

Критические точки и точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с индексом $0,9 \leq n \leq 1,6$

В. В. Журавлёв, С. А. Михеев, В. П. Цветков

*Тверской государственный университет
ул. Желябова, д. 33, Тверь, Россия, 170000*

В работе впервые показано наличие критических точек и точек бифуркации у вращающихся ньютоновских политроп с индексом $0,9 \leq n \leq 1,6$. Погрешность символьно-численных вычислений в метрике L_2 составила величину порядка 10^{-5} . Построено приближенное аналитическое решение задачи с вышеуказанной степенью точности. Вычислено критическое значение индекса политропы $n = n_k = 1,54665$, выше которого точек бифуркации и критических точек нет.

Ключевые слова: ньютоновская политропа, критические точки, точки бифуркации, скачок периода.

1. Введение

Наблюдения за эволюцией вращающихся намагниченных нейтронных звёзд (пульсаров) позволяют получить уникальные данные об уравнениях состояния сверхплотной ядерной материи.

Наибольшей популярностью пользуется задание уравнения состояния в виде политропы соответствующего индекса n .

В настоящее время распространена точка зрения в теории ньютоновских политроп, восходящая к работам Джинса [1] и Джеймса [2], что точек бифуркации у них при $n > 0,83$ и $n > 0,808$ соответственно нет. Естественно, такое утверждение ничем не обосновано и является всего лишь предположением. Поэтому актуальна задача об исследовании точек бифуркации ньютоновских политроп со значением индекса порядка больше единицы.

Использование новых математических подходов в теории вращающихся ньютоновских политроп, а именно символьно-численных вычислений, позволяет поднять её на новый качественный уровень [3].

Цель нашей работы — расчёт как симметричных, так и асимметричных параметров вращающейся ньютоновской политропы с индексом $0,9 \leq n \leq 1,6$ с использованием полиномов наилучшего приближения в L_2 по степеням координат конфигурации.

2. Основное уравнение модели и его решение

В основу нашей математической модели вращающихся намагниченных политроп, как и в [3], положим уравнение:

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{|\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' - (1+n)K_0(1 - \tilde{\rho}^{1/n}) - \varepsilon \frac{\mathbf{r}_1^2}{a_1^2} + \eta_m(x_1^2 - x_2^2) = 0, \quad (1)$$

где $\eta_m = B_{0in}^2 \sin^2 \alpha / (32\pi^2 G \rho_0^2 a_1^2)$, B_{0in} — характерное значение магнитной индукции в центре конфигурации, α — угол наклона магнитной оси к оси вращения, G — гравитационная постоянная, ρ_0 — плотность политропы в центре, $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$, ρ — плотность конфигурации, a_1, a_3 — полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации, $K_0 = P_0/(2\pi G \rho_0^2 a_1^2)$, P_0 — центральное

значение давления, $\varepsilon = \omega^2/(4\pi G\rho_0)$, ω — угловая скорость вращения конфигурации, $\mathbf{r}_\perp = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, $x_1 = x/a_1$, $x_2 = y/a_1$, $x_3 = z/a_3$, D — область R^3 , в которой $\tilde{\rho} \geq 0$.

При произвольных значениях индекса политропы n уравнение (1) будет весьма сложным для решения. Упростим его, аппроксимировав $\tilde{\rho}^{1/n}$ полиномом степени N : $\tilde{\rho}^{1/n} = \sum_{k=1}^N \delta_k(n)\tilde{\rho}^k + \Delta_N(n)$.

Уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение с подвижной границей в R^3 . Эту границу δD будем искать в виде возмущённой эллипсоидальной поверхности с возмущениями в виде полинома от координат степени L [3]. Параметры возмущения вычисляются из условия минимума функционала, представляющего собой среднеквадратичное значение $\tilde{\rho}^2$ на этой поверхности.

Плотность конфигурации $\tilde{\rho}$ приблизим полиномом степени P [3]:

$$\tilde{\rho} \cong \sum_{a,b,c}^P \rho_{abc} x_1^a x_2^b x_3^c.$$

Асимметричная относительно оси вращения часть $\tilde{\rho}$ будет определяться значениями коэффициентов $\rho_{[ab]c} = \frac{1}{2}(\rho_{abc} - \rho_{bac})$. В качестве характерного параметра асимметрии мы возьмём $X = \rho_{[20]0}$.

Поскольку параметр X в нашей задаче является малым, то мы будем использовать разложение по этому малому параметру, удерживая члены до X^3 включительно.

Для решения уравнения (1) был использован метод, подробно описанный в [3] для случая $N = 6$, $P = 6$, $L = 2$.

В результате нами получено уравнение для параметра асимметрии X с коэффициентами $A = A(e, n)$, $B_k = B_k(n)$ ($e = a_3/a_1$):

$$A(e, n)X + B_k(n)X^3 = -\eta_m. \quad (2)$$

Для функций A и B_k получены нами приближенные аналитические выражения в виде полиномов по степеням e и n с точностью 10^{-5} .

Из условия $A(e, n) = 0$ находится множество критических точек $e_k = e_k(n)$, в которых значения X становятся порядка $\eta_m^{1/3}$, что на несколько порядков больше, чем их значения вдали от критических точек $\sim \eta_m$. Отметим, что характерное значение параметра η_m для пульсаров $\sim (10^{-9} - 10^{-13})$.

