УДК 519.633.2

О моделях с парциальным распределением точности

М. Д. Малых

Факультет наук о материалах
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, Корпус «Б», Москва, 119991, Россия

Большинство моделей, описывающих какие-либо колебательные процессы, имеют парциальное распределение точности, т.е. эти модели описывают эволюцию нормальной моды тем хуже, чем выше её номер. Поэтому вопрос о сходимости ряда по нормальным волнам, занимающий центральное место при классическом подходе, неизбежно выводит за рамки применимости модели. Традиционно в этом видят недостаток моделей — ещё одно из многих затруднение на пути доказательства сходимости ряда и существования классического решения.

В этой статье предложен новый подход к описанию таких моделей. Изложение проиллюстрировано конкретным примером простейшей модели с парциальным распределением точности — задачи о колебании струны. В таких задачах всегда имеется некоторая неопределённость в начальных условиях. Так, обычно профиль начальных скоростей, используемый для описания удара молоточком, считают ступенчатой функцией или «шапочкой», но можно рассмотреть и целый класс подходящих профилей, а, следовательно, и целое семейство начально-краевых задач. Эта неопределённость в начальных условиях позволяет оценить ошибку для каждой моды в отдельности. Как и следовало ожидать, ошибка растёт при увеличении номера гармоники и даже становится бесконечно большой в пределе. Все решения рассматриваемого семейства задач можно разложить в ряд по нормальным волнам, в нем младшие моды имеют близкие амплитуды. Это позволяет сохранить все классические утверждения о младших модах, но избежать трудного и выводящего за рамки модели исследования сходимости ряда по нормальным волнам.

Ключевые слова: математическая модель, колебания, струна, нормальные моды, нормальные волны.

1. Модели с парциальным распределением точности

При моделировании колебательных процессов в самых разнообразных областях физики, от механики до электродинамики, решение ищут в виде разложения по нормальным волнам [1–3]. Оперирование с такими рядами уже дважды потребовало расширить само понятие решения. Так, в ходе знаменитого «спора о струне» пришлось сначала признать функциями ряды, возникающие при моделировании колебаний струны, но не доставляющие аналитические функции [4], а затем признать решениями элементы из пространства Соболева [5]. При этом на каждом этапе в центре внимания был вопрос о сходимости в том или ином смысле ряда по нормальным волнам. Однако практикам хорошо известно, что чем старше мода, тем хуже используемая модель описывает её эволюцию. Такие модели мы предлагаем называть *моделями с парциальным распределением точности*. Вопрос о сходимости ряда по нормальным волнам, то есть об амплитудах старших мод, неизбежно выводит за рамки применимости математической модели. Традиционно в этом видят недостаток моделей, ещё одно из многих затруднение на пути доказательства сходимости ряда и существования классического решения. В этой статье на конкретном примере простейшей модели с парциальным распределением точности — задачи о колебаниях струны — будет показано, как можно использовать такое распределение точности во благо.

Статья поступила в редакцию 5 мая 2013 г.

2. Пример: задача о колебаниях струны

Простейшая модель, описывающая удар молоточком толщины 2δ по струне в точке $x = c$, приводит к начально-краевой задаче [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\, t > 0) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} v, & |x-c| < \delta, \\ 0, & |x-c| > \delta. \end{cases} \end{cases}$$

По методу Фурье решение этой задачи даётся рядом

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (\omega_n \sim n),$$

где ψ_n — коэффициенты Фурье профиля начальных скоростей:

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} v \sin \frac{\pi n x}{l} \mathrm{d}x = \frac{4v}{\pi} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi n \delta}{l}.$$

При малых t в месте удара быстро возникает горб, который движется через центр струны к противоположному её концу со скоростью a, от него отражается, опрокидывается, возвращается назад и снова опрокидывается. Поскольку мгновенный профиль начальных скоростей изначально выбран разрывным, задача не имеет классического решения: горб имеет треугольную форму.

Забыв о происхождении модели, можно легко избавиться от этого затруднения, интерпретировав выписанный ряд как обобщённое решение [5], гл. IV, §3. Проблема, однако, в том, что в рамках используемой модели струна, то есть «гибкая нить», совершенно не сопротивляется изгибанию, чем и отличается от реальный струны, мгновенный профиль которой много глаже. Получить более гладкое решение можно, заметив, что на самом деле профиль начальных скоростей нам в точности не известен и поэтому его можно сгладить. Тут возникают два вопроса:

1. Как зависит решение от способа сглаживания начальных данных?
2. Существует ли классическое решение при сглаженных начальных данных?

