УДК 519.624.2

Метод адаптивной искусственной вязкости на неструктурированных сетках

И. В. Попов, И. В. Фрязинов

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
Миусская пл., д. 4, Москва, 125047

В статье представлено общее описание нового метода адаптивной искусственной вязкости (АИВ) решения уравнений газовой динамики. В основу метода положены исследование устойчивости разностных схем Лакса–Вендрофа и классификация разрывных решений уравнений газовой динамики. Метод адаптирован к решению задач как на ортогональных, так и на неструктурированных сетках. С помощью разработанного метода решён ряд задач, в том числе рассчитано сверхзвуковое течение газа в канале с уступом.

Ключевые слова: метод адаптивной искусственной вязкости, уравнения газовой динамики, неструктурированные сетки.

1. Введение

В работе представлены общее описание развиваемого авторами нового метода адаптивной искусственной вязкости (АИВ) решения уравнений газовой динамики. Начало этого метода было положено в 2007 году [1]. Далее основные публикации продолжались в журнале «Математическое моделирование». Ссылки на другие работы по этому методу можно найти в последней опубликованной работе [2].

2. Описание метода

В методе АИВ используются явные монотонные разностные схемы. Для построения разностных схем на неструктурированных сетках используется метод опорных операторов [3]. Второй порядок аппроксимации по времени достигается использованием известных поправок Лакса–Вендроффа. Однако указанные поправки не обеспечивают монотонности разностной схемы, что быстро приводит к потере точности сеточного решения. Чтобы добиться монотонности разностной схемы, в неё вводятся диссипативные слагаемые с искусственной вязкостью. Выбранная искусственная вязкость определяется требованием принципа максимума и приближённо обеспечивает монотонность сеточного решения. Полученная искусственная вязкость имеет ограничения снизу и сверху. Минимальная и максимальная искусственные вязкости выражаются простыми формулами. Искусственная вязкость зависит от скорости газа, скорости звука и размеров ячейки. Искусственная вязкость имеет порядок шага пространственной сетки. Введение вязкости во всей области решения приводит к быстрому размыванию контактных разрывов и снова к потере точности сеточного решения.

Для преодоления этих противоречий (немонотонности разностной схемы с поправками Лакса–Вендроффа и сильному размыванию контактных разрывов искусственной диссипацией) был предложен новый приём, как для решения уравнений газовой динамики, так и для решения иных задач математической физики.

Метод АИВ состоит из трёх этапов.

Этап 1. По явным разностным схемам с поправками Лакса–Вендроффа в отсутствие искусственной вязкости находятся все сеточные функции на новом временном слое. Эти функции назовём предикторным решением задачи. Поскольку сделан лишь один шаг по времени, а на предыдущем временном слое осцилляции были подавлены ранее, то предикторное решение на новом временном слое

Статья поступила в редакцию 22 сентября 2013 г.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №12-01-00345-а).

имеет малые ещё неразвившиеся осцилляции в областях, где решение близко к константам, небольшой выброс на ступеньке за ударной волной и провал перед контактным разрывом. Осцилляции, возникшие на предикторном решении, необходимо подавить, не давая им развиться. В то же время предикторное решение достаточно хорошо приближает решение исходной задачи на новом временном слое и может быть использовано для адаптации к нему вводимой искусственной вязкости.

Этап 2. Второй этап — главный этап в методе АИВ. Изложение проведём в одномерном случае. На этом этапе проводится изучение полученного на новом временном слое предикторного решения: плотности $\tilde{\rho}$, скорости $\tilde{u}$, давления $\tilde{p}$. По этим величинам определяются сеточные области, занятые контактными разрывами (КР), ударными волнами (УВ) (волнами сжатия — ВС), волнами разрежения (ВР) и осцилляциями (ОСЦ) предикторного решения, имеющими сеточную природу.

Известны следующие соотношения. На КР скачки внутренней энергии (или p/ρ) и плотности ρ имеют противоположные знаки. Одинаковые знаки этих скачков имеет место на ВС (УВ) и ВР. На ВС производная скорости по пространственной координате отрицательна, как и скачок скорости на УВ, а на ВР — положительна.

