УДК 519.24

Об асимптотической несмещённости оценки L_T линейного функционала от спектральной плотности $L(f)$ стационарного гауссовского процесса

А. Ю. Шомахов

Кафедра Высшей математики
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
Стремянной пер. д. 36, 117997, Москва, Россия

Для вещественнозначного стационарного гауссовского центрированного процесса $X(t)$, $t \in R$, $R = (-\infty; +\infty)$, имеющего спектральную плотность $f(\lambda)$, рассматривается проблема асимптотической несмещённости оценки (статистики) $L_T = \int \varphi(\lambda)\, I_T(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$, $\lambda \in (-\infty; +\infty)$, где $I_T(\lambda)$ – периодограмма процесса $X(t), t \in R$, линейного функционала от спектральной плотности $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$ стационарного гауссовского центрированного процесса на основе выборки $\{X(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Ключевые слова: стационарный процесс, периодограмма процесса, спектральная плотность, спектральное среднее, асимптотическая несмещённость, сингулярный интеграл Фейера, ядро Фейера.

Пусть $X(t), t \in R$, $R = (-\infty; +\infty)$ — стационарный гауссовский центрированный процесс, обладающий спектральной плотностью $f(\lambda)$ с $f(-\lambda) = f(\lambda)$, т.е.

$$EX(t) = 0, \quad t \in R, \tag{1}$$

$$EX(t)\,X(t') = K(t,t') = cov\,(X(t), X(t')) = k(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-t')} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \tag{2}$$

где E — оператор математического ожидания; $t, t' \in R$, а $K(t,t') = k(t-t')$ — ковариационная функция процесса $X(t), t \in R$.

Процесс $X(t), t \in R$ предполагаем вещественнозначным (действительным). Так как рассматривается стационарный процесс с непрерывным временем, то областью изменения переменной t является вещественная (действительная) ось $R = (-\infty; +\infty)$. Область изменения Q переменной λ (частоты) также вещественная (действительная) ось $Q = (-\infty; +\infty)$. Рассмотрим так называемое *спектральное среднее* процесса $X(t), t \in R$, т.е. линейный функционал $L(f)$ вида [1, 2]

$$L(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda, \tag{3}$$

где $\varphi(\lambda)$ — суммируемая функция, называемая *спектрально-усредняющей* функцией. В дальнейшем будем предполагать, что спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda)$ вещественная и чётная.

Если $\varphi(\lambda)$ — индикатор полуинтервала $(-\infty; \mu]$, то

$$L(f) = \int_{-\infty}^{\mu} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = F(\mu),$$

Статья поступила в редакцию 16 мая 2011 г.

где $F(\mu)$ — спектральная функция процесса $X(t), t \in R$.

Если $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda\left(t-t'\right)}$, то

$$L(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\left(t-t'\right)} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = k(t-t'),$$

где $k(t-t')$ — ковариационная функция процесса $X(t)$, $t \in R$.

В качестве оценки $L(f)$ будем рассматривать статистику L_T вида [2, 3]

$$L_T = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, I_T(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{4}$$

где $I_T(\lambda)$ — *периодограмма* процесса $X(t)$, $t \in R$, которая имеет следующий вид

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\int\limits_0^T X(t)\, e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t\right|^2. \tag{5}$$

Оценка L_T функционала $L(f)$ называется *асимптотически несмещённой*, если

$$\lim_{T\to\infty}\left[E(L_T) - L(f)\right] = 0, \tag{6}$$

где E — оператор математического ожидания.

В работе [4] показана асимптотическая несмещённость оценки L_N, где N — объем выборки, когда $\varphi(\lambda)$ ограничена, т.е. $|\varphi(\lambda)| \leqslant C < \infty$, в предположении, что спектральная плотность $f(\lambda)$ существует, причём $F'(\lambda) = f(\lambda)$ для процессов с дискретным временем.

Доказательство этой теоремы для процессов с дискретным временем основано на так называемой теореме Егорова, имеющей фундаментальное значение в теории функций действительного переменного (действительном анализе).

