УДК 517.972.5

Необходимые и достаточные условия потенциальности для нелинейного дифференциально-разностного оператора в частных производных

И. А. Колесникова, Я. Д. Костина

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия

В статье исследуется на потенциальность дифференциальный оператор в частных производных с отклоняющимися аргументами на заданной области определения и относительно некоторой специальной билинейной формы. В случае потенциальности строится соответствующий функционал, т.е. исследуется вопрос существования решения обратной задачи вариационного исчисления для дифференциально-разностного оператора в частных производных. U, V билинейные нормированные линейные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Оператор действует следующим образом $N : D(N) \to R(N)$, где $D(N) \subseteq U$, $R(N) \subseteq V$. Вводится понятие дифференциала Гато оператора N в точке u и оператора $\delta N(u, \cdot) : U \to V$, который есть производная Гато $\delta N(u, \cdot) : U \to V$. Область определения $D(N'_u)$ состоит из элементов $h \in U$, таких что $(u+\varepsilon h) \in D(N)$ для любого достаточно малого ε. Для заданного дифференциально-разностного оператора в частных производных класса $C^{s,l}_{x,t}$,получены необходимые и достаточные условия потенциальности. В качестве примеров рассматриваются нелинейный дифференциальный оператор второго порядка без отклонения аргументов и с отклоняющимися аргументами. С помощью полученных условий потенциальности построены соответствующие функционалы.

Ключевые слова: билинейная форма, дифференциальный оператор, отклонение аргумента, функционал.

1. Введение

При решении задач вариационными методами возникает необходимость построения функционалов, критические точки которых совпадают с решениями исходных уравнений. Исследование проблемы построения искомых функционалов начинается с проверки выполнения условий потенциальности соответствующих операторов.

Вопросы, рассматриваемые в данной работе, тесно связаны со следующей постановкой обратных задач вариационного исчисления, обобщающей её классическую формулировку. Дан произвольный оператор N с отклоняющимися аргументами. Требуется найти функционал, множество стационарных точек которого совпадает с множеством решений задачи $N(u) = 0$. Однако все преимущества вариационных принципов в течении длительного времени удавалось использовать лишь для узкого класса потенциальных операторов.

Существует потребность в получении вариационных принципов для новых классов линейных несимметричных операторов и нелинейных непотенциальных операторов. Задачи, допускающие вариационную формулировку, позволяют существенно ослабить математические ограничения, накладываемые на искомые решения, а также использовать эффективные методы для исследования их свойств. При решении задач вариационными методами возникает необходимость построения функционалов, критические точки которых совпадают с решениями исходных уравнений. Исследование проблемы построения искомых функционалов начинается с проверки выполнения условий потенциальности соответствующих операторов. Для дифференциальных уравнений без отклонения аргументов имеются эффективные методы, позволяющие проверять потенциальность соответствующих операторов [1].

В плане дифференциально-разностных операторов обратные задачи вариационного исчисления почти не рассматривались, хотя прямые задачи вариационного исчисления с одним аргументом ставились ещё Л.Э. Эльсгольцем [2] и получили дальнейшее развитие в работах Г.А. Каменского [3], А.Л. Скубачевского [4,5], Савчина В.М. [6] и др.

Основная цель работы — найти необходимые и достаточные условия потенциальности рассматриваемого оператора.

Пусть задано операторное уравнение $N(u) = 0, \quad u \in D(N)$, где $N : D(N) \subseteq U \to V$, U, V – линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Будем предполагать, что в каждой точке $u \in D(N)$ существует производная Гато N'_u так, что $\delta N(u, h) = N'_u h$. Пусть на $V \times U$ задана некоторая билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times U \to \mathbb{R}$.

