

Математическое моделирование динамики жидкости в испаряющейся капле с учётом капиллярных и гравитационных сил

К. С. Колегов*, А. И. Лобанов†

* Каспийский институт морского и речного транспорта – филиал ФБОУ ВПО «ВГАВТ» в г. Астрахань
ул. Костина, д. 2, Астрахань, Россия, 414014
Астраханский государственный университет
ул. Татищева, д. 20а, Астрахань, Россия, 414056

† Московская государственная академия водного транспорта
Новоданиловская наб., д. 2, корп. 1, Москва, Россия, 117105
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Институтский пер., д. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия, 141700
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
ул. Чернышевского, д. 173, г. Нальчик, Россия, 360004

В этой работе представлена одномерная математическая модель, описывающая эволюцию профиля капли и динамику вязкой жидкости (усреднённую по высоте жидкого слоя скорость радиального течения) в результате испарения с горизонтальной непроницаемой поверхности. Модель учитывает влияние объёмной и капиллярной силы. Для математического описания процесса используется нестационарный подход. Уравнение неразрывности и уравнение движения для случая системы переменной массы решаются численно стандартными средствами математического пакета Maple. Расчёты проведены для случаев капель воды разных объёмов. Результаты моделирования показывают, что форма капли, размер которой превышает капиллярную длину (число Бонда больше единицы), отличается от формы сферического сегмента. Поверхность такой капли уплощена. Это объясняется тем, что в каплях большого объёма сила тяжести доминирует над силой поверхностного натяжения. Течение компенсационной природы присутствует в испаряющихся каплях разных объёмов, что согласуется с экспериментальными данными других авторов. Таким образом, радиальное течение жидкости может быть вызвано работой как капиллярных, так и гравитационных сил. Полученные нами результаты в дальнейшем послужат описанию эффекта кофейных колец в макрокаплях.

Ключевые слова: испаряющаяся капля, уравнение состояния, гравитационные и капиллярные силы, радиальное течение, эволюция формы капли.

1. Введение

Задача об испаряющейся капле представляет фундаментальный и прикладной интерес. С феноменами, наблюдаемыми в процессе высыхания капель (например, эффект капли кофе, формирование белкового валика и т. п.), а также с приложениями капель и плёнок в медицине, технике и других сферах, можно ознакомиться, к примеру, в последних обзорах [1, 2].

В основополагающих теоретических работах [3, 4] и в дальнейших исследованиях рассматриваются капли капиллярного размера, то есть капли, диаметр которых не превышает капиллярную длину $\sqrt{\sigma/(g\Delta\rho)}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения, g — гравитационная константа, $\Delta\rho$ — разность плотности жидкости и газа. В таких открытых системах капиллярная сила доминирует над силой тяжести, поэтому последней зачастую пренебрегают. Поверхность этих капель близка к форме сферического сегмента. Значительное отклонение от

Статья поступила в редакцию 27 сентября 2013 г.

Авторы выражают искреннюю благодарность проф., д.ф.-м.н. из Астраханского государственного университета Ю.Ю. Тарасевичу за советы и замечания, высказанные при чтении рукописи данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.588.2011 «Математическое моделирование процессов самоорганизации в системах микро- и наночастиц») и РФФИ (проект 13-01-90711 мол_рф_нр).

равновесной формы заметно лишь тогда, когда капиллярное течение не успева-ет компенсировать быстрое испарение жидкости [4]. Равновесная форма капель, размер которых превышает капиллярную длину, далека от формы сферического сегмента [5]. Вдали от линии контакта с горизонтальной подложкой поверхность практически плоская. В [5] экспериментально изучается влияние силы тяжести на геометрию капли. Математическому описанию зависимости формы капли от гравитации посвящена [6]. Двухмерная модель, представленная в [6], включает уравнения Навье-Стокса и уравнение энергии. Приведённая в [6] модель позво-лила авторам объяснить, как значение g влияет на геометрию капли. Расчёты показали, что капля с постоянным объёмом при увеличении g растекается силь-нее, высота её уменьшается, а поверхность уплощается. В [7] приводится сравне-ние профиля (для разных капель), полученного из эксперимента, с рассчитанным сферическим профилем. Некоторые теоретические заметки о влиянии силы тя-жести и течения на форму поверхности вязкого слоя жидкости капиллярного размера изложены в [8]. Целью данной работы является теоретическое изучение влияния гравитационных и капиллярных сил на радиальное течение, вызванное испарением жидкости с поверхности капли.