Цель настоящей работы — формулировка и доказательство соответствующей теоремы для процессов с непрерывным временем. Предложенное ниже доказательство об асимптотической несмещённости оценки (4), когда $\varphi(\lambda)$ ограничена, т.е. $|\varphi(\lambda)| \leqslant C < \infty$, в предположении, что спектральная плотность $f(\lambda)$ существует, причём $F'(\lambda) = f(\lambda)$ для процессов с непрерывным временем не является аналогом доказательства теоремы для процессов с дискретным временем. В частности, в нем отсутствует теорема Егорова, предполагающая знание теории меры, т.е. рассчитанная на достаточно подготовленного читателя, что не всегда является преимуществом. Предложенное доказательство опирается на такое средство представления функций как *сингулярный интеграл Фейера*, порождённый и стремящейся при $T \to \infty$ к функции (спектральной плотности) $f(\lambda)$, и на вспомогательную лемму, формулировка и доказательство которой будут приведены ниже.

Рассматриваемая проблема является частью общей проблемы непараметрического статистического оценивания $L(f)$ на основе выборки $\{X(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ или, по-другому, по наблюдённому отрезку траектории $X(t), 0 \leqslant t \leqslant T$.

Замечание. Далее через C будут обозначены различные положительные постоянные.

Для доказательства представленной ниже теоремы приведём некоторые предварительные результаты.

Функция $F_T\,(u)$, называемая *ядром Фейера*, определяется следующим образом:

$$F_T\,(u) = \frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\sin\frac{Tu}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2, u \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty)\,; \quad F_T\,(0) = \frac{T}{2\pi}. \tag{7}$$

Лемма 1. *Определённое по (7) ядро $F_T\,(u)$ является чётным, неотрицательным и обладает следующими свойствами:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T\,(u)\,\mathrm{d}u = 1\,; \tag{8}$$

для любого $\delta > 0$ при $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_{Q/[-\delta;+\delta]} |F_T\,(u)|\,\mathrm{d}u = 0, \tag{9}$$

где $Q = (-\infty;+\infty)$.

Доказательство (8) приведено, например, в [5, 6].

Докажем свойство (9).

Доказательство.

$$\int\limits_{Q/[-\delta;\delta]} |F_T\,(u)|\,\mathrm{d}u = \int\limits_{Q/[-\delta;\delta]} \left|\frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\sin\frac{Tu}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2\right|\mathrm{d}u = \left[\frac{Tu}{2} = \alpha, u = \frac{2\alpha}{T}, \mathrm{d}u = \frac{2\mathrm{d}\alpha}{T}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi T}\int\limits_{Q/\left\{|\alpha|\leqslant\frac{T\delta}{2}\right\}} \left|\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}T^2\right|\frac{2\mathrm{d}\alpha}{T} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{Q/\left\{|\alpha|\leqslant\frac{T\delta}{2}\right\}} \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{Q/\left\{-\frac{T\delta}{2}\,\leqslant\,\alpha\leqslant\,\frac{T\delta}{2}\right\}} \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\mathrm{d}\alpha.$$

Тогда при $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_{Q/[-\delta;\delta]} |F_T(u)|\;\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{Q/\left\{-\frac{T\delta}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{T\delta}{2}\right\}} \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\;\mathrm{d}\alpha\; = 0$$

Свойство (9) леммы доказано. □

Перейдём теперь к формулировке и доказательству поставленной задачи.

Теорема. *Пусть функция $\varphi\;(\lambda)$ ограничена, т.е. $|\varphi\,(\lambda)| \leqslant C < \infty$, а случайный процесс $X(t)$, $t \in R$ такой, что спектральная плотность $f\;(\lambda)$ существует. Тогда при $T \to \infty$*

$$\lim_{T\to\infty}\left[E\;(L_T) - L(f)\right] = 0,$$

т.е. (4) является асимптотически несмещённой оценкой функционала (3).