Традиционно второй вопрос считают главным, а первый сводят к исследованию устойчивости задачи по начальным данным в норме L^2.

Попробуем, однако, начать с первого вопроса. Про мгновенный профиль скоростей

$$u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

придаваемых струне ударом в точке $x = c$ молоточком малой ширины 2δ, с уверенностью можно сказать следующее: скорость равна нулю вне молоточка, то есть при $|x - c| \geqslant \delta$, имеет единственный положительный максимум при $x = c$ и распределена симметрично относительно $x = c$. Будем считать ещё, что функция ψ имеет разрывы разве лишь в точках $x = c \pm \delta$, а сила удара, характеризуемая импульсом

$$p = 2\rho \int\limits_{c}^{c+\delta} \psi(x) \mathrm{d}x,$$

переданным струне, постоянна. Сразу бросается в глаза, что описанный класс не совпадает с классом функций, близких в норме $L^2(0,l)$ к

$$\psi_0(x) = \begin{cases} v, & |x-c| < \delta \\ 0, & |x-c| > \delta \end{cases}$$

Сравним коэффициенты Фурье при произвольном профиле начальных скоростей из описанного класса с вычисленными выше коэффициентам Фурье. По теореме о среднем коэффициент Фурье

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} \psi(x) \sin\frac{\pi n x}{l} \mathrm{d}x = \frac{2}{l} \sin\frac{\pi n \xi_n}{l} \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} \psi(x) \mathrm{d}x$$

где ξ_n — точка отрезка $(c-\delta, c+\delta)$. По теореме о конечных приращениях

$$\left| \sin\frac{\pi n \xi_n}{l} - \sin\frac{\pi n c}{l} \right| \leqslant \frac{\pi n}{l}\delta,$$

поэтому ψ_n отличается от «среднего» коэффициента

$$\overline{\psi}_n = \frac{4}{l} \sin\frac{\pi n c}{l} \int\limits_{0}^{c+\delta} \psi(x)\mathrm{d}x = \frac{2p}{\rho l} \sin\frac{\pi n c}{l}$$

на величину, не превышающую $\dfrac{2p}{\rho l}\dfrac{\delta}{l}\pi n$.

Если толщина молоточка мала, то и амплитуды младших гармоник в разложении решения в ряд Фурье

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\omega_n t \sin\frac{\pi n}{l} x$$

мало отличаются от средних значений $\overline{\psi}_n$, то есть слабо зависят от выбора начального профиля. В частности, поэтому можно пользоваться вычисленными выше амплитудами гармоник для кусочно-постоянной ψ. Чем старше гармоника, то есть чем больше n, тем шире интервал, в который попадает амплитуда ψ_n. Так и должно быть: для гладких функций ϕ коэффициенты Фурье убывают быстрее любой степени $1/n$ и, следовательно, характер их зависимости от n принципиально отличается от случая с разрывными начальными данными.

Таким образом, отвечая на первый вопрос, мы утверждаем, что амплитуды гармоник можно вычислить лишь приближённо:

$$\psi_n = \frac{2p}{\rho l}\left(\sin\frac{\pi n c}{l} \pm \frac{\delta}{l}\pi n \right),$$

причём ошибка растёт с ростом номера гармоники. В тех задачах, в которых важен не мгновенный профиль струны, а спектральный состав её колебаний, все равно, как именно распределяется начальная скорость от точки удара к краям молоточка, и можно довольствоваться этими формулами.

Замечательно, что музыкальная акустика как раз относится к такого рода задачам. Например, простейшая модель позволяет объяснить правило борьбы со старшими обертонами: для того, чтобы 7-я гармоника не была слышна, ударяют в крайний узел 7-й гармоники, то есть $c = \frac{l}{7}$, поскольку тогда

$$\sin\frac{\pi n c}{l} = \sin\frac{\pi n}{7} = 0$$

и $\psi_7 = 0$.