2. Физическая постановка задачи

Рассмотрим тонкую каплю (высота капли много меньше диаметра основа-ния), размещённую на смачиваемой непромокаемой поверхности. Во внимание берём случай медленного испарения, в связи с чем процесс считаем изотерми-ческим. Полагаем, что граница контакта «жидкость–подложка–газ» закреплена (пиннинг). Допустим, что капля обладает осевой симметрией. Задачу рассмотрим в цилиндрических координатах. Ось z расположена в центре капли и направлена перпендикулярно от подложки в сторону жидкого слоя, ноль соответствует распо-ложению подложки. В силу осевой симметрии зависимость от угловой переменной отсутствует, поэтому исключаем её из рассмотрения. По причине предположения тонкости слоя жидкости во внимание не берём зависимость от z , будем учиты-вать усреднённую по высоте капли радиальную скорость течения жидкости. Так как процесс испарения нестационарный, задачу будем описывать в координатах (r, t) . Область решения задачи $r \in [0, R]$ для $t \geq 0$, где $r = 0$ соответствует цен-тру капли, $r = R$ — свободной границе капли (R — радиус основания капли). В качестве подложки будем рассматривать модельную поверхность с заданным уг-лом смачивания θ . В приближении тонкости слоя считаем, что θ не зависит от объёма капли.

3. Математическая модель

Для описания процесса будем использовать математическую модель [9]. Си-стема уравнений задана одномерным уравнением неразрывности и движения

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{h} \tilde{u})}{\partial \tilde{r}} = -E \tilde{J} l, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right) - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{h}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} \right) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}}, \quad (2)$$

где $\tilde{}$ обозначает безразмерную величину, профиль капли \tilde{h} , скорость ради-ального течения \tilde{u} , плотность потока пара \tilde{J} , давление \tilde{P} — функции от (\tilde{r}, \tilde{t}) ,

$l = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}}\right)^2}$, E — параметр испарения, $E = J_c L_c / \eta$, η — динамическая вяз-

кость жидкости, L_c — характерный масштаб, $L_c = \sqrt[3]{V}$, V — объем капли, J_c —
 характерная плотность потока пара (значение J_c неизвестно, поэтому E — под-
 бираемый параметр). Для перехода к размерным величинам используются сле-
 дующие соотношения: $h = \tilde{h} L_c$, $R = \tilde{R} L_c$, $r = \tilde{r} L_c$, $u = \tilde{u} u_c$, $u_c = \eta / (\rho L_c)$, ρ —
 плотность жидкости, $t = \tilde{t} L_c / u_c$, $P = \tilde{P} \rho u_c^2$.

Зададим вид уравнения состояния. В [4] из уравнения Юнга–Лапласа, с учётом
 тонкости слоя ($l \approx 1$), было получено выражение $\tilde{P} = -\frac{1}{Ca} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} \right)$, где $Ca =$
 $\eta^2 / (\rho \sigma L_c)$ — капиллярное число. Если кроме капиллярной силы рассматривать
 ещё и силу тяжести, то результирующее давление будет суммой давления Лапласа
 и гидростатического давления

$$\tilde{P} = -\frac{1}{Ca} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} \right) + \text{Ar} \tilde{h}, \quad (3)$$

где $\text{Ar} = g L_c^3 \rho^2 / \eta^2$ — число Архимеда.

Рассмотрим граничные и начальные условия. В силу осевой симметрии
 $\frac{\partial \tilde{h}(0, \tilde{t})}{\partial \tilde{r}} = 0$, на периферии $\tilde{h}(\tilde{R}, \tilde{t}) = 0$. В центре и на краю капли скорость равна
 нулю, $\tilde{u}(0, \tilde{t}) = \tilde{u}(\tilde{R}, \tilde{t}) = 0$ [4, 10]. Положим, что в момент времени $\tilde{t} = 0$ течение в
 капле отсутствует, $\tilde{u}(\tilde{r}, 0) = 0$. Профиль капли $\tilde{h}(\tilde{r}, 0) = \tilde{H}(\tilde{r})$. В [6] была получе-
 на зависимость профиля от гравитации из уравнения состояния с учётом малого
 значения капиллярного числа ($Ca \ll 1$),

$$\tilde{H}(\tilde{r}) = \frac{2 \text{tg} \theta}{\text{Bo} \tilde{R}} + \frac{1}{\pi \tilde{R}^2} - \frac{\text{tg} \theta}{\sqrt{\text{Bo}} I_1(\tilde{R} \sqrt{\text{Bo}})} I_0(\tilde{r} \sqrt{\text{Bo}}), \quad (4)$$

