Математика

УДК 513.831

О некоторых обобщениях паракомпактности

В. Л. Клюшин, Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейн

Кафедра высшей математики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В статье изучаются обобщения паракомпактных пространств, основанные на so-множествах, т.е. множествах, являющихся объединениями открытых и нигде не плотных множеств. Целью работы является установление связи между so-паракомпактными пространствами и другими обобщениями паракомпактных пространств и выяснение условий, при которых so-паракомпактное пространство является бикомпактным. Поставленные задачи решаются методами общей топологии. Доказано, что секвенциально компактное so-паракомпактное пространство бикомпактно. Доказано, что so-паракомпактность сохраняется при умножении на бикомпакт. Ранее другими авторами было введено понятие S-паракомпактного пространства, основанное на полуоткрытых множествах. Класс so-паракомпактных пространств шире класса S-паракомпактных пространств. В данной работе показано, что существуют so-паракомпактные пространства, не являющиеся $S-$паракомпактными.

Ключевые слова: so-множество, so-паракомпактное пространство, S-паракомпактное пространство, секвенциально компактное пространство.

1. Введение

Подмножество S топологического пространства X называется просто-открытым (simply-open [1]), или so-множеством, если $S = O \cup N$, где O — открытое, а N — нигде неплотное множество (при этом любое из множеств O и N может быть, в частности, пустым.

Множество S называется полуоткрытым (semi-open [2]), если существует такое открытое множество O, что $O \subset S \subset [O]$ (квадратными скобками мы обозначаем замыкание).

Определение 1. Топологическое пространство X называется so-паракомпактным, если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие, состоящее из so-множеств.

Очевидно (в силу известного результата Майкла), для регулярных пространств понятие so-паракомпактного пространства совпадает с понятием паракомпактного пространства в обычном смысле. Поэтому все утверждения, касающиеся so-паракомпактных пространств, представляют интерес только для нерегулярных пространств.

2. so-паракомпактные пространства

Предложение 1. Всякое замкнутое подпространство so-паракомпактного пространства so-паракомпактно.

Доказательство. Пусть X есть so-паракомпактное пространство, F - его замкнутое подпространство и пусть $\gamma = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ – произвольное покрытие F открытыми в F множествами. Тогда для каждого $V_\alpha \in \gamma$ существует такое открытое в X множество U_α, что $V_\alpha = U_\alpha \cap F$. Рассмотрим открытое покрытие ω пространства X, состоящее из всех таких множеств $U_\alpha, \alpha \in A$, и множества

Статья поступила в редакцию 15 мая 2013 г.

$U = X \setminus F$. Так как пространство X является so-паракомпактным, то мы можем вписать в покрытие ω локально конечное покрытие μ, состоящее из so-множеств. Рассмотрим покрытие подпространства F множествами вида $G \cap F, G \in \mu$; обозначим его через λ. Пересечение so-множества с замкнутым множеством есть so-множество, поэтому элементы покрытия λ являются so-множествами (не только по отношению к F, но и по отношению ко всему пространству X). Убедимся в том, что покрытие λ локально конечно. Действительно, возьмём произвольную точку $x_0 \in F$. Так как покрытие μ локально конечно, то существует в пространстве X такая окрестность $O(x_0)$ точки x_0, которая пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия μ. Положим теперь $V(x_0) = O(x_0) \cap F$. Очевидно, $V(x_0)$ есть окрестность точки x_0 в F, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия λ. Итак, в произвольное открытое покрытие γ подпространства F мы вписали локально конечное покрытие λ, состоящее из so-множеств. Следовательно, F есть so-паракомпактное подпространство пространства X. □

В классе хаусдорфовых пространств всякое паракомпактное пространство, очевидно, просто-паракомпактно, но, как показывает следующий пример, обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 1. Хаусдорфово so-паракомпактное пространство, не являющееся паракомпактным. Пусть $X = R^+ \cup \{p\}$, где $R^+ = [0, +\infty]$ и $p \notin R^+$. Топология на X задаётся следующим образом: R^+ имеет обычную евклидову топологию и является открытым подпространством пространства X, а база $\{O_n(p)\}$ окрестностей точки $p \in X$ имеет следующий вид

$$O_n(p) = \{p\} \cup \bigcup_{i=n}^{\infty}, \text{ где } n \in N^+.$$

(См. P.-Y. Li, Y.-K. Song [3]). Легко убедиться в том, что X есть хаусдорфово пространство. В то же время оно не регулярно. Очевидно, множество N^+ здесь является замкнутым. Легко убедиться, что для точки p и замкнутого множества N^+ не существует содержащих их дизъюнктных окрестностей. Пространство X не паракомпактно, так как всякое паракомпактное хаусдорфово пространство является регулярным (и даже нормальным).