Разумеется, существуют другие задачи, в которых мгновенный профиль струны важен и важно доказать существование классического решения. С формальной точки зрения для их рассмотрения достаточно сузить класс, которому принадлежат начальные данные, потребовав существование второй производной от ψ. Однако эта производная характеризует изгиб струны, а сама модель струны как гибкой нити тем и плоха, что не учитывает сопротивление изгибанию. Поэтому на самом деле здесь нужно строить новую модель.

3. Обобщение

Сформулируем теперь в общем виде предлагаемый подход к анализу моделей с парциальным распределением точности. Пусть имеется математическая модель, описывающая какие-либо колебательные процессы.

– Выясняем, какие начальные или граничные условия плохо известны и вместо одной краевой задачи вводим в рассмотрение целый класс задач.
– Доказываем, что некоторые задачи из этого класса имеют хотя бы обобщённое решение и разлагаем его по нормальным модам.
– Распространяем формулы для амплитуд нормальных мод на все задачи рассматриваемого класса и выясняем, как сильно меняются эти амплитуды при изменении условий задач.

Если ошибка, с которой удаётся вычислить амплитуды мод, растёт с ростом номера гармоники, то мы считаем, что в рамках данной модели можно вычислить амплитуды младших мод, а вопрос о сходимости ряда по нормальным модам выходит за рамки рассматриваемой модели. Такой подход существенно проще стандартного, а даёт больше практически значимой информации: вместе с амплитудой моды он указывает и ошибку. Конечно, помимо учтённой неопределённости с начальными данными, имеются и другие неучтённые в этой ошибке недостатки модели. Эта величина указывает порог, точнее которого не нужно вычислить моды, что позволит существенно сэкономить вычислительные мощности в тех задачах, для которых моды не вычисляются аналитически.

Литература

1. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. — С. 476. [Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. 1 — Interscience Publishers Inc., 1953.]
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: ГИТТЛ, 1953. — С. 679. [Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Equations of Mathematical Physics. — Dover Publications, 1990.]
3. *Свешников А. Г., Могилевский И. Е.* Математические задачи теории дифракции. — М.: ФФ МГУ, 2010. — С. 308. [Sveshnikov A. G., Mogilevskii I. E. Mathematical Problems of Theory of Diffraction. (In Russian: Matematicheskie zadachi teorii difrakcii). — Moscow: MSU, 2010.]
4. *Ларин А. А.* Зарождение математической физики и теории колебаний континуальных систем в «Споре о струне» // Вестник Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». История науки и техники. — 2008. — Т. 8. — С. 89–97. [Larin A. A. Zarozhdenie matematicheskoj fiziki i teorii kolebanij kontinual'nyh sistem v «Spore o strune» // Bulletines of Kharkiv Polytechnic Institute. History of Science and Technology. — 2008. — Vol. 8. — P. 89-97.]

5. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — С. 407. [Ladyzhenskaya O. A. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1985.]

UDC 519.633.2

On the Models with Partial Distribution of Accuracy

M. D. Malykh

Faculty of Materials Science
Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia

The majority of the models for describing any oscillatory processes have partial distribution of accuracy, i.e. the number of normal mode is higher, the model describes its evolution worse. Therefore the question about convergence of the normal waves series, taking the central place at classical approach, inevitably take out of applicability of model. At such approach this is a lack of models, one of many difficulty in the proof of series convergence and existence of the classical solution.

In this article we discuss new approach to the description of such models which is simpler classical: here the proof of convergence of series is replaced with research of uncertainty of normal waves amplitudes. The statement was illustrated with a concrete example of the elementary model with partial distribution of accuracy, i.e. problem about string osculations. In such problems there is some uncertainty in initial conditions. So usually the profile of initial velocity, used for the description of blow by a hammer, we consider as step function or "hat", but we can consider the whole class of suitable profiles, therefore the whole family of initial-boundary value problems. This uncertainty in initial values gives the chance to estimate an error for each mode separately. As one would expect, the error grows to infinity as number of a mode tend to infinity. All solutions of considered family of problems are expanded in normal waves series and younger modes have close amplitudes. It allows to keep all classical statements about younger modes and to avoid a investigation of convergence of normal waves series, which is technically difficult and take out of applicability of model.

Key words and phrases: mathematical model, string, oscillations, normal waves, normal modes.