УДК 517.977 519.7 PACS 02.30.Yy 02.30.Sa

Задача оптимального управления для линейных распределённых систем дробного порядка

В. А. Кубышкин, С. С. Постнов

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
ул. Профсоюзная, д. 65, Москва, 117997

Рассмотрена задача оптимального управления объектом, который описывается одномерным уравнением переноса, определённым на конечном отрезке, с дробной производной по времени. Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Капуто. Рассматривается случай, когда управления входят как в правую часть уравнения и зависят от пространственных координат и времени, так и в граничные условия и зависят только от времени. Поставлены две задачи оптимального управления: 1) задача перевода объекта из начального состояния в заданное за минимальное время при ограничении на норму управляющих воздействий; 2) задача перевода объекта из начального состояния в заданное за фиксированное время при минимальной норме управления. Предполагается, что допустимые управления принадлежат классу функций, интегрируемых в заданной области со степенью p. Показано, что поставленная задача оптимального управления может быть сведена к известной проблеме моментов и соответствующей задаче на условный минимум выпуклой функции многих переменных. Для полученной проблемы моментов определены условия, при которых она может быть поставлена и является разрешимой. Работа может быть полезной при разработке систем управления объектами, в динамике которых проявляются эффекты аномальной диффузии.

Ключевые слова: уравнения дробного порядка, дробная производная Капуто, проблема моментов, оптимальное управление.

1. Введение

В последние годы активно развивается исследование динамических систем нецелого порядка с управлением [1–4], приобретая всё большую актуальность как с теоретической, так и с прикладной точки зрения.

В известных в настоящее время работах задачи оптимального управления для систем нецелого порядка исследовались в рамках вариационного подхода [5, 6], не позволяющего явным образом учитывать ограничения на норму управления и работать с разрывными управлениями. Методов, аналогичных принципу максимума Л.С. Понтрягина, не разработано. В связи с этим актуальным представляется применение известного в классической теории систем метода моментов [7]. Показано, что этот метод может успешно применяться при исследовании задачи оптимального управления для линейных стационарных сосредоточенных систем [8].

В данной работе рассматривается применение метода моментов для исследования задачи оптимального управления в линейных распределённых системах, описываемых уравнением переноса дробного порядка, в которых управление принадлежит пространству $L_p[0,T]$ функций, интегрируемых на отрезке $[0,T]$ со степенью p, $1 < p < \infty$.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать системы вида

$$ {}_{0}^{C}D_t^{\alpha} Q(x,t) = K\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) + f(x,t), \qquad t \geqslant 0, x \in [0,L], \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2013 г.

где $Q(x,t)$ — состояние объекта, $u(x,t) \in L_p(\Omega)$ — распределённое управление, $1 < p < \infty$, ${}_0^C D_t^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто [2], $\alpha \in (0,1]$, $(x,t) \in \Omega = [0,\infty) \times [0,L]$, $f(t)$ — возмущение (считается известным), $K = \mathrm{const}$ — коэффициент переноса. Начальное и граничные условия для системы (1):

$$Q(x,0+) = Q_0(x), x \in [0,L], \tag{2}$$

$$\left[b_{1,2}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_{1,2}Q(x,t)\right]_{x=0,L} = h_{1,2}(t) + u_{0,1}(t), t \geqslant 0, \tag{3}$$

где a_i и b_i, $i = 1,2$ — постоянные коэффициенты, $u_0(t) \in L_p[0,T]$ и $u_1(t) \in L_p[0,T]$ — граничные управления. Конечное условие определим следующим образом:

$$Q(x,T) = Q^*(x), \qquad T > 0, x \in [0,L]. \tag{4}$$

Управления $u(x,t)$, $u_0(t)$ и $u_1(t)$ можно объединить в вектор

$$U(x,t) = (u(x,t), u_0(t), u_1(t)) \in L_p(\Omega).$$

Поставим задачу оптимального управления следующим образом.

Задача А. Найти управления $u(x,t) \in L_p(\Omega)$, $u_0(t) \in L_p[0,T]$ и $u_1(t) \in L_p[0,T]$, чтобы для системы (1) с начальным условием (2) и граничными условиями (3) конечное состояние (4) было достигнуто за минимально возможное время T, при ограничении на норму управления $\|U\| \leqslant l$, $l > 0$.