Доказательство.

$$E\left(L_T\right) = E\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\lambda\right) I_T\left(\lambda\right) \mathrm{d}\lambda\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\lambda\right) E I_T\left(\lambda\right) \mathrm{d}\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\lambda\right) f_T\left(\lambda\right) \mathrm{d}\lambda\,, \tag{10}$$

где $f_T\left(\lambda\right) = E I_T\left(\lambda\right)$.

Далее, учитывая тот факт, что $f_T\left(\lambda\right)$ представима в виде *сингулярного интеграла Фейера* вида [7]

$$f_T\left(\lambda\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)\, f\left(\lambda + u\right) \mathrm{d}u\,, \tag{11}$$

получим, что

$$E\left(L_T\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\lambda\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T\left(u\right) f\left(\lambda + u\right) \mathrm{d}u\, d\lambda. \tag{12}$$

Далее, учитывая (8), получим, что

$$L(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\lambda\right) f(\lambda) \mathrm{d}\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\lambda\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) \mathrm{d}u f(\lambda) \mathrm{d}\lambda,$$

т.е.

$$L(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\lambda\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}\lambda. \tag{13}$$

Тогда, учитывая (12) и (13), получим, что

$$\begin{aligned}
&\left|E(L_T) - L(f)\right| = \\
&= \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\lambda\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u) f(\lambda + u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}\lambda - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\lambda\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)\, f(\lambda)\, \mathrm{d}u \mathrm{d}\lambda \right| = \\
&= \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\lambda\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(F_T(u) f(\lambda + u) - F_T(u) f(\lambda)\,\right) \mathrm{d}u \mathrm{d}\lambda \right| \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi\left(\lambda\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)(f(\lambda + u) - f(\lambda)) \mathrm{d}u \right| \mathrm{d}\lambda = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi\left(\lambda\right)\right| \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_T(u)\, \left(f(\lambda + u) - f(\lambda)\right) \mathrm{d}u \right| \mathrm{d}\lambda \leqslant \\
&\leqslant C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|F_T(u) \left(f(\lambda + u) - f(\lambda)\right)\right| \mathrm{d}u \mathrm{d}\lambda = \\
&= C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f(\lambda + u) - f(\lambda)\right|\; \left|F_T(u)\,\right| \mathrm{d}u \mathrm{d}\lambda =
\end{aligned}$$

$$= C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\, F_T(u)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}\lambda =$$

$$= C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\, \mathrm{d}\lambda\; F_T(u)\, \mathrm{d}u =$$

$$= C \int\limits_{\{|u|\leqslant\delta_0\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\, \mathrm{d}\lambda\; F_T(u)\mathrm{d}u +$$

$$+ C \int\limits_{Q/\{|u|\leqslant\delta_0\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\, \mathrm{d}\lambda\; F_T(u)\mathrm{d}u,$$

где $Q = (-\infty; +\infty)$.

Итак,

$$|E(L_T) - L(f)| = \left| E \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,(\lambda)\, I_T(\lambda)\mathrm{d}\lambda - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,(\lambda) f(\lambda)\mathrm{d}\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\{|u|\leqslant\delta_0\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\, \mathrm{d}\lambda\, F_T(u)\mathrm{d}u +$$

$$+ C \int\limits_{Q/\{|u|\leqslant\delta_o\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\, \mathrm{d}\lambda\; F_T(u)\mathrm{d}u, \quad (14)$$

где $Q = (-\infty; +\infty)$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как

$$\underset{\{|u|\leqslant\delta\}}{sup} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\, \mathrm{d}\lambda \downarrow 0 \text{ при } \delta \downarrow 0,$$

то можно подобрать такое $\delta_0 \geqslant 0$, что

$$C \int\limits_{\{|u|\leqslant\delta_o\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\, \mathrm{d}\lambda\; F_T(u)\; \mathrm{d}u \leqslant$$

$$\leqslant C \underset{\{|u|\leqslant\delta_o\}}{sup} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\, \mathrm{d}\lambda \int\limits_{-\delta_o}^{\delta_o} F_T(u)\; \mathrm{d}u < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