Убедимся в том, что X есть so-паракомпактное пространство. Пусть $\omega = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ – произвольное открытое покрытие пространства X. Существует такое $U_\alpha(p)$, что $p \in U_\alpha(p)$. Далее, существует такое $n \in N^+$, что $p \in O_n(p) \subset U_\alpha(p)$. Согласно определению топологии на пространстве X, разность $X \setminus O_n(p)$ есть замкнутое подмножество пространства X. Оно не содержит точку p и паракомпактно как подпространство пространства X. Поэтому в открытое покрытие $\{U_\alpha \setminus O_n(p) : \alpha \in A\}$ можно вписать локально конечное открытое покрытие μ. Ясно, что μ является локально конечным в X. Так как пересечение открытого и замкнутого множеств есть so-множество, то всякое $V \in \mu$ есть so-множество в X. Очевидно, покрытие $\{O_n(p)\} \cup \mu$ есть локально конечное покрытие пространства X просто-открытыми множествами, вписанное в ω. Итак, X есть so-паракомпактное пространство.

Предложение 2. Всякое счётно компактное so-паракомпактное пространство X бикомпактно.

Доказательство. Пусть λ – произвольное открытое покрытие пространства X. Впишем в λ локально конечное покрытие μ, состоящее из so-множеств. Известно (см. R.Engelking [4]), что всякая локально конечная система (состоящая из любых множеств) счётно компактного пространства конечна. Поэтому покрытие μ конечно, $\mu = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$. Так как μ вписано в λ, то для каждого $V_i, (i = 1, \ldots, n)$ существует такое U_i, что $U_i \supset V_i$. Следовательно, $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ – конечное подпокрытие исходного покрытия λ. Итак, пространство X бикомпактно. □

Пример 2. Счётно компактное пространство, не являющееся so-паракомпактным. Пусть $I^c = \prod\limits_{s\in R} I_s$, где $I_s = I = [0 : 1]$ для каждого $s \in R$. Очевидно, I^c – бикомпакт. Обозначим через X подпространство пространства I^c, состоящее из тех точек $\{x_s\}$, которые имеют не более чем счётное множество координат, отличных от нуля. Нетрудно убедиться в том, что X счётно компактно. Доказательство счётной компактности X (см., например, R.Engelking [4]) основано на том, что пространство счётно компактно тогда и только тогда, когда каждое его бесконечное подмножество обладает хотя бы одной предельной точкой. Пространство X не является so-паракомпактным. В этом можно убедиться непосредственно, но проще воспользоваться предложением 1. Если бы пространство X было so-паракомпактным, то оно было бы бикомпактным. Однако по построению X есть собственное плотное подмножество бикомпакта I^c, а поэтому не бикомпактно.

Пример 3. Другой пример счётно компактного не so-паракомпактного пространства — это пространство $X = \beta N \setminus \{x\}$, где $x \in \beta N \setminus N$. Счётная компактность пространства X известна, но X не замкнуто в βN, следовательно, не бикомпактно, а в силу предложения 1 – не so-паракомпактно.

Напомним, что пространство X называется секвенциально компактным, если оно удовлетворяет условию Больцано-Вейерштрасса, а именно: любая бесконечная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Следует заметить, что некоторые авторы называют секвенциально компактными только хаусдорфовы пространства, удовлетворяющие условию Больцано-Вейерштрасса. Мы же здесь не предполагаем никаких аксиом отделимости. Поэтому из секвенциальной компактности не следует счётная компактность.

