УДК 519.624.3

Исследование решений квазистационарных состояний для квазипотенциального уравнения

И. В. Амирханов, Н. Р. Саркар, И. С. Сархадов, З. К. Тухлиев, З. А. Шарипов

Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

Возбуждённые состояния квантовых систем нестационарны, и они распадаются. Эти состояния называют нестабильными, или квазистационарными. Такие состояния наблюдаются уже при изучении задач рассеяния, накопление частиц в рассеивателе (частица предпочитает жить внутри рассеивателя) сопровождается большой задержкой τ (время жизни квазиуровня). Время жизни квазиуровня $\tau = \gamma^{-1}$, ширина квазиуровня $\Gamma = \hbar\gamma$, комплексная энергия уровня $E = E_1 - iE_2,\ E_2 = \Gamma/2$.

В работе проведено исследование решений квазистационарных состояний для квазипотенциального уравнения с кусочно-постоянными потенциалами при различных значениях параметра ε, входящего в уравнение и параметров потенциала. Проведён сравнительный анализ решений квазипотенциального уравнения при различных значения ε с решениями уравнения Шрёдингера. Установлено, что при $\varepsilon \to 0$ решения квазипотенциального уравнения стремятся к решениям уравнения Шрёдингера.

Ключевые слова: квазистационарные состояния, квазипотенциальное уравнение, оператор сдвига, кусочно-постоянные потенциалы.

1. Введение

В предыдущих наших работах [1,2], исследовались краевые задачи для квазипотенциального уравнения с различными методами и проведён сравнительный анализ полученных решений с решениями аналогичных задач для уравнения Шрёдингера. Подобные исследования были важны для выявления релятивистских эффектов. В данной работе мы исследуем квазистационарные состояния для квазипотенциального уравнения [3] и уравнения Шрёдингера с различными кусочно-постоянными потенциалами, и проведём сравнительный анализ полученных решений. Исследуем решения квазистационарные состояния для следующего уравнения

$$[E_\varepsilon - H_\varepsilon - V(r)]\psi(r) = 0, \tag{1}$$

где

$$E_\varepsilon = \frac{2q^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2 q^2}+1}, \quad H_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2}\left[ch\left(i\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) - 1\right],$$

ε — безразмерный параметр, $V(r)$ — потенциал взаимодействия. В уравнении (1) разлагая оператор $ch\left(i\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$ в ряд, можно свести к дифференциальному уравнению бесконечного порядка. При $\varepsilon \to 0, \quad E_\varepsilon \to q^2, \quad H_\varepsilon \to -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}$, уравнение (1) переходит в нерелятивистское уравнение Шрёдингера

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - V(r) + q^2\right]\psi(r) = 0. \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 22 сентября 2013 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ, № 13-01-00595-а, 11-01-00278-а.

Поэтому особую актуальность приобретает методы поиска таких решений квазистационарных состояний для уравнения (1), которые при $\varepsilon \to 0$ стремятся к решениям аналогичных квазистационарных состояний для уравнения Шрёдингера (2). Тогда отличие этих решений при $\varepsilon \neq 0$ можно интерпретировать как релятивистский эффект.

Как и предыдущих наших работах [1, 2], исследование решений квазистационарных состояний для уравнения (1) проведено с использованием оператора сдвига

$$\exp\left(\pm i\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) f(r) = f\left(r \pm i\varepsilon\right).$$

Проведён сравнительный анализ решений квазипотенциального уравнения (1) с решениями уравнения Шрёдингера (2) для прямоугольной потенциальной ямы, которая показана на рис. 1.

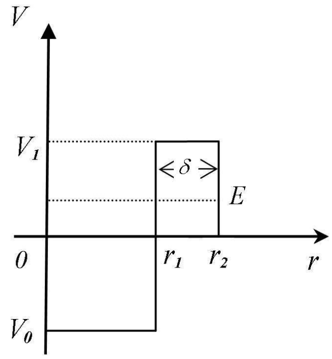

Рис. 1. Тип потенциала

2. Постановка задачи

Сначала получаем необходимые формулы для проведения сравнительного анализа решений квазистационарных состояний для уравнения Шрёдингера (2) и квазипотенциального уравнения (1). Затем приведём численные результаты.