Далее, поскольку интегрирование ведётся по всей действительной (вещественной) оси, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u)|\, \mathrm{d}\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|\, \mathrm{d}\lambda,\ \text{-}\infty <\ u\ < +\infty.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u)|\,\mathrm{d}\lambda + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |-f(\lambda)|\mathrm{d}\lambda =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u)|\,\mathrm{d}\lambda + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|.\mathrm{d}\lambda.$$

Тогда, учитывая (9), получим, что

$$C \int\limits_{Q/\{|u|\leqslant\delta_o\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda\, F_T(u)\,\mathrm{d}u \leqslant$$
$$\leqslant C\ 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda \int\limits_{Q/\{|u|\leqslant\delta_o\}} F_T(u)\,\mathrm{d}u < \frac{\varepsilon}{2} \quad (16)$$

при достаточно большом T.

Итак, учитывая (15) и (16), получим, что

$$|E(L_T) - L(f)| = \left| E\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, I_T(\lambda)\mathrm{d}\lambda - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) f(\lambda)\mathrm{d}\lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем, что $\lim\limits_{\substack{T\to\infty\\ E}} (L_T) = L(f)$, то есть

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ E}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\ I_T(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) f(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

Теорема доказана. □

Литература

1. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — М.: Наука, 1985. [*Rozanov Yu. A.* Teoriya veroyatnosteyj, sluchayjnihe processih i matematicheskaya statistika. — M.: Nauka, 1985.]
2. *Гиновян М. С.* Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули // Теор. вероятн. и ее применен. — 1988. — Т. 33, вып. 2. — С. 315–322. [*Ginovyan M. S.* Asimptoticheski ehffektivnoe neparametricheskoe ocenivanie funkcionalov ot spektraljnoyj plotnosti, imeyutheyj nuli // Teor. veroyatn. i ee primenen. — 1988. — T. 33, вып. 2. — S. 315–322.]
3. *Гиновян М. С.* Об оценке значения линейного функционала от спектральной плотности стационарного гауссовского процесса // Теор. вероятн. и ее примен. — 1988. — Т. 33, вып. 4. — С. 777–781. [*Ginovyan M. S.* Ob ocenke znacheniya lineyjnogo funkcionala ot spektraljnoyj plotnosti stacionarnogo gaussovskogo processa // Teor. veroyatn. i ee primen. — 1988. — T. 33, вып. 4. — S. 777–781.]

4. *Ибрагимов И. А.* Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса // Теор. вероятн. и ее примен. — 1963. — Т. 8, вып. 4. — С. 391–430. [*Ibragimov I. A.* Ob ocenke spektraljnoyj funkcii stacionarnogo gaussovskogo processa // Teor. veroyatn. i ee primen. — 1963. — T. 8, вып. 4. — S. 391–430.]
5. *Butzer P. L., Nessel R. J.* Fourier analysis and approximation. — New York and London: Academic Press, 1971. — 547 p.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с. [*Nikoljskiyj S. M.* Priblizhenie funkciyj mnogikh peremennihkh i teoremih vlozheniya. — M.: Nauka, 1969. — 480 s.]
7. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — 2 издание. — М.: Издательство МЦНМО, 2004. — 408 с. [*Shiryaev A. N.* Veroyatnostj. — 2 издание. — M.: Izdateljstvo MCNMO, 2004. — 408 s.]

UDC 519.24

On Asymptotic Unbiasedness of the Estimator for the Linear Functional of Spectral Density of Stationary Gaussian Process

A. Yu. Shomakhov

Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny per. 36, 117997, Moscow, Russian

For the real-valued stationary Gaussian centered process $X(t)$, $t \in R$, $R = (-\infty; +\infty)$, having a spectral density $f(\lambda)$, a problem of asymptotic unbiasedness is considered for the estimator (statistics) $L_T = \int \varphi(\lambda) I_T(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$, $\lambda \in (-\infty; +\infty)$, where is $I_T(\lambda)$ a periodogram of a process, for the linear functional of the spectral density $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$ of the stationary Gaussian centered process based on the sample $\{X(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Key words and phrases: stationary process, periodogram of a process, spectral density, spectral mean, asymptotic unbiasedness, Feuer singular integral, Feuer kernel.