УДК 534-18.517 PACS 47.35.Fg,47.55.Ca

Уточнённое уравнение для описания нелинейных волн в жидкости с пузырьками газа

Н. А. Кудряшов*, Д. И. Синельщиков*

* *Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ*
Каширское шоссе, д. 31, Москва, Россия, 115409

Исследуются нелинейные волновые процессы в жидкости с пузырьками газа при учёте вязкости жидкости, межфазного теплообмена, поверхностного натяжения и слабой сжимаемости жидкости. Для описания длинных волн малой амплитуды в газожидкостной смеси получено нелинейное дифференциальное уравнение с использованием метода многих масштабов и метода возмущений. При выводе уравнения учтены слагаемые более высокого порядка малости в асимптотическом разложении. Данное уравнение является обобщением уравнения Бюргерса и описывает волновые процессы в жидкости с пузырьками газа в случае преобладания диссипативных процессов. С помощью почти-тождественных преобразований получена нормальная форма указанного выше уравнения. Показано, что нормальная форма обобщения уравнения Бюргерса линеаризуется при некотором ограничении на параметры. В этом случае данное уравнение является вторым членом иерархии уравнения Бюргерса. В общем случае для нормальной формы выведенного уравнения получено точное решение в виде волны перехода. Проведён анализ зависимости параметров данного точного решения от физических характеристик системы жидкость-пузырьки газа. Показано, что амплитуда точного решения затухает как с ростом равновесного значения радиуса пузырька, так и с ростом вязкости несущей жидкости.

Ключевые слова: жидкость с пузырьками газа, нелинейные волны, нелинейные эволюционные уравнения, точные решения, нормальная форма.

1. Введение

Математические модели жидкости с пузырьками газа используются при описании процессов и явлений в природе, промышленности и медицине [1, 2]. Нелинейные волновые процессы в жидкости с пузырьками газа при учёте вязкости жидкости впервые изучались в работах [3, 4], где для описания длинных волн малой амплитуды были получены уравнения Бюргерса, Кортевега–де Вриза и Бюргерса–Кортевега–де Вриза. В [5] исследованы волновые процессы в газожидкостной смеси при учёте процесса межфазного теплообмена.

В указанных выше работах при исследовании волновых процессов в жидкости с пузырьками газа в асимптотическом разложении были учтены только поправки первого порядка малости. Известно, что учёт более слагаемых более высокого порядка малости позволяет получить более точное описание для нелинейных волн.

Целью настоящей работы является изучение длинных волн малой амплитуды в жидкости с пузырьками газа при учёте слагаемых более высокого порядка малости в асимптотическом разложении.

В работе получено уравнение, описывающее волновые процессы в жидкости с пузырьками газа в случае преобладания диссипативных процессов. Данное уравнение является обобщением уравнения Бюргреса и описывает как диссипацию, так и дисперсию волн. В работе найдена нормальная форма данного уравнения и некоторые его точные решения.

2. Дифференциальное уравнение для описания волновых процессов в жидкости с пузырьками газа

Известно, что для описания волновых процессов в жидкости с пузырьками газа при учёте процесса межфазного теплообмена, вязкости и сжимаемости жидкости может быть использована следующая система уравнений:

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2013 г.

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_\tau + \tilde{u}_\xi + (\tilde{\rho}\tilde{u})_\xi = 0, \\ (\tilde{\rho}+1)(\tilde{u}_\tau + \tilde{u}\tilde{u}_\xi) + \dfrac{1}{\tilde{\alpha}}P_\xi = 0, \\ P = \tilde{\alpha}\tilde{\rho} + \tilde{\alpha}_1\tilde{\rho}^2 + \tilde{\beta}\tilde{\rho}_{\tau\tau} - \tilde{\beta}_1\tilde{\rho}\,\tilde{\rho}_{\tau\tau} - \tilde{\beta}_2\tilde{\rho}_\tau^2 + \varkappa\tilde{\rho}_\tau + \\ \qquad + \varkappa_1\tilde{\rho}\tilde{\rho}_\tau - \tilde{\gamma}_1\tilde{\rho}_{\tau\tau\tau} + \tilde{\gamma}_2\tilde{\rho}\tilde{\rho}_{\tau\tau\tau} + 3\tilde{\gamma}_2\tilde{\rho}_\tau\tilde{\rho}_{\tau\tau}. \end{cases} \tag{1}$$

где ξ — координата, τ — время, $\tilde{\rho}$ — возмущение плотности газожидкостной смеси, $\tilde{u}(\xi,\tau)$ — скорость смеси, $P(\xi,\tau)$ — давление смеси. Выражение для безразмерных параметров $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$, $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ представлены в [6].