Решения уравнения (1) и (2) для прямоугольной потенциальной ямы (рис. 1) ищем в виде

$$\begin{aligned} &\psi_1(r) = A_1 \sin(kr), && 0 \leqslant r \leqslant r_1,\\ &\psi_2(r) = A_2 \exp(-\kappa r) + B_2 \exp(\kappa r), && r_1 \leqslant r \leqslant r_2,\\ &\psi_3(r) = A_3 \exp(i\alpha r), && r_2 \leqslant r < \infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Поставляя решения (3) в уравнение (2), находим $\alpha = \sqrt{E}$, $\kappa = \sqrt{V_1 - E}$, $k = \sqrt{V_0 + E}$, где $E = E_1 - iE_2$.

Из условия непрерывности функции $\psi(r)$, и её первой производной в точках

$$\begin{gathered} r = r_1 \quad \psi_1(r)|_{r=r_1} = \psi_2(r)|_{r=r_1}, \quad \psi_1'(r)|_{r=r_1} = \psi_2'(r)|_{r=r_1}\\ \text{и}\\ r = r_2 \quad \psi_2(r)|_{r=r_2} = \psi_3(r)|_{r=r_2}, \quad \psi_2'(r)|_{r=r_2} = \psi_3'(r)|_{r=r_2}, \end{gathered} \tag{4}$$

получаем выражение для нахождения E_1, E_2

$$\frac{\kappa + kctg(kr_1)}{\kappa - kctg(kr_1)} - \frac{\kappa + i\alpha}{\kappa - i\alpha}\exp(-2\kappa\delta) = 0, \quad \delta = r_2 - r_1. \tag{5}$$

Подставляя решения (3) в уравнение (1), получаем

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{arcch}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}E\right),$$

$$\kappa = \frac{1}{\varepsilon}\arccos\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(V_1 - E)\right], \quad k = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{arcch}\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(V_0 + E)\right].$$

Для уравнения (1) условия сшивания (4) модифицируем следующим образом

$$\psi_1(r)|_{r=r_1} = \psi_2(r)|_{r=r_1}, \quad L\psi_1(r)|_{r=r_1} = L\psi_2(r)|_{r=r_1}$$

$$\psi_2(r)|_{r=r_2} = \psi_3(r)|_{r=r_2}, \quad L\psi_2(r)|_{r=r_2} = L\psi_3(r)|_{r=r_2},$$

где $L = \frac{1}{\varepsilon}\left[\exp\left(\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) - 1\right]$, $L\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$. Тогда для нахождения E_1, E_2 получаем выражение

$$\frac{\kappa C_5 - d_1 ctg(kr_1)}{d_1 ctg(kr_1) - \kappa C_6} - \frac{d_2 - \kappa C_5}{\kappa C_6 - d_2}\exp(-2\kappa\delta) = 0, \tag{6}$$

где $C_3 = \frac{1-\cos(k\varepsilon)}{\varepsilon}$, $C_4 = \frac{\sin(k\varepsilon)}{k\varepsilon}$, $C_5 = \frac{\exp(-\kappa\varepsilon) - 1}{\kappa\varepsilon}$, $C_6 = \frac{\exp(\kappa\varepsilon) - 1}{\kappa\varepsilon}$, $C_7 = \frac{\exp(i\alpha\varepsilon) - 1}{i\alpha\varepsilon}$, $d_1 = -C_3 + kC_4$, $d_2 = i\alpha C_6$. При $\varepsilon \to 0$, $C_3 \to 0$, $C_4 \to 1$, $C_5 \to -1$, $C_6 \to 1$, $C_7 \to 1$. Тогда уравнение (6) переходит в уравнение (5). Это означает, что решения трансцендентного уравнения (6) стремятся к решениям трансцендентного уравнения (5).

