УДК 519.63

Краевая задача для уравнения эллиптического типа в области с «угловой точкой»

Е. Е. Перепёлкин, Р. В. Полякова, И. П. Юдин

Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

Современные ускорительные системы и детекторы содержат магнитные системы сложной геометрической конфигурации. Проектирование и оптимизация магнитных систем требует решения нелинейной краевой задачи магнитостатики. Область, в которой решается краевая задача, состоит из двух подобластей: область вакуума и область ферромагнетика. Из-за сложной геометрической конфигурации магнитных систем граница раздела сред ферромагнетик/вакуум может являться негладкой, то есть содержать угловую точку, в окрестности которой граница образована двумя гладкими кривыми, пересекающимися в угловой точке под некоторым углом. Для линейных дифференциальных уравнений известно, что в таких областях решения соответствующих им краевых задач могут обладать неограниченно растущими первыми производными в окрестности угловой точки.

В некоторых работах рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение дивергентного типа в области с углом и показана возможность существования решений с неограниченно растущим модулем градиента в окрестности угловой точки. В данной работе рассматривается область, состоящая из двух подобластей (ферромагнетик/вакуум) разделённых границей с угловой точкой. В данной области рассматривается постановка задачи магнитостатики относительно двух скалярных потенциалов. Нелинейность краевой задачи связана с функцией магнитной проницаемости, которая зависит от модуля градиента решения краевой задачи. В случае, когда функция магнитной проницаемости при больших полях удовлетворяет определённым условиям, в данной работе доказывается теорема об ограниченности модуля градиента решения в окрестности угловой точки.

Ключевые слова: магнитные системы, математическое моделирование, краевая задача, эллиптические уравнения, поведение решения в угловой точке.

1. Постановка краевой задачи

Ставится задача магнитостатики о нахождении распределения магнитного поля в окрестности угловой точки ферромагнетика (рис. 1). Из уравнений Максвелла и из соотношений на границе раздела сред (считаем, что токи отсутствуют в рассматриваемой области) следует

$$\operatorname{div}\overrightarrow{B}(p) = 0, \quad \operatorname{rot}\overrightarrow{H}(p) = 0, \quad p \in \Omega;$$

$$\vec{n} \cdot (\overrightarrow{B}_1 - \overrightarrow{B}_2) = 0, \quad \vec{n} \times (\overrightarrow{H}_1 - \overrightarrow{H}_2) = 0, \quad p \in \Gamma.$$

где Ω — область ферромагнетика и вакуума, Γ — граница раздела сред, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{H}$ — векторы индукции и напряжённости магнитного поля соответственно. Для области ферромагнетика Ω_2 можно записать $\overrightarrow{B} = \mu_0\mu(H)\overrightarrow{H}$, где $H = \left|\overrightarrow{H}\right|$, $\mu(H)$ — магнитная проницаемость, μ_0 — магнитная постоянная; для области вакуума Ω_1: $\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{H}$. Из-за отсутствия в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ источников с током следует потенциальность поля, отсюда справедливо представление

$$\overrightarrow{H}(p) = -\nabla u(p), \ p \in \Omega, \ u(p) = \begin{cases} u_1(p), & p \in \Omega_1, \\ u_2(p), & p \in \Omega_2, \end{cases}$$

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2013 г.

где $u(p)$ — скалярный потенциал. Тогда постановка краевой задачи примет вид

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left[\mu\left(|\nabla u_2(p)|\right)\nabla u_2(p)\right]=0, \quad p\in\Omega_2, \\ \Delta u_1(p)=0, \quad p\in\Omega_1, \\ u_1|_{\Gamma_-}=u_2|_{\Gamma_+}, \\ \mu\left(|\nabla u_2(p)|\right)\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{\Gamma_+}=\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{\Gamma_-}, \\ u_1|_{\Gamma_1}=\Psi_1; \quad u_2|_{\Gamma_2}=\Psi_2, \end{cases} \tag{1}$$

где функция $\mu(H)$ удовлетворяет условиям:

1. $\mu(H)\in C^{(1)}[0,+\infty)$;
2. для $H\in[0,+\infty)$, $\mu(H)>1$;
3. $\mu(H)\overset{H\to+\infty}{\longrightarrow}1$.

