lfloor \frac{c(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m})}{b_\mathrm{e}} \right\rfloor\right) - \lambda_\mathrm{m} \cdot 1\{n_\mathrm{m} = 1\} \cdot \alpha_{ij}\left(n_\mathrm{u}, 0, \left\lfloor \frac{c(n_\mathrm{u}, 1)}{b_\mathrm{e}} \right\rfloor\right) -$$
$$- \lambda_\mathrm{e} \cdot 1 \left\{ \left\lfloor \frac{c(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m})}{b_\mathrm{e}} \right\rfloor > 0 \right\} \cdot \alpha_{ij}\left(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m}, \left\lfloor \frac{c(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m})}{b_\mathrm{e}} \right\rfloor - 1\right). \quad (14)$$

После нормировки величин $q(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m}, n_\mathrm{e})$ получаем искомое стационарное распределение $p(n_\mathrm{u}, n_\mathrm{m}, n_\mathrm{e})$ вероятностей состояний модели.

Следствие 5. Алгоритм леммы 3 снижает размерность задачи (2) со значения

$$|\mathcal{X}| = \sum_{n_\mathrm{u}=0}^{\left\lfloor \frac{C}{b_\mathrm{u}} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{C - n_\mathrm{u} b_\mathrm{u}}{b_\mathrm{e}} \right\rfloor + \sum_{n_\mathrm{u}=0}^{\left\lfloor \frac{C-b_\mathrm{m}}{b_\mathrm{u}} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{C - n_\mathrm{u} b_\mathrm{u} - b_\mathrm{m}}{b_\mathrm{e}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{b_\mathrm{u}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C - b_\mathrm{m}}{b_\mathrm{u}} \right\rfloor + 2 \quad (15)$$

до значения $\left\lfloor \frac{C}{b_\mathrm{u}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C - b_\mathrm{m}}{b_\mathrm{u}} \right\rfloor + 1.$

Например, для близких к реальным исходных данных из [1] размерность исходной системы составляет порядка 10^7, а число уравнений в получаемой после применения алгоритма СУР — всего около 10^2. Заметим, что для частного случая модели звена сети с тройной услугой — модели с многоадресным и эластичным трафиком — система линейных уравнений (13)–(14) вырождается в одно уравнение, решение которого, следовательно, получается в явном виде.

5. Заключение

Таким образом, в статье построена модель звена мультисервисной сети с тройной услугой — тремя дисциплинами обслуживания одноадресного, многоадресного и эластичного трафика. Предложены два метода расчёта стационарного распределения вероятностей состояний модели. Первый метод (раздел 3) основан на приближенном вычислении маргинального распределения числа одноадресных и многоадресных соединений. Метод, предложенный в разделе 4 статьи, позволяет значительно снизить размерность задачи и представить её решение в виде линейной неоднородной комбинации вероятностей с рекуррентно рассчитываемыми коэффициентами.

Литература

1. *Hens F. J., Caballero J. M.* Triple Play: Building the Converged Network for IP, VoIP and IPTV. — Johns Wiley & Sons Ltd., 2008. — P. 416.
2. Новый этап развития математической теории телетрафика / Г. П. Башарин, К. Е. Самуйлов, Н. В. Яркина, И. А. Гудкова. — Москва: Академиздатцентр

«Наука» РАН, 2009. — С. 16–28. [Novihyj ehtap razvitiya matematicheskoyj teorii teletrafika / G. P. Basharin, K. E. Samuyjlov, N. V. Yarkina, I. A. Gudkova. — Moskva: Akademizdatcentr «Nauka» RAN, 2009. — S. 16–28.]
3. *Gaidamaka Y., Samouylov K.* Analytical Model of Multicast Network and Single Link Performance Analysis // Proc. of the 6-th International Conference on Telecommunications ConTEL-2001. — Zagreb, Croatia: 2001. — Pp. 169–175.
4. *Samouylov K. E., Gudkova I. A.* Recursive Computation for a Multi-Rate Model with Elastic Traffic and Minimum Rate Guarantees // Proc. of the International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT-2010. — Moscow, Russia: 2010. — Pp. 1065–1072.
5. *Яшков С. Ф.* Математические вопросы теории систем обслуживания с разделением процессора. — Москва: ВИНИТИ, 1990. — Т. 29. — С. 3–82. [*Yashkov S. F.* Matematicheskie voprosih teorii sistem obsluzhivaniya s razdeleniem processora. — Moskva: VINITI, 1990. — T. 29. — S. 3–82.]
6. *Samouylov K., Yarkina N.* Blocking Probabilities in Multiservice Networks with Unicast and Multicast Connections // Proc. of the 7-th International Conference on Telecommunications ConTEL-2005. — Zagreb, Croatia: 2005. — Pp. 423–429.
7. *Gudkova I. A., Plaksina O. N.* Performance Measures Computation for a Single Link Loss Network with Unicast and Multicast Traffics / Ed. by S. Balandin, R. Dunaytsev, Y. Koucheryavy. — Germany, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. — Vol. 6294. — Pp. 256–265.
8. *Bonald T., Proutière A.* On Performance Bounds for the Integration of Elastic and Adaptive Streaming Flows // Proc. of the Joint International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems Sigmetrics–Performance-2004. — Vol. 32, No 1. — New York, USA: 2004. — Pp. 235–245.
9. Admission Control for Differentiated Services in Future Generation CDMA Networks / H.-P. Tan, R. Núñez Queija, A. F. Gabor, O. J. Boxma. — Elsevier Science, 2009. — Vol. 66, No 9–10. — Pp. 488–504.
10. *Karray M. K.* Analytical Evaluation of QoS in the Downlink of OFDMA Wireless Cellular Networks Serving Streaming and Elastic Traffic. — 2010. — Vol. 9, No 5. — Pp. 1799–1807.
11. *Gudkova I. A., Samouylov K. E.* Approximating Performance Measures of a Triple Play Loss Network Model / Ed. by S. Balandin, R. Dunaytsev, Y. Koucheryavy. — Germany, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. — Vol. 6869. — Pp. 360–369.

UDC 621.39

On the Stationary Probability Distribution for a Multi-Service Model of the Triple Play Network

I. A. Gudkova

Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia

Modern multi-service networks are inseparably linked with the commercial concept "triple play" that implies simultaneous provisioning of telephony, television and data transmission over a single broadband connection. These services generate traffics of three types — unicast streaming, multicast streaming and elastic traffics. In this paper, we propose a multi-service model of a triple play single-link network; we obtained an approximate formula for the stationary probability for the model; and finally, we find an exact algorithm for calculating performance measures by reducing the dimension of the problem.

Key words and phrases: triple play, single-link, streaming traffic, unicast traffic, multicast traffic, elastic traffic, stationary probability distribution, approximation, exact algorithm.