Для вывода нелинейного уравнения, описывающего волновые процессы в жидкости с пузырьками газа, используется метод многих масштабов. В соответствии с этим методом вводятся «медленные» переменные

$$x = \varepsilon^m(\xi - \tau), \quad t = \varepsilon^{m+1}\tau, \quad m > 0, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{2}$$

и решение системы (1) ищется в виде

$$\tilde{\rho} = \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + \ldots, \quad \tilde{u} = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \quad P = \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots \tag{3}$$

Используя данный подход, можно получить дифференциальное уравнение для ρ_1

$$\rho_{1t} + \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}}\right)\rho_1\rho_{1x} + \varepsilon^{2m-1}\frac{\tilde{\beta}}{2\tilde{\alpha}}(\rho_{1xxx} - 2\varepsilon\rho_{1txx}) - \\ - \varepsilon^{2m}\frac{\tilde{\beta}_1}{2\tilde{\alpha}}(\rho_{1x}\rho_{1xx} + \rho_1\rho_{1xxx}) - \varepsilon^{2m}\frac{\tilde{\beta}_2}{\tilde{\alpha}}\rho_{1x}\rho_{1xx} - \\ - \varepsilon^{3m-1}\frac{\tilde{\gamma}_1}{2\tilde{\alpha}}(3\varepsilon\rho_{1xxxt} - \rho_{1xxxx}) = \varepsilon^{m-1}\frac{\varkappa}{2\tilde{\alpha}}(\rho_{1xx} - \varepsilon\rho_{1tx}) + \varepsilon^m\frac{\varkappa_1}{2\tilde{\alpha}}(\rho_1\rho_{1x})_x \tag{4}$$

В дальнейшем рассмотрим значение $m = 1$, отвечающее преобладающему влиянию диссипации.

Пусть $m = 1$. Тогда из (4), принимая во внимание слагаемые с ε в нулевой и первой степени и используя обозначения

$$\rho_1 = u, \quad \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}}\right) = \alpha, \quad \frac{\tilde{\beta}}{2\tilde{\alpha}} = \beta, \quad \frac{\varkappa}{2\tilde{\alpha}} = \mu, \quad \frac{\varkappa_1}{2\alpha} = \nu, \tag{5}$$

получим уравнение

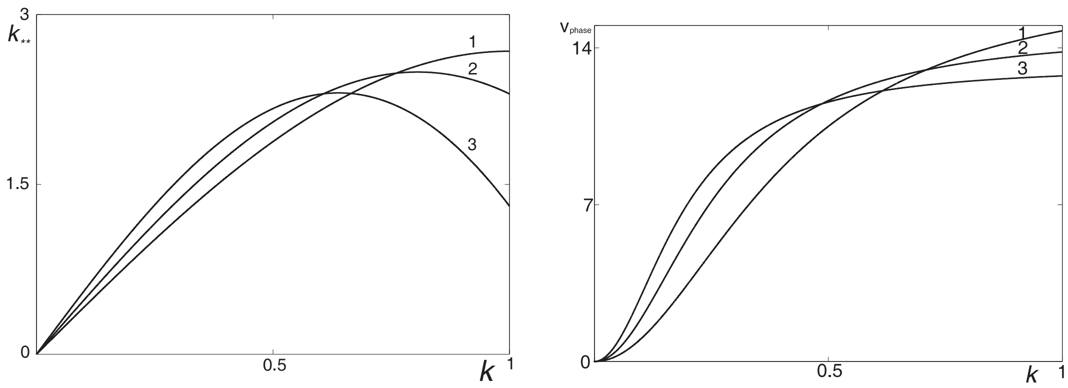
$$u_t + \alpha u u_x - \mu u_{xx} = \varepsilon\Big(\nu(uu_x)_x - \beta u_{xxx} - \mu u_{xt}\Big). \tag{6}$$

Уравнение (6) является обобщением уравнения Бюргерса для описания длинных волн в жидкости с пузырьками газа. На рис. 1 представлены линейный декремент затухания и фазовая скорость волн описываемых уравнением (6) в воде с пузырьками углекислого газа. Из рис. 1 видно, что фазовая скорость и линейных декремент затухания убывают с ростом равновесного значения радиуса пузырька.