Теорема 1. *Если so-паракомпактное пространство X секвенциально компактно, то X бикомпактно.*

Доказательство. Пусть X секвенциально компактно и so-паракомпактно. Докажем сначала, исходя из секвенциальной компактности, что всякое локально конечное покрытие пространства X конечно. Предположим противное. Пусть локально конечное покрытие $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ является бесконечным. Возьмём какую-нибудь бесконечную счётную подсистему $\{U_i : i \in N\}$ системы γ. Выберем произвольно в каждом элементе U_i этой подсистемы по одной точке $x_i \in U_i$. При этом может оказаться, что из разных множеств U_i выбрана одна и та же точка. Убедимся, что, тем не менее, множество различных точек в выбранной последовательности является бесконечным. Действительно, так как покрытие γ локально конечно, то оно и подавно точечно конечно, и, поэтому, каждая из выбранных точек может принадлежать не более чем конечному числу элементов системы $\{U_i : i \in N\}$. Итак, выбранная последовательность x_i содержит бесконечную подпоследовательность, состоящую из бесконечного множества различных элементов, а та, в свою очередь, в силу секвенциальной компактности X содержит подпоследовательность x_{i_k}, сходящуюся к некоторой точке x_0. Но тогда всякая окрестность $O(x_0)$ точки x_0 содержит бесконечное множество элементов этой сходящейся последовательности и, следовательно, пересекается с бесконечным числом элементов покрытия γ, что противоречит его локальной конечности. Полученное противоречие доказывает, что предположение о бесконечности покрытия γ неверно. Итак, всякое локально конечное покрытие X конечно.

Пусть теперь ω -— произвольное открытое покрытие пространства X, $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$. Так как X является so-паракомпактным, то в покрытие ω можно вписать локально конечное покрытие λ, состоящее из so-множеств. По доказанному выше, так как X секвенциально компактно, то покрытие λ состоит из конечного числа элементов, $\lambda = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, являющихся so-множествами. Для каждого $k(k = 1, 2, \ldots, n)$ существует такое $O_{\alpha(k)} \in \omega$, что $V_k \in O_{\alpha(k)}$, и семейство $\{O_{\alpha(k)} : k = 1, 2, \ldots, n\}$ есть конечное подпокрытие покрытия ω. Следовательно, пространство X бикомпактно. $\square$

Следствие 1. Хаусдорфово секвенциальное so-паракомпактное пространство X является бикомпактом, то есть, бикомпактным нормальным пространством.

Доказательство. Действительно, по теореме 1 пространство X бикомпактно, а так как оно хаусдорфово и бикомпактно, то оно нормально. □

Определение 2. Открытое покрытие λ пространства X называется правильно вписанным в открытое покрытие ω этого пространства, если для любых двух пересекающихся элементов V_1, V_2 покрытия λ существует такой элемент $U \in \omega$, что $(V_1 \cup V_2) \subset U$.

Понятие правильной вписанности есть обобщение понятия звёздной вписанности покрытия. Напомним, что звездой точки $x \in X$ относительно покрытия λ называется множество $St\lambda(x) = \cup\{V \subset \lambda : x \in V\}$, то есть объединение всех элементов покрытия λ, содержащих данную точку. Покрытие λ называется звёздно вписанным в покрытие ω, если для каждой точки $x \in X$ существует такой элемент $U \in \omega$, что $St\lambda(x) \subset U$. A.H.Stone [5] доказал, что T_1 пространство паракомпактно тогда и только тогда, когда во всякое его открытое покрытие можно звёздно вписать некоторое открытое покрытие. В связи с этим возник вопрос: является ли паракомпактным пространство, во всякое открытое покрытие которого можно правильно вписать открытое покрытие? Ответ оказался отрицательным — см. [6]. Пространство с таким свойством стало называться псевдо-паракомпактным (см. [7]). Поскольку понятие so-паракомпактного пространства есть обобщение понятия паракомпактного пространства, то естественно теперь поставить такой вопрос: всякое ли псевдо-паракомпактные пространство является so-паракомпактным? Ответ оказался отрицательным.

Пример 4. Секвенциально компактное псевдо паракомпактное пространство, не являющееся so-паракомпактным. Пусть X -– множество всех порядковых чисел α, меньших первого несчётного порядкового числа ω_1, и пусть τ -– топология в X, базой которой служат всевозможные интервалы в X. Полученное при этом пространство обычно обозначают через $TW(\omega_1)$. Хорошо известно, что пространство $TW(\omega_1)$ хаусдорфово, обладает в каждой точке локальной счётной базой, является секвенциально компактным, но не бикомпактно.