В методе АИВ выполнение этих неравенств проверяется на сеточном предикторном решении. Производные заменяются разностными отношениями. Для одномерных уравнений неравенства имеют вид: при $\dfrac{(\tilde{p}/\tilde{\rho})_{i+1} - (\tilde{p}/\tilde{\rho})_i}{h_{i+1/2}} \dfrac{\tilde{\rho}_{i+1} - \tilde{\rho}_i}{h_{i+1/2}} < 0$, интервал $(x_i, x_{i+1}) \in$ КР. Если это условие не выполнено, то проверяются следующие условия: если $\dfrac{\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i}{h_{i+1/2}} > 0$, то интервал $(x_i, x_{i+1}) \in$ ВР, если $\dfrac{\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i}{h_{i+1/2}} < 0$, то интервал $(x_i, x_{i+1}) \in$ УВ(ВС). Далее проверяется условие на немонотонность решения. Если $\dfrac{\tilde{\rho}_{i+1} - \tilde{\rho}_i}{h_{i+1/2}} \dfrac{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{i-1}}{h_{i-1/2}} < 0$, то интервалы $(x_{i-1}, x_i) \cup (x_i, x_{i+1}) \in$ ОСЦ. Здесь $h_{i+1/2}$ — расстояние между соседними узлами сетки x_i и x_{i+1}. Эти неравенства обобщаются на многомерный случай и неструктурированные сетки.

В области занятой КР и ВР, а также на границе области искусственная вязкость полагается равной нулю, чтобы дополнительно не увеличивать «размывание» КР и не ухудшать аппроксимацию ВР. В области УВ (и ВС) вводится минимальная искусственная вязкость, чтобы сильно не «размывать» УВ и подавить выброс за УВ. В области осцилляций для их эффективного подавления вводится максимальная искусственная вязкость. Таким образом, в диссипативные слагаемые вводится разрывная искусственная вязкость, не приводящая к дополнительному размыванию КР, вычисляемая по значениям сеточных функций с предыдущего временного слоя и монотонизирующая разностную схему на новом временном слое, как на ортогональных, так и на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках. Предикторное решение используется лишь для определения сеточных областей, занятых КР, УВ, ВР и ОСЦ, что позволяет адаптировать к ним разностную схему.

Этап 3. Теперь можно завершить переход к новому временному слою, находя решение по явной разностной схеме с включёнными в неё диссипативными слагаемыми. Это делается без пересчёта конвективных слагаемых, найденных на первом этапе. Заметим, что в областях постоянства решения диссипативные слагаемые близки к нулю. Они существенны в области УВ и вблизи КР, где происходит изменения искусственной вязкости.

Теперь скажем о месте метода АИВ среди современных численных методов. Все известные методы решения уравнений газовой динамики можно разделить на две группы. Одна из них хорошо передаёт ступенчатую структуру решения, иногда добавляя к ней небольшие осцилляции сеточной природы. Другая группа схем даёт монотонные решения, несколько «размывая» скачки. Некоторые из используемых схем сложно обобщить на неструктурированные сетки, например, WENO5. Метод АИВ даёт монотонные решения с практически приемлемой точностью. Он прост в реализации, допускает простое распараллеливание вычислений. На тестовых одномерных задачах из [4] метод АИВ даёт на разрывных решениях результаты, близкие к результатам методов JT, LL и WENO5. На многомерных тестовых задачах метод АИВ даёт результаты близкие к результатам JT, LL и CWENO3.

Однако главным в методе АИВ наряду с решением конкретных задач газовой динамики является сам подход к нахождению решения. Вначале находится приближённое решение задачи, затем проводится его исследование. После этого проводится повторное решение задачи с введённой в алгоритм поправкой (диссипативными слагаемыми с искусственной вязкостью), позволяющей улучшить результат.

3. Пример численного расчёта

Приведём расчёт задачи о сверхзвуковом течении в канале с уступом. Эта задача интересна тем, что в процессе течения помимо косых стационарных ударных волн образуется также контактный разрыв, который с течением времени распадается. Размеры области и параметры этой задачи следующие: длина канала в нормированных переменных равна 3, ширина равна 1, ступенька располагалась на расстоянии $0,6$ от входа в канал и имела выступ $0,2$. Газ имеет плотность $\rho = 1$, давление $\rho = 1/\gamma$, где $\gamma = 1,4$. Скорость на входе $u = 3$ и $\nu = 0$. В начальный момент времени газ в канале был в состоянии покоя. На выходе задавались условия свободной границы — производные по нормали к границе от всех искомых функций равны нулю. Результаты расчёта приведены на рис. 1 на моменты времени $t = 4$, линии — изолинии плотности, градация серого — давление. На рис. 2 показано, где вводится искусственная вязкость. Количество расчётных треугольников было равно 1434286, а число Куранта $\mathrm{Ku} = 0,8$.