Построим нормальную форму уравнения (6). С этой целью используем почти–тождественные преобразования

$$u = v + \varepsilon(\alpha_1 v^2 + \alpha_2 v_x \partial_x^{-1} v), \tag{7}$$

Исключая из (6) смешанную производную и подставляя (7) в (6) с точностью до слагаемых первого порядка по ε, получим уравнение



а б

Рис. 1. Линейный декремент затухания и фазовая скорость волн, описываемых уравнением (6) для воды с пузырьками углекислого газа. Объёмное газосодержание $\phi_0 = 0,001$. Кривая 1:$R_0 = 0,23$ мм; Кривая 2: $R_0 = 0,25$ мм; Кривая 3: $R_0 = 0,27$ мм

$$v_t + \alpha v v_x - \mu v_{xx} = \varepsilon\Bigg((2\mu\alpha_2 + \mu\alpha + \nu) v v_{xx} + (2\mu\alpha_1 + \mu\alpha + \nu) v_x^2 - \\ - \frac{\alpha(\alpha_2 + 2\alpha_1)}{2} v^2 v_x - (\beta + \mu^2) v_{xxx}\Bigg). \quad (8)$$

Здесь α_1, α_2 произвольные параметры, вводимые почти-тождественными преобразованиями (7).

Пусть выполнены соотношения

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{(\beta + \mu^2)\alpha}{2\mu^2}, \quad \nu = \frac{\alpha(\beta - \mu^2)}{2\mu}. \quad (9)$$

Тогда после использования преобразований растяжения уравнение (8) примет вид

$$v_t + v_{xxx} - 3(v\, v_x)_x + 3v^2 v_x = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) является вторым членом иерархии уравнения Бюргерса и может быть линеаризовано с помощью преобразования Коула–Хопфа. Отметим, что (8) сводится к интегрируемому уравнению только при выполнении ограничения (9) (второе соотношение из (9)) на физические параметры.

Построим точные решения (8), не ограничивая его параметры вторым из соотношений (9). Используя метод простейших уравнений [7], можно показать, что при

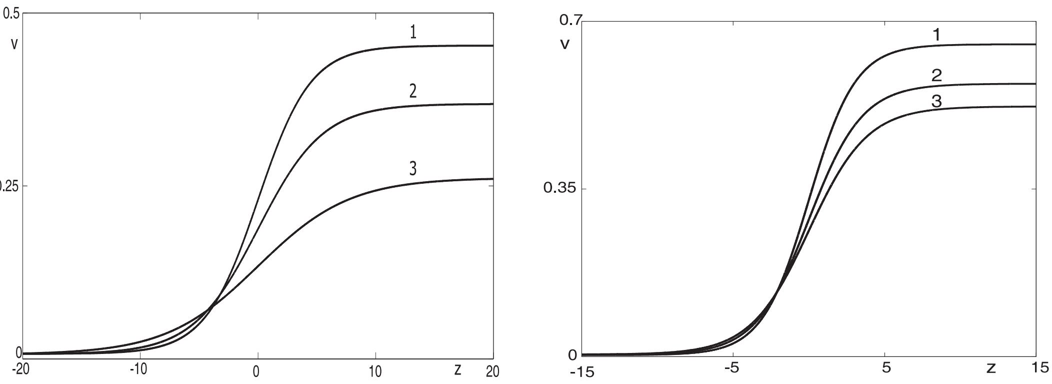
$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{2}{4\mu + \alpha}(2\beta + 2\mu^2 + \mu\alpha + \nu) \quad (11)$$

уравнение (8) имеет следующие решение

$$v = \frac{(2\mu + \alpha)(4\mu + \alpha)}{4\varepsilon(3\beta\alpha + 3\mu^2\alpha + \mu\alpha^2 + \nu\alpha + 4\mu\beta + 4\mu^3)} + \sqrt{B}\tanh\{\sqrt{B}(z - z_0)\}, \\ z = x - C_0 t, \quad (12)$$

где C_0, z_0 — произвольные постоянные, B — параметр, зависящий от μ, ν, α, β и C_0, выражение для которого не приводится в силу его громоздкости.

