

---

# Математическое моделирование

УДК 531.383:532.516

**Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними**

**Ю. А. Блинков\***, **И. А. Ковалева<sup>†</sup>**, **Л. И. Могилевич<sup>‡</sup>**

*\* Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
г. Саратов, Россия, 410012*

*† Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина  
г. Саратов, Россия, 410054*

*‡ Поволжский филиал  
Московский государственный университет путей сообщения  
г. Саратов, Россия, 410790*

Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных волн деформаций в физически нелинейных соосных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними. Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы с позиций теории солитонов. Наличие жидкости потребовало разработки новой математической модели и компьютерного моделирования процессов, происходящих в рассматриваемой системе.

**Ключевые слова:** цилиндрические соосные оболочки, колебания, волны деформации, гидроупругость, вязкая несжимаемая жидкость, кинк (антикинк), базис Грёбнера.

## 1. Введение

Для моделей, описываемых уравнениями в частных производных, не всегда удаётся построить аналитические решения и в этом случае для их исследования можно применять численные эксперименты на соответствующих разностных схемах. Так, для построения разностных схем из первоначально заданных базовых разностных соотношений, аппроксимирующих исходную систему дифференциальных уравнений, строится базис Грёбнера разностного идеала. Из этого базиса, иногда в нелинейном и всегда в линейном случае, можно извлечь разностную схему, которую иногда невозможно построить традиционными методами генерации разностных схем. Зачастую такие разностные схемы обладают уникальными свойствами, хорошо передающими физику процессов, описываемых исходными дифференциальными уравнениями.

В представленной работе техника базисов Грёбнера будет использована для анализа распространения нелинейных волн деформаций в упругих геометрически и физически нелинейных соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними.

## 2. Постановка задачи гидроупругости и построение математической модели методом возмущений

Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы в [1, 2] с позиций теории солитонов. Рассмотрим бесконечно длинные соосные упругие цилиндрические оболочки, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой

---

Статья поступила в редакцию 6 февраля 2013 г.

Работа поддержана грантами РФФИ 13-01-00049-а «Нелинейные дисперсионные волны в упругих оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость» и Президента Российской Федерации НШ-3802.2012.2 «Аналитические и численные методы в физике частиц, астрофизике и прикладной математике: применение и развитие».

несжимаемой жидкости и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, x$  записываются в случае осесимметричного течения в виде [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right); \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости:

$$V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_i - W^{(i)}. \quad (2)$$

Здесь  $t$  – время;  $V_r, V_x$  – проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $U^{(i)}$  – продольное упругое перемещение оболочек по оси  $x$ ;  $W^{(i)}$  – прогиб, положительный к центру кривизны оболочки;  $R_1$  – внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2$  – внешний радиус внутренней оболочки ( $R_1 = R_2 + \delta$ );  $\delta$  – толщина слоя жидкости в кольцевом сечении трубы;  $i = 1$  относится к внешней, а  $i = 2$  – к внутренней оболочке.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрических оболочек в перемещениях для модели Кирхгофа–Ляве, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений  $\sigma_1$  от интенсивности деформаций  $e_1$  [4, 5]

$$\sigma_1 = Ee_1 - me_1^3. \quad (3)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $m$  – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Уравнения динамики геометрически и физически нелинейных оболочек с учётом (3) записываются в виде [5]:

$$\begin{aligned} \frac{E^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \mu_0^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \left[ 1 - \frac{4m^{(i)}}{3E^{(i)}} \left( \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] \right\rangle - \\ - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} = -q_x^{(i)}, \\ \frac{E^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left( 1 + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right) \right] - \left\{ \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right] - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right\} \left[ 1 + \right. \\ \left. + \frac{4m^{(i)}}{3E^{(i)}} \left( \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 - \right. \right. \end{aligned}$$

$$- \mu_0^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{m^{(i)}}{E^{(i)}} \left( \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] \Bigg\} + \\ + \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} = q_n (-1)^{i-1}. \quad (4)$$

Здесь  $\rho_0^{(i)}$  – плотность материала оболочки;  $\mu_0^{(i)}$  – коэффициент Пуассона;  $R^{(i)}$  – радиусы срединной поверхности оболочек;  $h_0^{(i)}$  – толщины оболочек:  $h_0^{(1)}/2 = R^{(1)} - R_1$ ,  $h_0^{(2)}/2 = R_2 - R^{(2)}$ ;  $c_0^{(i)}$  – скорость звука в материале оболочки;  $q_x^{(i)}$ ,  $q_n$  – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения.