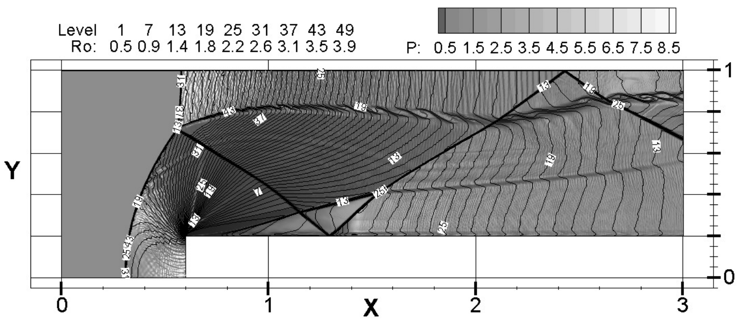

Рис. 1. Распределение давления (показано полутонами) и изолинии плотности в канале

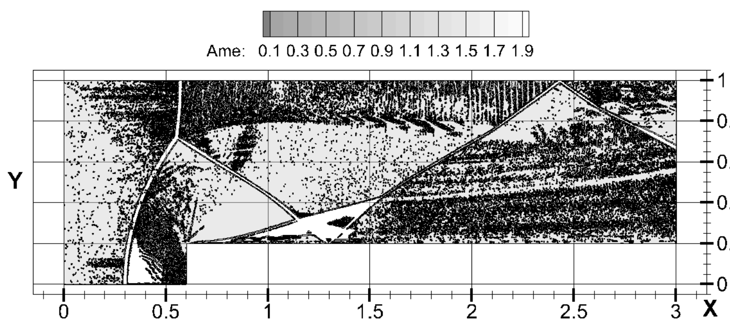

Рис. 2. Области введения искусственной вязкости (осветлены)

4. Заключение

Расчёт показывает, что в методе АИВ на неструктурированных сетках хорошо разрешаются все типы разрывов решений уравнений газовой динамики.

Литература

1. *Попов И. В., Фрязинов И. В.* Сеточный метод решения уравнений газовой динамики с введением искусственной вязкости // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы Седьмого Всерос. семинара. — 2007. — С. 223–230. [Popov I. V., Fryazinov I. V. Grid Method for Solving the Equations of Gas Dynamics with the Introduction of Artificial Viscosity // Proceedings of the Seventh All Russian Seminar "Grid Methods for Boundary Value Problems and Applications". — 2007. — Pp. 223–230.]
2. *Popov I. V., Fryazinov I. V.* Method of Adaptive Artificial Viscosity for the Equations of Gas Dynamics on Triangular and Tetrahedral Grids // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2013. — Vol. 5, No 1. — Pp. 50–62.
3. Разностные схемы на нерегулярных сетках / А. А. Самарский, А. В. Колдоба, Ю. А. Повещенко и др. — Минск: Критерий, 1996. [Difference Schemes on Unstructured Grids / A. A. Samarskii, A. V. Koldoba, Y. A. Poveshchenko et al. — Minsk: Criterion, 1996.]
4. *Liska R., Wendroff B.* Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for Euler Equations: Techrep LA-UR-01-6225 / LANL, Los Alamos. — 2001.

UDC 519.624.2

Method of Artificial Viscosity on Unstructured Grids

I. V. Popov, I. V. Fryazinov

Keldysh Institute of Applied Mathematics
4, Miusskaya sq., Moscow, Russia, 125047

The paper presents a general description of a new method of artificial viscosity (AAV) for solving equations of gas dynamics. In a basis of a method are put research of stability finite difference schemes and classification of discontinuous desicions of gas dynamics equations. The method was adapted for the solution of problems on cartesian and unstructured meshes. With the help of the method a lot of gas dynamics problems were analyzed numerically, for example, the supersonic flow in a channel with a step was calculated.

Key words and phrases: method of adaptive artificial viscosity, equations of gas dynamics, unstructured grids.