где $\text{Bo} \approx \rho L_c^2 g / \sigma$ — число Бонда, I_0 и I_1 — модифицированные функции Бесселя
 нулевого и первого порядка соответственно. Исходными параметрами являются
 θ и Bo , радиус \tilde{R} будем определять на основании одной из асимптотических фор-
 мул [6],

$$\tilde{R} = \left(\frac{4}{\pi \text{tg} \theta} \right)^{1/3} + \frac{\text{Bo}}{18 \pi \text{tg} \theta} - \frac{\text{Bo}^2}{81 \cdot 2^{11/3} (\pi \text{tg} \theta)^{5/3}}. \quad (5)$$

4. Результаты расчётов

Для системы уравнений (1), (2) с замыкающим соотношением (3) необходимо
 определить вид плотности потока пара \tilde{J} . Для описания плотности потока пара
 используем зависимость [4]

$$\tilde{J} = \frac{1 - \exp(-250(\tilde{r} - \tilde{R})^2)}{1 + \tilde{h}}. \quad (6)$$

В [9] было показано, что при $Ca \ll 1$ возможно пренебречь вязким членом в (2). С учётом замыкающего соотношения (3) краткая форма уравнения выглядит как

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} = \frac{1}{Ca} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}} \right) \right) - Ar \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{r}}. \quad (7)$$

Отметим, что кроме $Ca \ll 1$ должно ещё выполняться условие $Ca^{-1} \gg E$ [4], только в этом случае позволительно использовать (7). Таким образом, для расчёта модели использовалась система уравнений (1), (7) с замыкающим соотношением (6). Расчёт выполнялся стандартными средствами пакета Maple. В качестве значений физических параметров жидкости использовались величины, соответствующие воде при стандартных условиях. Результаты приведены на рис. 1. Для моделирования были взяты капли объёмом 1 и 300 μl .