Рассмотрим функцию $\bar{\mu}(H)$, аналог функции $\mu(H)$, у которой второе и третье условия заменены на следующее: для $H'\geqslant H_0$, $\bar{\mu}(H')=1$, где H_0 — достаточно велико. В дальнейшем будем предполагать, что решение краевой задачи (1) $u\in C(\Omega\cup\Gamma\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2)$, из этого следует, что $\exists C_0>0\,\forall p\in\Omega\cup\Gamma\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2:|u(p)|<C_0$.

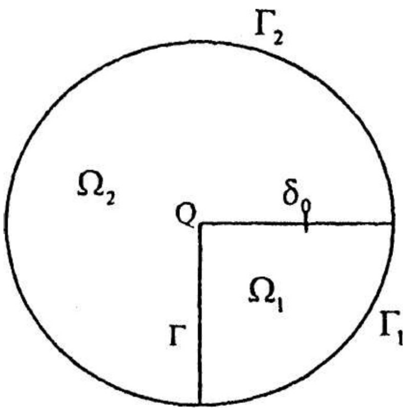

Рис. 1. Задача магнитостатики

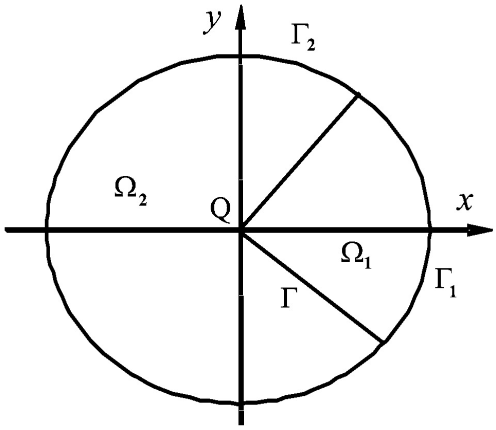

Рис. 2. Решаемая краевая задача

2. Об одной краевой задаче

Прежде чем приступить к основным утверждениям данной статьи, рассмотрим вспомогательную задачу, которая подробно разобрана в [1]. Итак, рассмотрим краевую задачу (рис. 2)

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left[q\nabla u(p)\right]=0, \ p\in\Omega \\ u|_{\Gamma_-}=u|_{\Gamma_+} \\ q_2\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_+}=q_1\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_-} \\ u|_{\Gamma_1}=\Psi_1; \ u|_{\Gamma_2}=\Psi_2 \end{cases}, \quad \text{где} \quad q=\begin{cases} q_1, & p\in\Omega_1, \\ q_2, & p\in\Omega_2, \end{cases}$$

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2, \quad \Omega_1=\left\{(r,\varphi):0<r<r_0,\ |\varphi|<\pi/4\right\},$$
$$\Omega_2=\left\{(r,\varphi):0<r<r_0,\ |\varphi|<\pi/4\right\},$$

где $\Psi_i \in C^{(1)}(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$ (рис. 2). Введём полярную систему координат. Решение будем искать методом разделения переменных: $u \sim R(r) \cdot \Phi(\varphi)$. В результате имеем

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0, r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0.$$

Таким образом, для $R(r)$ в силу ограниченности в нуле $u(p)$, получим решение $R(r) \sim r^{\lambda}$, а для $\Phi(\varphi)$ — собственные функции, которые распадаются на две группы: 1) симметричные относительно $\varphi = 0$ и 2) антисимметричные относительно $\varphi = 0$. В первом случае собственные функции примут вид

$$\Phi_{\lambda}^{(1)}(\varphi) = \begin{cases} \cos(\lambda\varphi), & |\varphi| < \pi/4, \\ a_{\lambda} \cos\left(\lambda(\pi - \varphi)\right), & |\varphi| > \pi/4. \end{cases}$$

Здесь постоянная a_{λ} определяется из соотношения на границе для нормальных производных

$$a_{\lambda} = -\left[q_1 \sin\left(\lambda\frac{\pi}{4}\right)\right] \Big/ \left[q_2 \sin\left(\lambda\frac{3\pi}{4}\right)\right],$$