3. Заключение

При проведении сравнительного анализа решений квазипотенциального уравнения с решениями уравнений Шрёдингера установлено:

– при $\varepsilon \to 0$, полученные трансцендентные уравнения для квазипотенциального уравнения переходят в соответствующие трансцендентные уравнения для уравнения Шрёдингера;
– при $\varepsilon \neq 0$ решения квазипотенциального уравнения отличаются от решения уравнения Шрёдингера; а именно при $\varepsilon = 0.1$, энергии (действительные и мнимые части) уровней для квазипотенциального уравнения увеличиваются по сравнению с соответствующими энергиями уровней для уравнения Шрёдингера (см. табл. 1).

Таблица 1

Сравнение решений квазипотенциального уравнения при ε=0.1 с решениями уравнения Шрёдингера:$V_0 = 10$, $V_1 = 25$, $r_1 = \pi/2$, $\delta = 0.5$, $r_2 = r_1 + \delta$

Уровни энергии	Решение уравнения Шрёдингера	Решения квазипотенциального уравнения при $\varepsilon = 0.1$
Первый уровень	$E_1 = 2.8300$ $E_2 = 0.0210$	$E_1 = 2.9700$ $E_2 = 0.0211$
Второй уровень	$E_1 = 18.159$ $E_2 = 0.3100$	$E_1 = 19.357$ $E_2 = 0.3710$

Литература

1. Исследование краевых задач для сингулярно-возмущённого дифференциального уравнения высокого порядка / И. В. Амирханов, Е. П. Жидков, Н. Р. Саркар и др. // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 11. — С. 65–79. [Investigation of Boundary-Value Problems for the Singular Perturbed Differential Equation of High Order / I. V. Amirkhanov, E. P. Zhidkov, N. R. Sarker et al. // Mathematical Modeling. — 2007. — Vol. 19, No 11. — Pp. 65–79. — (in russian).]
2. Исследование решений краевых задач для квазипотенциального уравнения с использованием оператора сдвига / И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар и др. // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 4. — С. 74–82. [Investigation of Solutions of Boundary Problems for the Quasipotential Equation Using the Shift Operator / I. V. Amikhanov, D. Z. Muzafarov, N. R. Sarker et al. // Bulletin of RPFU. Series: "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2011. — No 4. — Pp. 74–82. — (in russian).]
3. *Кадышевский В. Г., Мир-Касымов Р. М., Скачков Н. Б.* Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 2011. — Т. 2, № 3. — С. 637–690. [Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. Three-Dimensional Formulation of the Relativistic Two-Body Problem // PEPAN. — 1971. — Vol. 2, No 3. — Pp. 637–690. — (in russian).]

UDC 519.624.3

Investigation of Solutions of Quasistationary States for the Quasipotential Equation

I. V. Amirkhanov, N. R. Sarker, I. S. Sarkhadov, Z. K. Tukhliev, Z. A. Sharipov

Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
6, Joliot-Curie str., Dubna, Moscow region, Russia, 141980

The excited states of quantum systems are nonstationary, and they break up. These states are called unstable or quasi-stationary. Such states are already observed in the study of scattering problems, the accumulation of particles in the lens (the particle prefers to live inside the lens) is accompanied by a large delay τ (the lifetime of the quasi-level). Here the lifetime of the quasi-level $\tau = \gamma^{-1}$, width of the quasi-level $\Gamma = \hbar\gamma$ and complex energy level $E = E_1 - iE_2, E_2 = \Gamma/2$.

Investigation of the quasi-stationary states is carried out for the quasi-potential equation with piecewise-constant potentials at various values of the parameter of the equation ε and the potential parameters. A comparative analysis of solutions of the quasi-potential equation for the different values of ε with the solutions of the Schredinger equation is performed. Found that at $\varepsilon \to 0$ the solutions of quasi-potential equation tend to the solutions of the Schredinger equation.

Key words and phrases: quasistationary states, the quasipotential equation, the shift operator, piecewise constant potentials.