Если снести напряжения на невозмущённую поверхность оболочек ( $W^{(i)} \ll R_i$ ), то можно считать, что поверхностные напряжения со стороны жидкости определяются формулами

$$q_x^{(i)} = \left[ \rho \nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R_i}, \quad q_n = \left[ -p + 2\rho \nu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R_i}. \quad (5)$$

Принимая за характерную длину – длину волны  $l$ , и считая, что соосные оболочки изготовлены из одного материала, то есть, опуская индекс  $i$  у  $E, m, \rho_0, \mu_0$ , перейдём к безразмерным переменным для исследования уравнений (4)

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}}. \quad (6)$$

Положим

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{w_m}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{E}{m} = O(\varepsilon), \quad (7)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр в задаче (4).

Применим метод двухмасштабных асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (8)$$

где  $c$  – безразмерная неизвестная скорость волны,  $\tau$  – внутренняя переменная, а зависимые переменные представлены в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (9)$$

Подставляя (6), (8), (9) в уравнения (4) с учётом оценок (7), получим в нулевом приближении по  $\varepsilon$  линейную систему уравнений, из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \quad (10)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2. \quad (11)$$

Из следующего приближения по  $\varepsilon$ , учитывая (10) и (11), находится система уравнений, являющихся составными для  $u_{10}^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} - \\ - \frac{2m}{E \varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} = \\ = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{1}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \left[ q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнений (12) равна нулю и система распадается на два одинаковых уравнения, представляющих модифицированные уравнения Кортевега–де Вриза для  $\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} = \frac{w_m l}{\mu_0 u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)}$ .

Для определения правой части уравнения (12) введём безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, \\ r^* = \frac{r - R_2}{\delta}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \\ p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{\delta^3} P, \quad \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = O\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right), \quad (13) \\ \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_2} \frac{R_2}{l} = \psi \frac{R_2}{l} \ll 1, \quad \psi \ll 1, \quad \lambda \ll 1. \end{aligned}$$

Подставляя (13) в уравнения гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорость и давление в виде разложения по малому параметру  $\lambda$ :

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \dots \quad (14)$$

В нулевом приближении по  $\psi$  ( $\delta/l \approx 0$  – гидравлическая теория смазки), считая  $(\delta/l)(\delta c_0/\nu) \ll 1$  (– ползущие течения), и в нулевом приближении по  $\lambda$  получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки)

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (15)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} v_r^0 = - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при } r^* = 1; \\ v_r^0 = - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при } r^* = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из решения задачи (15), (16) следует, что

$$P^0 = 12 \int \left[ \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*, \quad (17)$$

$$\left[ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1} = 6 \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad \left[ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=0} = 6 \int \left( \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) dx^*.$$

Учитывая, что были введены переменные (8), (9), и, имея соотношения (10) и (11), из (17) получим

$$P^0 = 12\mu_0 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m}{w_m l} \left( R^{(1)} u_{10}^{(1)} - R^{(2)} u_{10}^{(2)} \right). \quad (18)$$

С принятой точностью по  $\varepsilon, \psi, \lambda$  из (5) найдём

$$q_x^{(i)} = \left[ \rho \nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1,0}, \quad q_n = -\rho \nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{l}{\delta} P, \quad \frac{q_x^{(i)}}{q_n} = O\left(\frac{\delta}{l}\right)$$

и, следовательно,  $q_x^{(i)} \ll q_n$  и в правой части уравнения (12) остаётся выражение

$$6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0^{(i)}} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left[ \frac{R^{(i)} R^{(2)}}{\delta^2} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{R^{(i)} R^{(1)}}{\delta^2} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right] (-1)^{i-1}. \quad (19)$$

С принятой точностью по  $\psi, \varepsilon$  положим  $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$ ,  $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} = h_0$ .