Как известно [1], оператор N называется потенциальным относительно заданной билинейной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$, если существует функционал $F_N[u] : D(F_N) \equiv D(N) \to R$, такой, что $\delta F_N(u, h) = \langle N(u), h\rangle \ \forall u \in D(N), \ \forall h \in D(N'_u)$. Здесь возникают разного рода трудности. В первую очередь заданный оператор необходимо проверить на потенциальность относительно заданной билинейной формы, но не всегда это оказывается возможным. В работе [7] получены условия для дифференциально-разностных операторов относительно классической билинейной формы, а также получены условия для дифференциально-разностных операторов относительно билинейной формы со свёрткой [8]. В случае выполнения этих условий строится функционал. Если же условия не выполняются, то можно рассматривать вопрос об отыскании вариационного множителя, благодаря которому полученный оператор будет потенциален [9].

Данная работа посвящена нахождению условий потенциальности для дифференциально-разностного оператора относительно заданной билинейной формы.

2. Постановка задачи. Условия потенциальности

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор в частных производных с отклоняющимися аргументами:

$$N(u) = f(x, u_\alpha^{(k)}(x, t + \lambda\tau)), \quad k = \overline{0, l};\ |\alpha| = \overline{0, s}; \quad \lambda = \overline{-1, 1};\ \tau > 0, \tag{1}$$

где $(x, t) \in Q = \Omega \times (t_1, t_2)$; Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$; $t_2 - t_1 > 2\tau$; u – неизвестная функция из класса $C^{s,l}_{x,t}(\overline{Q_\tau}) = U$, $Q_\tau = \Omega \times (t_1 - \tau, t_2 + \tau)$;

$$u_\alpha^{(k)} = \frac{\partial^k \partial_\alpha u}{\partial t^k};\ \partial_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^m)^{\alpha_m}};\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in Z^m_+;\ |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i;$$

f – заданная достаточно гладкая функция.

Зададим область определения оператора N равенством

$$D(N) = \Big\{ u \in U : \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \varphi_{1k}(x, t) \quad (x \in \overline{\Omega};\ t \in [t_1 - \tau, t_1];\ k = \overline{0, l_0}),$$
$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \varphi_{2k}(x, t) \quad (x \in \overline{\Omega};\ t \in [t_2, t_2 + \tau];\ k = \overline{0, l_0}),$$
$$\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial n_x^\nu}\right)\bigg|_{\Gamma_\tau} = \psi_\nu(x, t) \quad (\nu = \overline{0, s_0}) \Big\}. \tag{2}$$

Здесь φ_{ik}, ψ_ν заданные функции; $\Gamma_\tau = \partial\Omega \times (t_1 - \tau, t_2 + \tau)$; Числа l_0 и s_0 связаны соответственно с l и s. Если $l, s-$ чётны, то $l_0 = \dfrac{l}{2} - 1$, $s_0 = \dfrac{s}{2} - 1$. При нечётном l, s полагаем $l_0 = \dfrac{l+1}{2} - 1$, $s_0 = \dfrac{s+1}{2} - 1$.

Зададим билинейную форму вида

$$\langle v, g\rangle = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} e^{Ct} v(x,t) g(x,t) \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3}$$

где C — постоянная.

Необходимо найти условия, при которых выполняется условие потенциальности [1]

$$\langle N'_u h, g\rangle = \langle h, N'_u g\rangle. \tag{4}$$

Найдём производную Гато оператора:

$$\frac{d}{d\varepsilon}(N(u+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} f(x,(u+\varepsilon h)^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau))\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}f(x,(u+\varepsilon h)^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau))}{d(u+\varepsilon h)^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau)} \cdot \frac{d(u+\varepsilon h)^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau)}{d\varepsilon}\Bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}f(x,(u+\varepsilon h)^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau))}{d(u+\varepsilon h)^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau)} h^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau)\Bigg|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}f(x,u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau))}{\mathrm{d}u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau)} h^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau) = N'_u h.$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\langle N'_u h, g\rangle = \int\limits_{t_0-\tau}^{t_1-\tau}\int\limits_{\Omega} e^{Ct} \frac{\mathrm{d}f(x,u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau))}{\mathrm{d}u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau)} h^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau) g(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. =$$