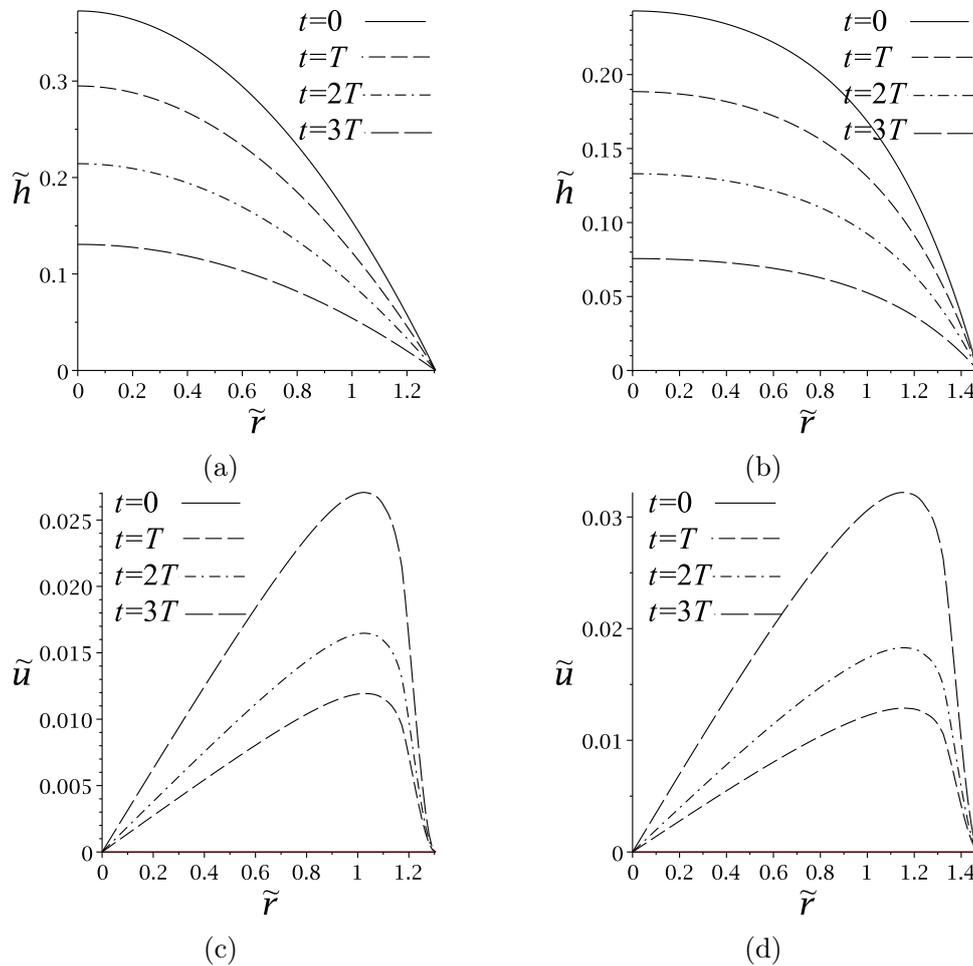


Рис. 1. Результаты расчётов динамики испарения. На рисунке приведены: (а, б) профиль капли, (с, д) скорость радиального течения. Параметры расчёта: $E = 0.01$, $\theta = 30^\circ$; (а, с) $L_c = 10^{-3}$ м, $u_c \approx 10^{-3}$ м/с, $Ca \approx 10^{-5}$, $Ar \approx 10^4$, $Bo \approx 0.1$, время $T \approx 5$ с; (б, д) $L_c \approx 6.7 \cdot 10^{-3}$ м, $u_c \approx 1.5 \cdot 10^{-4}$ м/с, $Ca \approx 2 \cdot 10^{-6}$, $Ar \approx 3 \cdot 10^6$, $Bo \approx 6$, время $T \approx 3$ min

Заметим, что $Bo = CaAr$, таким образом, параметр Bo не только входит в запись граничных и начальных условий (4), (5), но и является определяющим параметром для системы. Когда $Bo \ll 1$, капля имеет форму сферического сегмента.

В случае, если $Bo > 1$, то толщина слоя практически везде постоянная за исключением периферии капли [5]. Наши расчёты согласуются с данным экспериментальным наблюдением. У капли объёмом $1 \mu\text{l}$ радиус основания $R \approx 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, высота капли $h(0, 0) \approx 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ (рис. 1(a)). Во втором случае ($V = 300 \mu\text{l}$) $R \approx 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, высота капли $h(0, 0) \approx 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ (рис. 1(b)). Рассмотрим отношение $\varepsilon = h(0, 0)/R$ для обоих случаев. У маленькой капли $\varepsilon \approx 0.3$, а у большой — $\varepsilon \approx 0.16$. Площадь, занимаемая макрокаплей, значительно больше, но при этом относительная толщина данной капли меньше по сравнению со слоем жидкости малого объёма. Это объясняется доминированием силы тяжести над капиллярной силой. Результаты моделирования показывают, что размер капли (сила тяжести) качественно не влияют на скорость радиального течения (рис. 1(c, d)). Поведение скорости находится в согласии с экспериментом над каплей капиллярного размера [10]. Противотока [3, 9] на графиках скорости вблизи периферии не наблюдается. Скорее всего, это частный случай, связанный с использованием аппроксимации для начального условия (4), (5).

5. Заключение

Экспериментальные и теоретические работы предшественников [5–7], а также результаты, полученные в данной работе, показывают, что при $Bo > 1$ равновесная форма капли далека от формы сферического сегмента. В отличие от [6] здесь рассмотрены капли разных объёмов. Кроме того, моделирование показало, что размеры капли (сила тяжести) качественно не влияют на радиальное течение жидкости, возникающее в результате испарения.

Эффект капли кофе (образование кольцевых осадков после высыхания капли) наблюдается в каплях разного размера, в том числе и макрокаплях [3]. Моделирование этого явления в [4] и работах последователей Фишера выполняется лишь для случая капель капиллярного размера. В дальнейшем планируется исследовать перераспределение взвешенных коллоидных частиц в макрокапле на базе модификации предложенной модели.