Подставляя (19) в уравнение (12), окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} - \\ - \frac{2m}{E \varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \\ - 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) (-1)^i = 0. \quad (20) \end{aligned}$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} = c \varphi^{(1)}, \quad \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} = c \varphi^{(2)}, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau \quad (21)$$

позволяет записать систему уравнений (20) в виде

$$\varphi^{(i)} \varphi_t + 6\varphi^{(i)} \varphi_\eta + \varphi^{(i)} \varphi_{\eta\eta} - \sigma_1 \varphi^{(i)2} \varphi_\eta - (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) (-1)^i = 0. \quad (22)$$

Постоянные  $c, c_1, c_2, \sigma_1$  определяются при подстановке (21) в (20) и имеют вид

$$\begin{aligned} c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2, \quad c_1 = \left[ c_2 \varepsilon \left( \frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{1/3}, \\ c = 6 \frac{R^2}{l u_m} \mu_0^2 c_1^2, \quad \sigma_1 = \frac{2m}{E \varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{c^2 c_1}{c_2}. \end{aligned}$$

В случае отсутствия жидкости, последние два слагаемых  $(\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})$  в уравнениях (22) исчезают и система распадается на два независимых уравнения МКдВ (модифицированные уравнения Кортевега–де Вриза) и имеет точное частное решение в виде кинк–антикинк

$$\varphi = \frac{3}{\sigma_1} \pm \frac{k\sqrt{6}}{\sqrt{\sigma_1}} \tanh \left( kx + t \left( 2k^3 - 9\frac{k}{\sigma_1} \right) \right). \quad (23)$$

Эти решения при  $t = 0$  можно взять в качестве начальных условий при решении задачи Коши для системы уравнений (22).

### 3. Компьютерное моделирование

Метод конечных объёмов сводится к дискретизации исходных уравнений, представленных в интегральной форме, в противоположность методу конечных разностей, который обычно применяется к исходным уравнениям в их дифференциальной форме. При этом, если исходная система обладала законами сохранения, то построенная разностная схема будет обладать хорошими консервативными свойствами просто по построению. Кроме того, при этом подходе упрощается вывод разностных соотношений на границах вычислительной области.

Если исходные уравнения содержат производные выше первого порядка, то метод конечных объёмов нуждается в модификации. Эта модификация получила название интегро-интерполяционного метода, недостатком которого является отход от работы только с интегральными соотношениями и прямая замена производных их конечными разностями. Если на этом этапе добавить интегральные соотношения, связывающие искомые функции с их производными, а затем, используя алгоритм Бухбергера построения базисов Грёбнера или инволютивный алгоритм, то можно получить соотношения, связывающие только искомые функции [6, 7].

Запишем уравнение (22) в интегральной форме

$$\oint_{\partial\Omega} \left[ -3\varphi^{(i)2} - \varphi^{(i)}_{\eta\eta} + \frac{\sigma_1}{3}\varphi^{(i)3} \right] dt + \varphi^{(i)} d\eta - \iint_{\Omega} \left[ \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} \right] (-1)^i dt d\eta = 0 \quad (24)$$

для любой области  $\Omega$ . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим  $u^{(i)}_j^n = \varphi^{(i)}(t_n, \eta_j)$  и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 1.

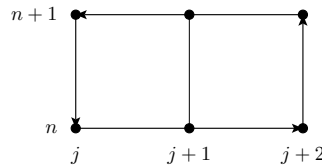


Рис. 1. Базовой контур для уравнения (24)

Добавим интегральные соотношения

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \quad (25)$$

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta\eta} d\eta = u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_j). \quad (26)$$

Используя для интегрирования по времени и по чётным производным по  $\eta$  формулу трапеций, а по нечётным производным по  $\eta$  формулу среднего значения, и полагая  $t_{n+1} - t_n = \tau$ ,  $\eta_{j+1} - \eta_j = h$ , перепишем соотношения (24), (25) в виде

$$\begin{aligned}
& \left( -3 \left( u^{(i)2n}_j + u^{(i)2n+1}_j - u^{(i)2n}_{j+2} - u^{(i)2n+1}_{j+2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \left( u^{(i)n}_{\eta j} + u^{(i)n+1}_{\eta j} - u^{(i)n}_{\eta j+2} - u^{(i)n+1}_{\eta j+2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sigma_1}{3} \left( u^{(i)3n}_j + u^{(i)3n+1}_j - u^{(i)3n}_{j+2} - u^{(i)3n+1}_{j+2} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \\
& \quad + (u^{(i)n+1}_{j+1} - u^{(i)n}_{j+1}) \cdot 2h - (u^{(i)n+1}_{j+1} + u^{(i)n}_{j+1})(-1)^i \cdot h\tau = 0, \\
& \quad (u^{(i)n}_{\eta j+1} + u^{(i)n}_{\eta j}) \cdot \frac{h}{2} = u^{(i)n}_{j+1} - u^{(i)n}_j, \\
& \quad u^{(i)n}_{\eta j+1} \cdot 2h = u^{(i)n}_{\eta j+2} - u^{(i)n}_{\eta j}.
\end{aligned}$$