$$= \int\limits_{t_0-\tau}^{t_1-\tau} e^{Ct} \int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}f(x,u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau))}{\mathrm{d}u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau)} h^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau) g(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{t_0-\tau}^{t_1-\tau} e^{Ct} \int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}f(x,u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau))}{\mathrm{d}u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau)} g(x,t)\mathrm{d}h^{(k)}_{\alpha-1}(x,t+\lambda\tau)\mathrm{d}t =$$

$$= -\int\limits_{t_0-\tau}^{t_1-\tau} e^{Ct} \int\limits_{\Omega} D_x\left(\frac{\mathrm{d}f(x,u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau))}{\mathrm{d}u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau)} g(x,t)\right) h^{(k)}_{\alpha-1}(x,t+\lambda\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Продолжая интегрировать по частям по переменной x α раз, получим

$$\langle N'_u h, g\rangle = (-1)^{\alpha}\int\limits_{t_0-\tau}^{t_1-\tau} e^{Ct} \int\limits_{\Omega} D^{\alpha}_x\left(\frac{\mathrm{d}f(x,u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau))}{\mathrm{d}u^{(k)}_{\alpha}(x,t+\lambda\tau)} g(x,t)\right) h^{(k)}(x,t+\lambda\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Для интегрирования по переменной t воспользуемся рекуррентной формулой

$$e^{Ct}h^{(k)}(x,t+\lambda\tau)\mathrm{d}t = \mathrm{d}(e^{Ct}h^{(k-1)}(x,t+\lambda\tau)) - Ce^{Ct}h^{(k-1)}(x,t+\lambda\tau)\mathrm{d}t,$$

т.е. $I_k\mathrm{d}t = \mathrm{d}(I_{k-1}) - CI_{k-1}\mathrm{d}t$.

Используя формулу Лейбница, получаем

$$\langle N'_u h, g\rangle = \int\limits_{t_0-\tau}^{t_1-\tau}\int\limits_{\Omega} C^k(-1)^{|\alpha|+k}\sum_{\nu=0}^{l}\sum_{|\beta|=0}^{s} e^{Ct}C_k^{\nu}\binom{\alpha}{\beta}\times$$
$$\times D^{k-\nu}D_{\alpha-\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}}\right)\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}(g_\beta(x,t))h(x,t+\lambda\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

После замены $t+\lambda\tau = t'$, находим

$$\langle N'_u h, g\rangle = \int\limits_{t_0+\lambda\tau}^{t_1+\lambda\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{\lambda=-1}^{1} C^k(-1)^{|\alpha|+k}\sum_{\nu=0}^{l}\sum_{|\beta|=0}^{s} e^{C(t'-\lambda\tau)}C_k^{\nu}\binom{\alpha}{\beta}\times$$
$$\times D^{k-\nu}D_{\alpha-\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}}\right)\Bigg|_{t\to t'-\lambda\tau}\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}(g_\beta(x,t'-\lambda\tau))h(x,t')\mathrm{d}x\mathrm{d}t'.$$

Переобозначая и учитывая (5), получим

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{|\alpha|=0}^{s} C^k(-1)^{|\alpha|+k+\nu}C_k^{\nu}\cdot\binom{\alpha}{\beta}D^{k-\nu}D_{\alpha-\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t+\lambda\tau)}\right)\Bigg|_{t\to t-\lambda\tau} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u_\beta^{(\nu)}(x,t-\lambda\tau)}.$$

Мы доказали теорему:

Теорема. *Для потенциальности оператора (1) на множестве (2) относительно билинейной формы (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{|\alpha|=0}^{s} C^k(-1)^{|\alpha|+k+\nu}C_k^{\nu}\binom{\alpha}{\beta}D^{k-\nu}D_{\alpha-\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(k)}(x,t+\lambda\tau)}\right)\Bigg|_{t\to t-\lambda\tau} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u_\beta^{(\nu)}(x,t-\lambda\tau)} \quad (5)$$

$$\forall u\in D(N),\ \forall(x,t)\in Q=\Omega\times(t_0,t_1),\ \lambda=-1,0,1,\ \nu=\overline{0,l},\ |\beta|=\overline{0,s}.$$

В качестве примера рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор второго порядка

$$N_1(u)\equiv e^{u(x,t)}(2u_{xx}(x,t)-2u_{tt}(x,t)+u_x^2(x,t)-u_t^2(x,t)-2Cu_t(x,t)-C^2)=0, \quad (6)$$

где $C=\mathrm{const}$.