Литература

1. *Sefiane K.* Patterns from Drying Drops // *Advances in Colloid and Interface Science.* — 2013. — <http://dx.doi.org/10.1016/j.cis.2013.05.002>.
2. *Routh A. F.* Drying of Thin Colloidal Films // *Reports on Progress in Physics.* — 2013. — Vol. 76, No 4. — P. 046603.
3. Contact Line Deposits in an Evaporating Drop / R. D. Deegan, O. Bakajin, T. F. Dupont et al. // *Physical Review E.* — 2000. — Vol. 62, No 1. — Pp. 756–765.
4. *Fischer B. J.* Particle Convection in an Evaporating Colloidal Droplet // *Langmuir.* — 2002. — Vol. 18, No 1. — Pp. 60–67.
5. Sessile Drop Wettability in Normal and Reduced Gravity / A. Diana, M. Castillo, D. Brutin, T. Steinberg // *Microgravity Science and Technology.* — 2012. — Vol. 24, No 3. — Pp. 195–202.
6. *Bartashevich M. V., Kuznetsov V. V., Kabov O. A.* Gravity Effect on the Axisymmetric Drop Spreading // *Microgravity Science and Technology.* — 2010. — Vol. 22, No 1. — Pp. 107–114.
7. *Коновалов В. И., Пахомов А. Н., Пахомова Ю. В.* Геометрия, циркуляция и тепломассоперенос при испарении капли на подложке // *Вестник ТГТУ.* — 2011. — Т. 17, № 2. — С. 371–387. [Konovalev V. I., Pakhomov A. N., Pakhomova Yu. V.. Geometry, Circulation and Heat and Mass Transfer in Evaporation of Drop on the Substrate // *Transactions TSTU.* — 2011. — Vol. 17, No 2. — Pp. 371–387.]

8. *Barash L. Y.* Influence of Gravitational Forces and Fluid Flows on the Shape of Surfaces of a Viscous Fluid of Capillary Size // *Physical Review E*. — 2009. — Vol. 79, No 2. — P. 025302.
9. *Колегов К. С., Лобанов А. И.* Сравнение квазистационарной и нестационарной математических моделей течений в испаряющейся капле // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 811–825. [*Kolegov K. S., Lobanov A. I.* Comparing of a Quasisteady and Nonsteady Mathematical Models of Fluid Flow in Evaporating Drop // *Computer Research and Modeling*. — 2012. — Vol. 4, No 4. — Pp. 811–825. — (in russian).]
10. *Hamamoto Y., Christy J. R. E., Sefiane K.* Order-of-Magnitude Increase in Flow Velocity Driven by Mass Conservation During the Evaporation of Sessile Drops // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Vol. 83, issue 5. — P. 051602. — <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.051602>.

UDC 532.511 MSC 76D45

Mathematical Modeling of Fluid Dynamics in Evaporating Drop with Taking into Account Capillary and Gravitational Forces

K. S. Kolegov^{*}, A. I. Lobanov[†]

^{*} *Caspian Institute of Sea and River Transport
2, Kostina str., Astrakhan, Russia, 414014
Astrakhan State University*

20a, Tatischev str., Astrakhan, Russia, 414056

[†] *Moscow State Academy of Water Transport*

2, Novodanilovskaya Emb., Moscow, Russia, 117105

Moscow Physics Technical Institute (State University)

9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, Russia, 141700

Kabardino-Balkarian State University

173, Chernyshevskogo st., Nal'chik, Russia, 360004

An one-dimensional mathematical model described evolution of drop shape and viscous fluid dynamics (vertically averaged radial flow of the liquid) as the result of evaporation from impermeable horizontal surface is presented in this work. The model considers the influence of volume and capillary forces. Non-steady-state approach has been used to describe the process mathematically. The continuity equation and the motion equation for the case of a system with a variable mass are solved numerically with using standard tools of mathematical package Maple. We carry out calculations for cases of different sizes of water drop volumes. Results of modeling have shown that profile of drop which is bigger in size of capillary length (Bond number is greater than unity) differs from shape of spherical segment. The surface of such drop is almost flat. We explain it by domination of the gravity over a surface tension force. The flow of compensation nature is present in evaporated drops of different volumes what is coordinated with experimental data of other authors. Thus radial fluid flow is result of work of both capillary and gravitational forces. The results which we have got will help to describe the coffee ring effect in macrodrops in future.

Key words and phrases: evaporating drop, state equation, gravitational and capillary forces, radial flow, evolution of drop shape.