Вводя сеточные операторы сдвига  $\vartheta_t, \vartheta_\eta$  по переменным  $t, \eta$  соответственно, запишем уравнения в операторной форме:

$$\begin{aligned}
& - (1 + \vartheta_t - \vartheta_\eta^2 - \vartheta_t \vartheta_\eta^2) \circ (3u^{(i)2} + u^{(i)}_{\eta\eta} - \frac{\sigma_1}{3} u^{(i)3}) \cdot \frac{\tau}{2} + \\
& \quad + (\vartheta_\eta \vartheta_t - \vartheta_\eta) \circ u^{(i)} \cdot 2h - (\vartheta_\eta \vartheta_t + \vartheta_\eta) \circ u^{(i)} (-1)^i \cdot h\tau = 0, \\
& \quad (\vartheta_\eta + 1) \circ u^{(i)}_\eta \cdot \frac{h}{2} = (\vartheta_\eta - 1) \circ u^{(i)}, \\
& \quad \vartheta_\eta \circ u^{(i)}_{\eta\eta} \cdot 2h = (\vartheta_\eta^2 - 1) \circ u^{(i)}_\eta.
\end{aligned}$$

Выбирая допустимое лексикографическое упорядочение сначала по функциям  $u^{(1)}_{\eta\eta} \succ u^{(2)}_{\eta\eta} \succ u^{(1)}_\eta \succ u^{(2)}_\eta \succ u^{(1)} \succ u^{(2)}$ , затем по переменным  $\vartheta_t \succ \vartheta_\eta$ , можно построить базис Грёбнера или инволютивный базис [8]. В результате получим, в качестве отдельных элементов авторедуцированного базиса Грёбнера, следующие разностные схемы для уравнений (22), аналогичные схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности

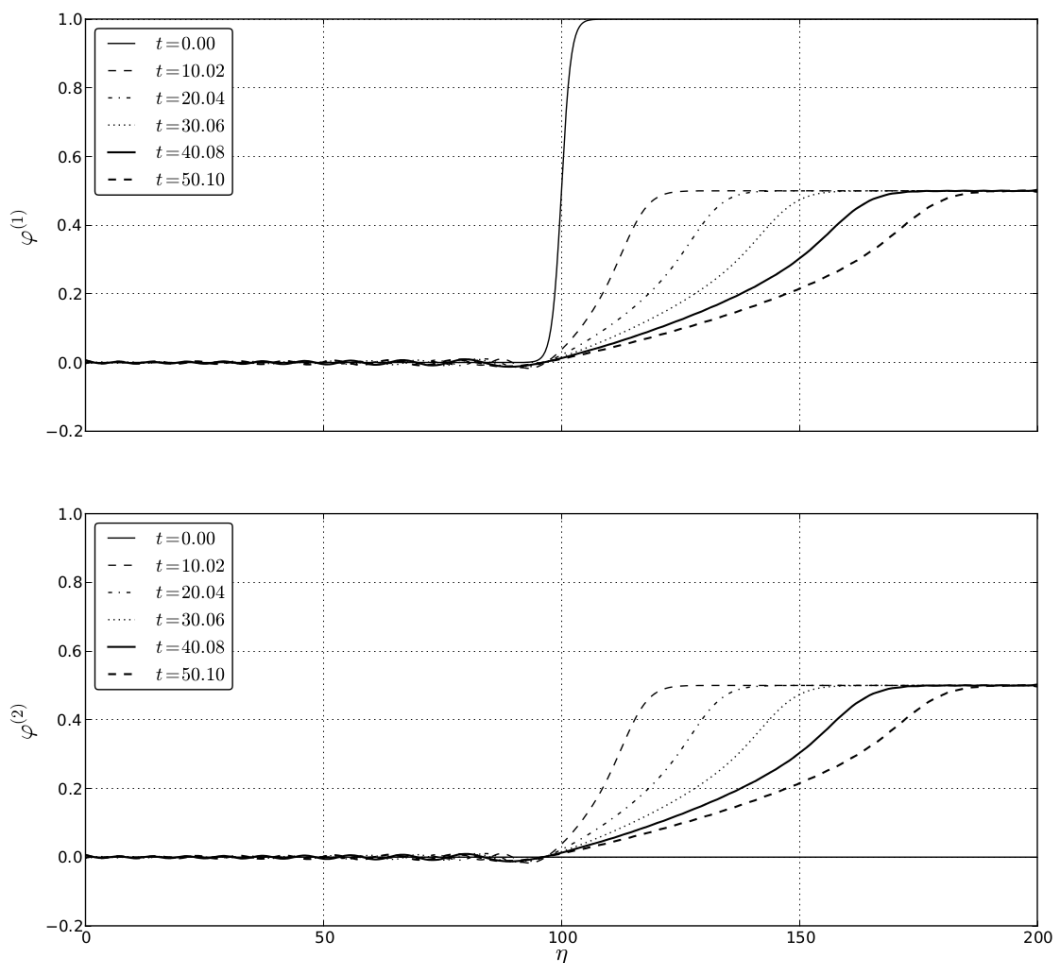
$$\begin{aligned}
& \frac{u^{(i)n+1}_j - u^{(i)n}_j}{\tau} + 3 \frac{(u^{(i)2n+1}_{j+1} - u^{(i)2n+1}_{j-1}) + (u^{(i)2n}_{j+1} - u^{(i)2n}_{j-1})}{4h} + \\
& \quad + \frac{(u^{(i)n+1}_{j+2} - 2u^{(i)n+1}_{j+1} + 2u^{(i)n+1}_{j-1} - u^{(i)n+1}_{j-2})}{4h^3} + \\
& \quad + \frac{(u^{(i)n}_{j+2} - 2u^{(i)n}_{j+1} + 2u^{(i)n}_{j-1} - u^{(i)n}_{j-2})}{4h^3} - \\
& \quad - \frac{\sigma_1}{3} \frac{(u^{(i)3n+1}_{j+1} - u^{(i)3n+1}_{j-1}) + (u^{(i)3n}_{j+1} - u^{(i)3n}_{j-1})}{4h} - \\
& \quad - \frac{u^{(i)n+1}_j + u^{(i)n}_j}{2} (-1)^i = 0. \quad (27)
\end{aligned}$$

Полученные неявные разностные схемы имеют квадратичную и кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация

$$\begin{aligned}
v^3_{k+1} &= v^3_{k+1} - v^3_k + v^3_k = (v_{k+1} - v_k)(v^2_{k+1} + v_{k+1}v_k + v^2_k) + v^3_k \approx v_{k+1} \cdot 3v^2_k - 2v^3_k. \\
v^2_{k+1} &= v^2_{k+1} - v^2_k + v^2_k = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v^2_k \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v^2_k.
\end{aligned}$$

Шаг по времени  $t$  брался равным половине шага по переменной  $\eta$ . Программа расчёта была написана на языке Python с использованием пакета SciPy [9].

Результаты проведённого компьютерного моделирования на рис. 2 позволяют сделать следующие выводы. В начальный момент волны деформации (кинк) задана только во внешней оболочке, а во внутренней оболочке деформация равняется нулю. В развитии процесса по времени происходит «перекачка» энергии (через слой жидкости) от волны (кинк) во внешней оболочке и сопровождается падением амплитуды волны во внешней оболочке, и, как следствие, снижением скорости её распространения.



**Рис. 2.** График численного решения уравнений (22) с начальным условием (23) для  $\varphi^{(1)}$  с  $\sigma_1 = 6.0$ ,  $k = 0.5$ , и для  $\varphi^{(2)} = 0.0$

Наличие жидкости между оболочками приводит к возникновению волны деформации и во внутренней оболочке, в которой в начальный момент деформации равнялись нулю.

В результате во внешней и внутренней оболочках устанавливается волна деформации постоянной амплитуды и скорости распространения с затухающими осцилляциями на заднем фронте.

Проведённое моделирование позволяет сделать вывод, что рассматриваемая механическая система начинает вести себя как единый трёхслойный пакет с двумя несущими слоями (внешняя и внутренняя оболочки), по которым распространяются волны деформации, и заполнителя – слоя вязкой несжимаемой жидкости.