Зададим область определения

$$D(N_1)=\Bigg\{u(x,y)\in V=C_{xt}^{22}(\overline{Q_t}):\frac{\partial^k u}{\partial t^k}=\varphi_{1k}(x,t)\quad(x\in\overline{\Omega};\ t\in[t_0-\tau,t_0];\ k=\overline{0,1}),$$
$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}=\varphi_{2k}(x,t)\quad(x\in\overline{\Omega};\ t\in[t_1,t_1+\tau];\ k=\overline{0,1}),$$
$$\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial n_x^\nu}\right)\Bigg|_{\Gamma_\tau}=\psi_\nu(x,t)\quad(\nu=\overline{0,s_0})\Bigg\}, \quad (7)$$

где $\varphi_{10}, \varphi_{20}, \psi$ заданные достаточно гладкие функции, $\varphi_{j1} = \dfrac{\partial \varphi_{j0}}{\partial t}$ $(j = 1, 2)$, $\Gamma_\tau = \partial\Omega \times [t_0 - \tau, t_1 + \tau], Q_\tau = \Omega \times (t_0 - \tau, T + \tau)$.

Оператор N_1, рассмотренный на $D(N_1)$, потенциален относительно билинейной формы (3). Для заданного оператора условия теоремы выполняются. Найдём соответствующий функционал, который имеет вид

$$F[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\Omega} e^{u(x,y)}(u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Нужно отметить, что оператор N_1 не является оператором с отклоняющимися аргументами. Рассмотрим оператор с отклоняющимися аргументами, решение задач с дифференциально-разностными операторами представляет специфические трудности, чаще всего это связано с громоздкими вычислениями, которые мы здесь опустим.

Рассмотрим операторное дифференциально-разностное уравнение

$$N_2(u) \equiv e^{u(x,t)}(u_{xx}(x,t-\tau) - u_{tt}(x,t-\tau)) + e^{u(x,t)-C\tau}(u_x^2(x,t-\tau) + u_{xx}(x,t-\tau)) -$$
$$- e^{u(x,t)+C\tau}(u_t^2(x,t+\tau) + u_{tt}(x,t+\tau) + 2Cu_t(x,t+\tau) + C^2) = 0. \tag{9}$$

Зададим область определения для соответствующего оператора N_2:

$$D(N_2) = \left\{ u(x,y) \in V = C_{xt}^{22}(\overline{Q_t}) : \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \varphi_{1k}(x,t) \ (x \in \overline{\Omega};\ t \in [t_0 - \tau, t_0];\ k = \overline{0,1}) \right.,$$
$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \varphi_{2k}(x,t) \quad (x \in \overline{\Omega};\ t \in [t_1, t_1 + \tau];\ k = \overline{0,1}),$$
$$\left. \left(\frac{\partial^\nu u}{\partial n_x^\nu} \right) \bigg|_{\Gamma_\tau} = \psi_\nu(x,t) \quad (\nu = \overline{0, s_0}) \right\}, \tag{10}$$

где $\varphi_{10}, \varphi_{20}, \psi$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi_{j1} = \dfrac{\partial \varphi_{j0}}{\partial t}$ $(j = 1, 2)$, $\Gamma_\tau = \partial\Omega \times [t_0 - \tau, t_1 + \tau], Q_\tau = \Omega \times (t_0 - \tau, T + \tau)$.