Графики решения (12) для различных значений равновесного радиуса пузырьков (левый рисунок) и для различных жидкостей (правый рисунок) представлены на рис. 2. Из рис. 2 видно, что амплитуда волны, описываемой уравнением (12), затухает как с ростом равновесного значения радиуса пузырька, так и с ростом вязкости несущей жидкости.



а б

Рис. 2. Точное решение (12) **уравнения** (8)**. Равновесное объёмное газосодержание:** $\phi_0 = 0,001$**. Кривая 1:** $R_0 = 0,14$ **мм; Кривая 2:** $R_0 = 0,16$ **мм; Крива 3:** $R_0 = 0,18$ **мм (левый рисунок). Точное решение** (12)**. Равновесное объёмного газосодержание:** $\phi_0 = 0,001$**; равновесное значение радиуса пузырьков:** $R_0 = 0,1$ **мм. Кривая 1: вода; Кривая 2: масло; Кривая 3: глицерин (правый рисунок)**

3. Заключение

В работе рассматривалось распространение возмущений в жидкости с пузырьками газа при учёте вязкости и сжимаемости жидкости и процесса межфазного теплообмена. Для описания волновых процессов получено нелинейное дифференциально уравнение третьего порядка. Для данного уравнения построена его нормальная форма. Показано, что при некотором ограничении на физические параметры, уравнение для нормальной формы является интегрируемым. В общем случае построено точное решение уравнения для нормальной формы в виде волн перехода.

Литература

1. *Nakoryakov V. E., Pokusaev B. G., Shreiber I. G.* Wave Propagation in Gas-Liquid Media. — Boca Raton: CRC Press, 1993.
2. *Nigmatulin R. I.* Dynamics of Multiphase Media, Part 2. — New York: Taylor & Francis, 1990.
3. *Wijngaarden L. V.* One-Dimensional Flow of Liquids Containing Small Gas Bubbles // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1972. — Vol. 4. — Pp. 369–396.
4. *Nakoryakov V. E., Sobolev V. V., Shreiber I. R.* Longwave Perturbations in a Gas-Liquid Mixture // Fluid Dyn. — 1972. — Vol. 7, No 5. — Pp. 763–768.
5. *Kudryashov N. A., Sinelshchikov D. I.* Nonlinear Waves in Bubbly Liquids with Consideration for Viscosity and Heat Transfer // Phys. Lett. A. — 2010. — Vol. 374, No 19–20. — Pp. 2011–2016.

6. *Kudryashov N. A., Sinelshchikov D. I.* An Extended Equation for the Description of Nonlinear Waves in a Liquid with Gas Bubbles // Wave Mot. — 2013. — Vol. 50, No 3. — Pp. 351–362.
7. *Kudryashov N. A.* Simplest Equation Method to Look for Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations // Chaos Soliton Fract. — 2005. — Vol. 24, No 5. — Pp. 1217–1231.

UDC 534-18.517 PACS 47.35.Fg,47.55.Ca

Modeling the Track Formation in Amorphous Iron Alloys Exposed to High-Energy Heavy Ions

N. A. Kudryashov*, D. I. Sinelshchikov*

* *National Research Nuclear University MEPHI*
31, Kashirskoe Shosse, Moscow, Russia, 115409

Nonlinear waves in liquid with gas bubbles are investigated taken into account liquid viscosity and compressibility and inter phase heat transfer. The nonlinear differential equation for long weakly nonlinear waves is obtained with the help of the reductive perturbation method. At the derivation of the equation higher order corrections in the asymptotic expansion are taken into account. This equation is the generalization of the Burgers equation and describes nonlinear waves in a liquid with gas bubbles in the case of dissipation main influence. The normal form is constructed for the equation with the help of the near-identity transformations. It is shown that the normal form equation is integrable under certain condition on parameters. In this case the equation for nonlinear waves is the second member of the Burgers hierarchy. Exact solution in the form of kink is obtained in the general case. Dependence of this solution on physical parameters is investigated. It is shown that the amplitude of this exact solution decreases when the bubbles radius in the unperturbed state and the liquid viscosity increase.

Key words and phrases: liquid with gas bubbles, nonlinear waves, nonlinear evolution equations, exact solutions, normal form.