#### 4. Заключение

Проведённое моделирование с использованием компьютерной алгебры позволило выявить особенности поведения волн деформаций в геометрически и физически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними.

Использование базиса Грёбнера для генерации разностной схемы при численном решении задачи Коши для системы двух нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка по пространственной переменной позволило получить результат расчёта без осцилляций, вызываемых численной реализацией. Численная схема была протестирована на точном решении (23) при отсутствии жидкости.

Полученный расчёт показал влияние вязкой несжимаемой жидкости на поведение нелинейной волны деформации в соосных оболочках (см. рис. 2). В результате возникает нелинейная волна деформации во внутренней оболочке, в которой её не было в начальный момент времени, и амплитуды волн деформации в соосных оболочках со временем начинают совпадать. Эти амплитуды в два раза меньше исходной амплитуды волны деформации внешней оболочки в начальный момент времени.

Эту конструкцию можно толковать как трёхслойный пакет, заполнителем которого является жидкость.

#### Литература

1. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1995. — Т. 3, № 1. — С. 52–58. [*Zemlyanukhin A. I., Mogilevich L. I. Nelineyniye volnih deformatsiy v cilindricheskikh obolochkakh // Izv. vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika.* — 1995. — Т. 3, No 1. — S. 52–58. ]
2. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. — Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 1999. — С. 132. [*Zemlyanukhin A. I., Mogilevich L. I. Nelineyniye volnih v cilindricheskikh obolochkakh: solitonih, simmetrii, ehvolyuciya.* — Saratov: Sarat. gos. tekhn. un-t, 1999. — С. 132. ]
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — С. 840. [*Lojtsyanskiy L. G. Mekhanika zhidkosti i gaza.* — M.: Drofa, 2003. — С. 840. ]
4. Каузерер К. Нелинейная механика. — М.: Иностранная литература, 1961. — С. 240. [*Kauzerer K. Nelineynaya mekhanika.* — M.: Inostrannaya literatura, 1961. — С. 240. ]
5. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. — М.: Наука, 1979. — С. 320. [*Voljmir A. S. Obolochki v potoke zhidkosti i gaza: zadachi gidrouprugosti.* — M.: Nauka, 1979. — С. 320. ]
6. Gerdt V. P., Blinkov Y. A., Mozhilkin V. V. Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations // *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications.* — 2006. — Vol. 2. — P. 26. — <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html>.
7. Блинков Ю. А., Мозжилкин В. В. Генерация разностных схем для уравнения Бюргера построением базисов Грёбнера // Программирование. — 2006. — Т. 32, № 2. — С. 71–74. [*Blinkov Yu. A., Mozhilkin V. V. Generaciya raznostnihkh skhem dlya uravneniya Byurgersa postroeniem bazisov Gryobnera // Programirovanie.* — 2006. — Т. 32, No 2. — S. 71–74. ]
8. Gerdt V. P., Blinkov Y. A. Involution and Difference Schemes for the Navier-Stokes Equations // *Computer Algebra in Scientific Computing.* — Berlin / Heidelberg: Springer, 2009. — Vol. 5743 of *Lecture Notes in Computer Science.* — Pp. 94–105.
9. SciPy. — <http://www.scipy.org/>.

UDC 531.383:532.516

**Nonlinear Waves Dynamics Modeling in Coaxial Geometrically  
And Physically Nonlinear Shell Containing Viscous  
Incompressible Fluid in between****Yu. A. Blinkov<sup>\*</sup>, I. A. Kovaleva<sup>†</sup>, L. I. Mogilevich<sup>‡</sup>***<sup>\*</sup> Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky  
Saratov, Russia, 410012**<sup>\*</sup> Saratov State Technical University named after Gagarin Yu.A.  
Saratov, Russia, 410054**<sup>‡</sup> Volga Branch  
Moscow State University of Railway Transport  
Saratov, Russia, 410790*

The present investigation is devoted to the analysis of non-linear deformation waves propagation in physically non-linear coaxial elastic cylinder covers, containing viscous incompressible liquid between them. Wave process in elastic cylinder cover without interaction with liquid was investigated earlier on the basis of soliton theory. The presence of liquid demanded working out a new mathematical model and computer modeling of the processes, taking place in the system.

**Key words and phrases:** cylinder coaxial shells, oscillations, deformation waves, hydroelasticity, viscous incompressible liquid, kink (antikink), Gröbner basis.