Пространство $X = TW(\omega_1)$ не является so-паракомпактным. В этом можно убедиться непосредственно. Но проще рассуждать иначе. Если бы пространство X было so-паракомпактным, то из его секвенциальной компактности и теоремы 1 следовало бы, что X бикомпактно, а это не так. Хорошо известно, что $X = TW(\omega_1)$ не бикомпактно (оно даже не паракомпактно - см. [6]). Итак, данный пример есть пример псевдо паракомпактного секвенциально компактного пространства не являющегося so-паракомпактным.

Определение 3. Пространство X называется $S-$паракомпактным (K.Y.Al-Zoubi, [8]), если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие, состоящее из полуоткрытых множеств.

Пример 5. Хаусдорфово почти паракомпактное пространство, не являющееся $S-$паракомпактным. Этот пример рассмотрен в работе [3]. Приведём его здесь, так как в дальнейшем он понадобится нам по другому поводу. Положим $X = R^+ \cup \{a\} \cup \{b\}$, где, как обычно, $R^+ = [0, +\infty]$, $a \neq b, a, b \notin R^+$. Зададим топологию на X следующим образом: R^+ имеет обычную топологию и является открытым подпространством пространства X. Базовые окрестности точки $a \in X$ имеют вид: $O_n(a) = \{a\} \cup \bigcup\limits_{i=n}^{\infty}(2i, 2i+1)$, где $n \in N^+$; окрестности точки $b \in X$ определяются выражением $O_m(b) = \{b\} \cup \bigcup\limits_{i=m}^{\infty}(2i-1, 2i)$, где $m \in N$.

Smythe и Wilkins, рассмотрев ранее этот пример, показали, что пространство X, будучи хаусдорфовым, не является бикомпактным. Это пространство является почти паракомпактным хаусдорфовым пространством. Пространство X, как заметили P.-Y.Li и Y.-K.Song, не является $S-$паракомпактным. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть открытое покрытие

$$\omega = \{[0,1)\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ i - \frac{1}{3}, i + \frac{1}{3} \right\} \cup \{O_1(a)\} \cup \{O_1(b)\}$$

пространства X. Согласно определению топологии на X, никакое покрытие полуоткрытыми множествами, вписанное в ω, не является локально конечным в точках a и b.

Пример 6. Хаусдорфово so-паракомпактное пространство, не являющееся S-паракомпактным. Рассмотрим пространство X из предыдущего примера 5. Это пространство не является S-паракомпактным. Докажем, что оно является so-паракомпактным, то есть, докажем, что во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие, состоящее из so-множеств. Пусть ω -– произвольное открытое покрытие пространства X. Тогда существуют такие $U(a), U(b) \in \omega$, что $a \in U(a), b \in U(b)$. Следовательно, существуют такие $n_1, n2 \in N$, что $O_{n_1}(a) \subset U(a)$ и $O_{n_2}(b) \subset U(b)$. Не умаляя общности, можем считать, что $n_1 < n_2$. Так как отрезок $[0, 2n_2 - 1]$ есть бикомпакт, то существует конечное подпокрытие $\omega_1 \subset \omega$ этого отрезка. Положим

$$\mu = \omega_1 \cup \{O_{n_1}(a)\} \cup \{O_{n_2}(b)\} \cup \{\{i\} : i \geqslant 2n_2\}.$$

Ясно, что μ покрытие μ локально конечно и вписано в ω. Оно состоит из открытых и одноточечных множеств. Так как и открытые, и одноточечные множества являются so-множествами, то μ есть покрытие пространства X so-множествами, вписанное в ω. Итак, пространство X есть so-паракомпактное пространство, не являющееся $S-$паракомпактным.

Рассмотрим теперь топологические произведения, где одним из сомножителей является so-паракомпактное пространство. Ясно, что произведение двух so-паракомпактных пространств может не быть so-паракомпактным. Более того -– произведение двух паракомпактных пространств может не быть so-паракомпактным.

Пример 7. Рассмотрим пространство Z, называемое пространством Зоргенфрея. На полуинтервале $[0; 1)$ числовой прямой задаётся топология, базу которой образуют всевозможные полуинтервалы $[a; b)$. Как известно, Z паракомпактно, даже финально компактно (иначе говоря, линделефово), но произведение $Z \times Z$, будучи регулярным пространством, не является паракомпактным. Это пространство не является также so-паракомпактным, так как для регулярных пространств паракомпактность эквивалентна so-паракомпактности.