Задача Б. Задан момент времени $t = T$, $T > 0$. Найти управления $u(x,t) \in L_p(\Omega)$, $u_0(t) \in L_p[0,T]$ и $u_1(t) \in L_p[0,T]$, при которых система (1) с начальным условием (2) и граничными условиями (3) перейдёт в конечное состояние (4) и при этом норма $\|U\|$ будет минимальна.

3. Представление задачи оптимального управления в форме проблемы моментов

Для системы (1)–(3) известно общее решение [9, формула (14)]. Запишем его для конечного состояния (4):

$$Q(x,T) = Q^*(x) = Q^0(x,T) + v_1(x)u_0(T) + v_2(x)u_1(T) + \tag{5}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\int_0^T \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]\left[u_n(t) - v_{1n}\cdot {}_0^C D_t^\alpha u_0(t) - v_{2n}\cdot {}_0^C D_t^\alpha u_1(t)\right]\mathrm{d}t}{(T-t)^{1-\alpha}},$$

где $v_1(x) = \dfrac{a_2(x-L) - b_2}{a_2b_1 - a_1b_2 - a_1a_2L}$; $v_2(x) = \dfrac{b_1 - a_1x}{a_2b_1 - a_1b_2 - a_1a_2L}$;

$$Q^0(x,T) = V(x,T) + \sum_{n=1}^{\infty} E_\alpha[-\lambda_n T^\alpha]\left[Q_{0n} - V_n(0+) - v_{1n}u_0(0+) - \right.$$

$$\left. -v_{2n}u_1(0+)\right] X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\int_0^T \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]\left[f_n(t) - {}_0^C D_t^\alpha V_n(t)\right]}{(T-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t;$$

λ_n и $X_n(x)$ — соответственно собственные числа и собственные функции однородной задачи Штурма–Лиувилля для уравнения (1) [9]; $u_n(t)$, Q_{0n}, $V_n(t)$, $f_n(t)$ и $v_{(1,2)n}$ — коэффициенты разложения функций $u(x,t)$, $Q_0(x)$, $V(x,t)$, $f(x,t)$ и

$v_{1,2}(x)$ по системе функций $\{X_n(x)\}$; $V(x,t) = v_1(x)h_1(t) + v_2(x)h_2(t)$; $E_{\alpha,\beta}(t)$ — двухпараметрическая функция Миттаг–Леффлера [2]; $E_\alpha(t) = E_{\alpha,1}(t)$. Функции $Q^*(x)$, $Q^0(x,T)$ и $v_{(1,2)n}$, входящие в формулу (5) можно также разложить по системе функций $\{X_n(x)\}$. Поскольку данная система является полной, то для выполнения равенства (5) достаточно, чтобы выполнялось равенство соответствующих коэффициентов разложения для каждого n. Отсюда получаем обобщённую бесконечномерную l-проблему моментов следующего вида:

$$\int_0^T\int_0^L g_n^0(x,t,T)u(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T g_n(t,T)\left[v_{1n}\cdot {}_0^C D_t^\alpha u_0(t) + v_{2n}\cdot {}_0^C D_t^\alpha u_1(t)\right]\mathrm{d}t = a_n(T), \tag{6}$$

где $a_n(T) = Q_n^* - Q_n^0(T) - v_{1n}u_0(T) + v_{2n}u_1(T)$,

$$g_n(t,T) = \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}; \qquad g_n^0(x,t,T) = g_n(t,T)\frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|^2}$$

Известно [7], что для постановки проблемы моментов (6) ключевым условием является ограниченность нормы функций $g_n^0(x,t,T)$ и $g_n(t,T)$ в пространствах $L_{p'}(\Omega)$ и $L_{p'}[0,T]$, сопряжённом пространствам $L_p(\Omega)$ и $L_p[0,T]$, $1/p+1/p' = 1$. Для разрешимости проблемы моментов (6) необходимо и достаточно, чтобы функции $g_n^0(x,t,T)$ и $g_n(t,T)$ были линейно независимы [7]. Последнее условие, как легко убедиться, для функций $g_n^0(x,t,T)$ и $g_n(t,T)$ выполняется $\forall\alpha \in (0,1]$, $\forall(x,t) \in \Omega$, $\forall T > 0$. Чтобы исследовать возможность постановки проблемы моментов оценим норму функций $g_n(t,T)$ (аналогичная оценка будет справедлива и для функций $g_n^0(x,t,T)$). В силу общих свойств нормы [10, гл. 3, § 3] справедливо неравенство:

$$\|g_n(t,T)\| \leqslant \|E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n\,(T-\tau)^\alpha]\|\;\|(T-t)^{\alpha-1}\|.$$