Графики зависимостей $e_k = e_k(n)$ и $\varepsilon_k = \varepsilon_k(e_k(n))$ от индекса политропы в интервале $0,9 \leq n \leq 1,6$ даны на рис. 1.

Из графиков рис. 1 следует значение $n_k = 1,54665$ при $\varepsilon_k = 0$ ($e_k = 1$). Это означает, что медленно вращающиеся политропы могут иметь критические точки, что ранее считалось невозможным. Этот факт является одним из основных результатов данной работы.

Кубическое уравнение (2) имеет точки бифуркации $e_b(n)$ и $\varepsilon_b(n)$, значения которых близки к $e_k(n)$ и $\varepsilon_k(n)$ [4]. Вблизи этих точек параметр X может иметь три значения $X = X_{1,2,3}$. В результате перехода конфигурации из состояния с одним значением X в другое возникает скачок периода вращения конфигурации T . Если положить $\eta_m = 10^{-9} - 10^{-13}$, то наши вычисления дают:

$$\Delta T_b/T_b = -2,25716\eta_m^{2/3} = -2,25716(10^{-9} - 10^{-6}). \quad (3)$$

Формула (3) показывает на ускорение вращения намагниченной политропы в точке бифуркации λ_b . Природа скачка обусловлена наличием магнитных натяжений, ось симметрии которых наклонена к оси вращения.

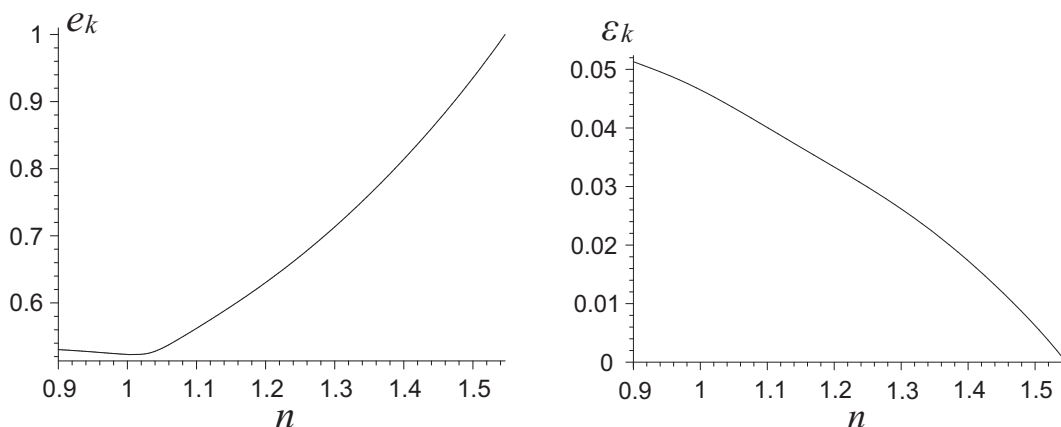


Рис. 1. Графики функций $e_k(n)$ (слева) и $\varepsilon_k(n)$ (справа)

3. Заключение

Проведённая нами оценка (3) даёт наблюдаемый порядок скачка периодов пульсаров. Так относительное изменение периода $\Delta T/T$ во время скачка составляет $3 \cdot 10^{-9}$ у *PSR 0531+21* в Крабовидной туманности и $2 \cdot 10^{-6}$ у *PSR 0833-45* в созвездии Парусов [5].

Литература

1. *J Jeans J. H.* Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics. Adams Prize Essay for 1917. — Cambridge: University Press, 1919.
2. *James R. A.* The Structure and Stability of Rotating Gas Masses // The Astrophysical Journal. — 1964. — Vol. 140. — Pp. 552–582.
3. *Mikheev S. A., Tsvetkov V. P.* Critical Points and Points of the Bifurcation of the Rotating Magnetized Newtonian Polytropes with a $1 \leq n \leq 1.6$ Index // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2013. — Vol. 10, No 3. — Pp. 234–242.
4. *Mikheev S. A., Tsvetkov V. P.* Shift in the Bifurcation Points of Rotating Magnetized Newtonian Polytropes Caused by a Magnetic Field // Astrophysics. — 2008. — Vol. 51, No 2. — Pp. 262–267.
5. *Taylor J. H., Manchester R. N., Lyne A. G.* Catalog of 558 Pulsars // The Astrophysical Journal Supplements Series. — 1993. — Vol. 88, No 2. — Pp. 529–568.

UDC 519.6, 517.9 PACS 97.10.Kc, 02.60.Cb, 02.60.Nm, 02.70.Wz, 04.25.Nx

Critical Points and Points of a Bifurcation of the Rotating Magnetized Newtonian Polytropic with $0.9 \leq n \leq 1.6$ Index

V. V. Zhuravlev, S. A. Mikheev, V. P. Tsvetkov

*Tver State University
33, Zhelyabova st., Tver, Russia, 170000*

In this paper, the presence of critical points and bifurcation points of rotating Newtonian polytropes with an index of $0.9 \leq n \leq 1.6$ has been shown for the first time. The symbolic-numerical calculation error in metric L_2 has reached the size of 10^{-5} order. The approximate analytical solution of the problem to the above mentioned accuracy has been set forth. The critical value of polytropic curve index $n = n_k = 1.54665$ has been calculated which is the highest one among the critical points and bifurcation points.

Key words and phrases: Newtonian polytropes, critical points, bifurcation points, period jump.