Теорема 2. *Если X есть so-паракомпактное пространство, а Y — бикомпактно, то произведение $X \times Y$ есть so-паракомпактное пространство.*

Доказательство. Пусть λ — открытое покрытие произведения $X \times Y$. Тогда для всякой точки$z = (x, y) \in X \times Y$ существуют такие открытые множества $V_z \subset X$ и $W_z \subset Y$, что $(x, y) \in V_z \times W_z \subset U$ для некоторого $U \in \lambda$. Для каждого $x \in X$ положим $Z_x = \{x\} \times Y$. Тогда семейство множеств $\{W_z : z \in Z_x\}$ является открытым покрытием бикомпактного пространства Y. Следовательно, существует такое конечное подмножество $Z_x^{'} \subset Z_x$, что $\{W_z : z \in Z_x^{'}\}$ есть покрытие (очевидно, конечное) пространства Y, являющееся подпокрытием покрытия $\{W_z : z \in Z_x\}$. Пусть $Vx = \cap\{V_z : z \in Z\}$. Тогда V_x есть открытое множество, содержащее x. Тогда $\mu = \{V_x : x \in X\}$ есть открытое покрытие so-паракомпактного пространства X. Поэтому существует локально конечное покрытие η пространства X, состоящее из so-множеств и вписанное в μ. Так как η вписано в μ, то для всякого $O \in \eta$ существует такая точка $x(O) \in X$, что $O \subset V_{x(O)}$.

Тогда $\xi = \{O \times W_z : O \in \eta, z \in Z'_{x(O)}\}$ есть покрытие пространства $X \times Y$. Напомним, что произведение so-множеств есть so-множество, поэтому элементы покрытия ξ, каждый из которых есть произведение so-множества и открытого множества, являются so-множествами. Далее, для каждой точки существует окрестность $U(x_0) \subset X$, которая пересекается не более чем с конечным числом элементов $O \in \eta$, так как η локально конечно. Обозначим через p проекцию $X \times Y \to X$. Тогда $p^{-1}(U(x_0))$ есть открытое множество, которое пересекается не более чем с конечным числом элементов покрытия η. Итак, η есть локально конечное покрытие, состоящее из so-множеств и вписанное в исходное покрытие λ. Следовательно, $X \times Y$ есть so-паракомпактное пространство. □

Литература

1. *Biswas N.* On Some Mappings in Topological Spaces // Bull. Cal. Math. Soc. — 1969. — Vol. 61. — Pp. 127–135.
2. *Levine N.* Semi-open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces // Amer. Math. Monthly. — 1963. — Vol. 70. — Pp. 36–41.
3. *Li P.-Y., Song Y.-K.* Some Remarks on S-paracompact Spaces // Acta Math. Hungar. — 2008. — Vol. 118(4). — Pp. 345–355.
4. *Engelking R.* General Topology. — Warszawa, 1977.
5. *Stone A. H.* Paracompactness and Product Spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 54. — Pp. 977–982.
6. *Клюшин В. Л.* Паракомпактность и счётная паракомпактность // Вестник МГУ. — 1963. — Т. 1. — С. 35–38. [*Klyushin V. L.* Parakompaktnostj i schyotnaya parakompaktnostj // Vestnik MGU. — 1963. — T. 1. — S. 35–38.]
7. *Kluchine V.* Sur les espaces pseudo-paracompacts // Bull. Soc. Roy. Sci. Liège. — 1973. — Vol. 11-12. — Pp. 523–528.
8. *Al-Zoubi K. Y.* S-paracompact Spaces // Acta Math. Hungar. — 2006. — Vol. 110(1-2). — Pp. 165–174.

UDC 513.831

On Some Generalization of Paracompactness

V. L. Kljushin, Al bayati Jalal Hatem Hussein

Higher Mathematics Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

The generalization of paracompact spaces via so-sets, sets are unions of open and nowhere dense sets, was studied. The aim of this paper is to establish the relationship between so-paracompact spaces and other generalizations of paracompact spaces and clarify the conditions under which the so-paracompact space is compact. The problem is solved by methods of general topology. It is proved that the sequentially compact so-paracompact space is compact. It is proved that the so-paracompactness saved when multiplied by the compact. Previously, other authors introduced the concept of S-paracompact space, based on the semi-open sets. Class of so-paracompact spaces wider than the class S-paracompact spaces. This paper shows that there are so-paracompact spaces which are not S-paracompact.

Key words and phrases: so-set, so-paracompact space, S-paracompact space, sequentially compact space.