Подставим (9) в условия теоремы, после преобразования получаем тоже. Следовательно, нелинейный дифференциально-разностный оператор (9), заданный на области определения (10), является потенциальным относительно билинейной формы (3). Для данного оператора находим соответствующий функционал

$$F[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\Omega} e^{u(x,y)}(u_{xx}(x,t+\tau) - u_{tt}(x,t-\tau))\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

В данной работе для дифференциально-разностного оператора (1), заданного на области определения (2), получены необходимые и достаточные условия потенциальности относительно билинейной формы (3). Результат проиллюстрирован как на нелинейном дифференциальном операторе второго порядка, так и на нелинейном дифференциальном операторе второго порядка с отклоняющимся аргументом.

Литература

1. Variational Principles for Nonpotential Operators. — M.: J. Math. Sci, 1994. — Vol. 68, Pp. 275–398.

2. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — С. 296. [El'sgoltz, L. E. and Norkin S.B. Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument. — Moscow: Nauka, 1971. — 296 p.]
3. К общей теории уравнений с отклоняющимся аргументом // ДАН СССР 120. — 1958. — № 4. — С. 697–700. [Kamenskij G.A. On the General Theory of Equations with Deviating Argument. — DAN USSR 120 — 1958. — No 4. — P. 697–700.]
4. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений // УМН. — 1996. — Т. 307, № 51. — С. 169–170. [Skubachevskii A. L. On Some Properties of Elliptic and Parabolic Functional-Differential Equations // Russian Mathematical Surveys. — 1996. — No 51:1. — P. 169–170.]
5. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 1997.
6. *Savchin V. M.* Helmholtz's Conditions of Potentiality for PDE with Deviating Arguments // Theses of the 35th Scientific Conference of the Departement of Physico-Mathematical and Natural Science. — M.: PFUR, 1994. — P. 25.
7. On Potentiality Conditionsfor Partial Differential-Difference Equations // Differents. Uravn. — 2010. — Vol. 46, No 3. — Pp. 1–4.
8. *Колесникова И. А.* Об условиях потенциальности дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимися аргументами // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 8. — С. 1131–1132. [Kolesnikova I. A. Potentiality Conditions for Partial Differential Equations with Deviating Arguments. — Differential Equations. — 2004. — Vol. 40(8). — P. 1131–1132.]
9. *Колесникова И. А.* Структура дифференциально-разностного оператора второго порядка, допускающего вариационный принцип // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2012. — № 3. — С. 25–34. [Kolesnikova I. A. Variational Principles for the Differential Difference Operator of the Second Order // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series. "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2012. — No 3. — P. 25–34.]

UDC 517.972.5

Necessary and Sufficient Conditions for the Potentiality of Nonlinear Differential-Difference Operator in Partial Derivative

I. A. Kolesnikova, Ya. D. Kostina

Department Mathematical Analisys and Theory of Functions
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

The purpose of the present paper is to investigate the potentiality of the differential difference operator with deviant arguments and to construct the functional, if the given operator is a potential on a given set relatively to the some special bilinear form, i.e. the problem of existence of solutions of inverse problems of the calculus of variations for partial differential difference operators is investigated. Let U, V be normed linear spaces over the field of real numbers $\mathbb{R}$. Take any operator $N : D(N) \to R(N)$, where $D(N) \subseteq U$, $R(N) \subseteq V$. A limit if it exists, is called the Gâteaux differential of N at the point u. The operator $\delta N(u, \cdot) : U \to V$ is called the Gâteaux derivative of N at u and will be denoted by N'_u. Its domain of definition $D(N'_u)$ consists of elements $h \in U$ such that $(u + \varepsilon h) \in D(N)$ for all ε sufficiently small. We obtain necessary and sufficient conditions for the adjusted partial differential difference operator of $C^{s,l}_{x,t}$ class. The nonlinear differential operator of the second order and the nonlinear differential operator of the second order with deviant arguments is consider as an example. Using the obtained conditions of potentiality corresponding functionals are constructed.

Key words and phrases: bilinear form, differential operator, differential-difference, functional.