Первый сомножитель ограничен в силу свойств функции Миттаг–Леффлера [2, С. 42]. Для второго сомножителя справедливо выражение

$$\|(T-t)^{\alpha-1}\| = (T-t)^{[p'(\alpha-1)+1]/p'}\Big|_0^T, \quad t \in [0,T].$$

Отсюда видно, что выражение в правой части будет ограничено при выполнении условия

$$\alpha > \frac{p'-1}{p'}. \tag{7}$$

В формулу для общего решения задачи (1) и, следовательно, в выражения для моментов $a_n(T)$ входят величины $u_{0,1}(0)$ и $u_{0,1}(T)$. В общем случае эти значения должны определяться исходя из дополнительных предположений или ограничений, налагаемых на систему, но в ряде частных случаев, например, в случае граничных условий Дирихле, эти величины могут быть определены на основании согласования граничных и начальных условий в указанных точках.

Рассмотренная выше постановка задачи оптимального управления в виде задач А и Б может быть обобщена и на случай, когда требуется учесть конечную точность оценки состояния системы: в этом случае требуется не обеспечить выполнение конечного условия (4), а обеспечить выполнение неравенства $\|Q(x,T) - Q^*(x)\| \leqslant \varepsilon$. Тогда формулы становятся заметно более громоздкими, но задача всё равно сводится к некоторой проблеме моментов. Кроме того, бесконечномерную проблему моментов не всегда удаётся решить и приходится аппроксимировать её соответствующей конечномерной проблемой.

4. Заключение

В настоящей работе задача оптимального управления в форме проблемы моментов поставлена и исследована для распределённых систем, описываемых уравнением переноса дробного порядка. Изучена возможность постановки проблемы моментов и её разрешимость, выведены соответствующие условия.

Литература

1. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008. [Uchaikin V. V. The Method of Fractional Derivatives. — Ulyanovsk: Artishok, 2008. — (in russian).]
2. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
3. Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications / C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre et al. — London: Springer-Verlag, 2010.
4. Fractional Order Systems. Modeling and Control Applications / R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petras. — Singapore: World Scientific, 2010.
5. *Agrawal O. P.* A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Nonlinear Dynamics. — 2004. — Vol. 38. — Pp. 323–337.
6. *Frederico G. S. F., Torres D. F. M.* Fractional Optimal Control in the Sense of Caputo and the Fractional Noether's Theorem // Int. Math. Forum. — 2008. — Vol. 3, No 10. — Pp. 479–493.
7. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами. — М.: Наука, 1975. [Butkovskii A. G. Methods of Control by Distributed-Parameter Systems. — Moscow: Nauka, 1975. — (in russian).]
8. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 5. — С. 3–15. [Kubyshkin V A, Postnov S. V. A Problem of Optimum Control Over a Linear Stationary System of Fraction Order: Formulation and Research // Automation and Remote Control. — 2014. — No 5. — Pp. 3–15. — (in russian).]
9. *Tomovski Z., Sandev T.* Exact Solutions for Fractional Diffusion Equation in a Bounded Domain with Different Boundary Conditions // Nonlinear Dynamics. — 2013. — Vol. 71. — Pp. 671–683.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. [Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of Function Theory and Functional Analysis. — M.: Nauka, 1976. — (in russian).]

UDC 517.977 519.7 PACS 02.30.Yy 02.30.Sa

The Optimal Control Problem for Linear Distributed Systems of Fractional Order

V. A. Kubyshkin, S. S. Postnov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, RAS
65, Profsoyuznaya str., Moscow, Russia, 117997

Optimal control problem considered for the plant which described by one-dimensional transfer equation with Caputo fractional derivative. The equation defined on finite segment. Investigation evaluates for both of cases when controls enter into right part of equation and depend on spatial coordinates and time and when controls enter into boundary conditions and depends on time only. Two types of optimal control problem studied: 1) the problem of plant transfer from initial state to given one with minimal transfer time and control norm restriction; 2) the problem of plant transfer from initial state to given one with minimal control norm at given transfer time. It's assumed that admissible controls belong to the function class which p-integrable in given domain. It's shown that assigned optimal control problem can be reduced to the known problem of moments and to corresponding problem of conditional minimization for convex multivariable function. For the problem of moments conditions of statement possibility and solvability derived. This work can be useful for control systems development for plants which dynamics can reveal anomalous diffusion.

Key words and phrases: fractional order equations, Caputo fractional derivative, problem of moments, optimal control.