а для определения собственных значений λ воспользуемся соотношением непрерывности для решения $u(r, \varphi)$ на границе раздела

$$-\frac{q_1}{q_2} = \frac{\cos\left(\lambda\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\lambda\frac{3\pi}{4}\right)} \frac{\sin\left(\lambda\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(\lambda\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Таким образом, или $\operatorname{tg}\left(\lambda\frac{\pi}{4}\right) = 0$ и тогда $\lambda = 4n$, или $\lambda = \pm\lambda_1 \pm 4n$, где λ_1 — наименьший корень уравнения

$$-\frac{q_1}{q_2} = \left[3 - \operatorname{tg}^2\left(\lambda\frac{\pi}{4}\right)\right] \Big/ \left[1 - 3\operatorname{tg}^2\left(\lambda\frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{2}$$

Особенность в решение будет вносить член ряда $r^{\lambda_1}\Phi_{\lambda_1}(\varphi)$ при $\lambda_1 < 1$. Из (2) следует, что

$$\lambda_1 = 1 \Leftrightarrow q_1 = q_2. \tag{3}$$

Это означает, что если $q_1 = q_2$, то $|\nabla u(p)|$ будет ограничен.

3. Поведение решения краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу (1) с функцией магнитной проницаемости $\bar{\mu}$, область Ω показана на рис. 1.

Следствие.

$$\exists K > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad 0 < \rho\,(p, Q) < \delta : |\nabla u(p)| < K,$$

где $\rho(p, Q)$ — расстояние между точками p и Q, а под ограниченностью на Γ понимается ограниченность на Γ_+ и на Γ_-.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Предположим, что это не так, тогда

$$\forall K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < \rho\,(p, Q) < \delta : |\nabla u(p)| \geqslant K.$$

Возьмём $K = \max\left(H_0, 4C_0\sqrt{\pi}\right)$, $0 < \delta_0 < \delta$, тогда для $p : 0 < \rho\,(p, Q) \leqslant \delta_0$ должно выполняться условие

$$|\nabla u(p)| \geqslant H_0 \Rightarrow \bar{\mu}(H) = 1. \tag{4}$$

Введём полярную систему координат с центром в точке Q. Пусть $u(r, \varphi)$ — решение нашей краевой задачи, удовлетворяющее условию (4), тогда на $\Gamma_\pm$ оно должно удовлетворять условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,(\delta_0, \varphi)\right|_{\varphi=0+} = \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,(\delta_0, \varphi)\right|_{\varphi=0-}, \tag{5}$$

а в силу непрерывности $u(\delta_0, \varphi)$ должно выполняться

$$\left.u\,(\delta_0, \varphi)\right|_{\varphi=0+} = \left.u\,(\delta_0, \varphi)\right|_{\varphi=0-} = u\,(\delta_0, 0)\,. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\exists \frac{\partial u}{\partial \varphi}\,(\delta_0, 0) = \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,(\delta_0, \varphi)\right|_{\varphi=0_+} = \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,(\delta_0, \varphi)\right|_{\varphi=0_-}.$$

Таким образом, положив

$$\overline{\Psi}_i(\varphi) = u_i\,(\delta_0, \varphi)\,, \quad i = 1, 2, \quad \overline{\Psi} = \begin{cases} \overline{\Psi}_1, \overline{\Gamma}_1, \\ \overline{\Psi}_2, \overline{\Gamma}_2, \end{cases}$$
$$\overline{\Gamma} = \left\{(\delta_0, \varphi) : 0 < \varphi \leqslant 2\pi\right\},$$

получаем в δ_0–окрестности точки Q краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u_1(p) = 0 \quad, p \in \Omega_1, \quad \Delta u_2(p) = 0 \quad, p \in \Omega_2, \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{\Gamma_+} = \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{\Gamma_-}, \quad u_1|_{\Gamma_-} = u_2|_{\Gamma_+}\,, u|_{\overline{\Gamma}} = \overline{\Psi}, \end{cases} \tag{7}$$

где $\overline{\Psi} \in C^{(1)}\left(\overline{\Gamma}\right)$. Из (3) (а также из [1]) получаем, что (7) не имеет особенностей, т.е. $\lim\limits_{p \to Q} |\nabla u(p)| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \leqslant 4C_0\sqrt{\pi} = K$, где a_1 и b_1 — коэффициенты ряда Фурье для функции $u(p)$ на границе $\overline{\Gamma}$. Следовательно, получили противоречие, которое и доказывает наше утверждение. □

Таким образом, из утверждения следует ограниченность магнитного поля в окрестности «угловой точки» при условии, что функция магнитной проницаемости удовлетворяет условиям:
1) $\bar{\mu}(H) \in C^{(1)}[0, +\infty)$;
2) $\exists H_0 > 0\ \forall H' \geqslant H_0 : \bar{\mu}(H') = 1$.

Отметим интересный факт. Допустим, мы решаем краевую задачу (1) численными методами, и пусть решение этой задачи имеет неограниченный $|\nabla u|$. Это означает, что в окрестности точки Q функция магнитной проницаемости $\mu\left(|\nabla u|\right)$ будет стремиться к единице. А в силу того, что число цифр в мантиссе числа ограничено, получится, что в некоторой малой окрестности точки Q функция $\mu\left(|\nabla u|\right)$ будет равна 1, т.е. возникнет краевая задача (1) с функцией магнитной проницаемости $\bar{\mu}(H)$, которая по теореме имеет ограниченный $|\nabla u|$, в результате получим противоречие.

Следовательно, «теоретически» при численных расчётах не может быть получено решение с неограниченно растущим $|\nabla u|$, мы будем получать решение другой краевой задачи, а именно задачи (1) с $\bar{\mu}(H)$, имеющей ограниченный $|\nabla u|$.

Но решение задачи (1) с $\bar{\mu}(H)$ в общем случае не совпадает с решением исходной задачи (1) с $\mu(H)$. Поэтому необходимо использовать специальные методы для решения такой задачи. Один из таких методов рассмотрен в работе [2] для уравнения $\operatorname{div}\left[\mu\left(|\nabla u|\right)\nabla u\right] = 0$ в области с углом.

Успеху этой работы авторы обязаны профессору Е.П. Жидкову, светлой памяти которого она посвящается.

Литература

1. *Стренг Г., Фикс Д.* Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977. [Strang G., Fix G. An Analysis of the Finite Element Method. — Moscow: Mir, 1977. — (in russian).]
2. *Zhidkov E. P., Perepelkin E. E.* An Analytical Approach for Quasi-Linear Equation in Secondary Order // CMAM. — 2001. — Vol. 1, No 3. — Pp. 285–297.

UDC 519.63

The Boundary Value Problem for Elliptic Equation in the Corner Domain

E. E. Perepelkin, R. V. Polyakova, I. P. Yudin

Joint Institute for Nuclear Research
6, Joliot-Curie str., Dubna, Moscow region, Russia, 141980

Modern accelerator systems and detectors contain magnetic systems of complex geometrical configuration. Design and optimization of the magnetic systems demand solving a nonlinear boundary-value problem of magnetostatic. The region in which the boundary-value problem is solved, consists of two sub-regions: a region of vacuum and a region of ferromagnetic. In view of the complex geometrical configuration of magnetic systems, the ferromagnetic/vacuum boundary can be nonsmooth, i.e. it contains a corner point near of which the boundary is formed by two smooth curves crossed in a corner point at some angle. For linear differential equations it is known that in such regions the solutions of the corresponding boundary-value problems can possess unlimitedly growing first derivatives near of the corner point.

Some works consider a nonlinear differential equation of divergent type in the region with a corner and the opportunity of existence of solutions with unlimitedly growing module of gradient near the corner point is shown. The present work analyzes the region consisting of two sub-regions (ferromagnetic/vacuum) divided by a boundary with the corner point. In this region one considers a formulation of the magnetostatics problem with respect to two scalar potentials. Nonlinearity of the boundary-value problem is related to the function of magnetic permeability which depends upon the module of gradient of the solution to the boundary-value problem. In a case when the function of magnetic permeability at big fields satisfies certain conditions, in this work a theorem of limitation of the module of gradient of the solution near the corner point is proved.

Key words and phrases: magnet systems, mathematical modeling, boundary value problem, elliptic equations, the behavior of solutions in the corner domain.