УДК 519.633.2

О распрямлении локально деформированного волновода

М. Д. Малых

Факультет наук о материалах
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, Корпус «Б», Москва, Россия, 119991

Рассматривается локально деформированный плоский волновод, то есть полоса, границы которого представляют собой две кривые, совпадающие с парой параллельных прямых вне некоторого компакта. При помощи конформного преобразования эта полоса может быть распрямлена в полосу с прямолинейными границами (прямой волновод), а следовательно, задача о возбуждении электромагнитных колебаний в локально-деформированном волноводе может быть сведена к задаче о возбуждении прямого волновода с неоднородным заполнением. Эта задача заметно проще исходной как для теоретического анализа, так и для практического решения, напр., неполным методом Галёркина.

Для отыскания конформного отображения деформированной полосы напрямую составлена краевая задача, которой удовлетворяет одна из функций, задающих отображение. Доказано, что эта задача имеет единственное решение, убывающее на бесконечности, а также классичность решения в случае гладких границ. Для решения этой задачи используется метод конечных элементов, представлены решения для локально сжатых и локально растянутых волноводов. Показано, что входящие углы не оказывают существенного влияния ни на вид отображения, ни на сходимость применяемого численного метода. Показано, что при удалении от локального растяжения или сжатия на расстояние того же порядка, что и само растяжение, с графической точностью преобразование становится тождественным, что важно для формулировки парциальных условий излучения.

Ключевые слова: математическое моделирование, конформное отображение, планарный волновод.

1. Введение

Численное решение начально-краевых задач, описывающих поля в локально деформированном волноводе (см. рис. 1), всегда оказывается более сложным, чем численное решение аналогичной задачи в прямом волноводе с неоднородным заполнением. Теоретически в планарном случае эти две задачи эквивалентны, поскольку деформированную полосу можно конформно отобразить на прямую. Хотя теорема Римана не даёт конструктивного способа отыскания этого преобразования, в данном случае своеобразие геометрии задачи позволяет указать простой численный способ отыскания этого преобразования.

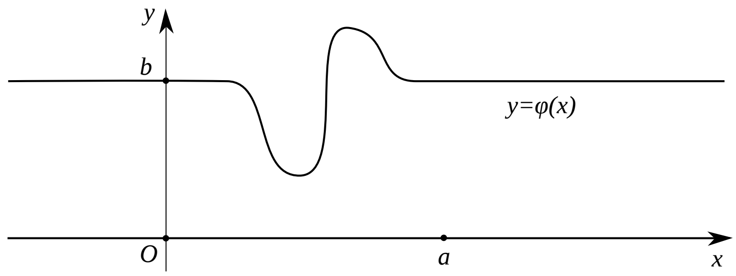

Рис. 1. Локально деформированный планарный волновод

Статья поступила в редакцию 7 декабря 2013 г.

2. Выпрямление волновода конформным преобразованием

Рассмотрим в локально деформированном планарном волноводе X краевую задачу

$$\Delta u + \lambda u = f, \quad u|_{\partial X} \tag{1}$$

с парциальными условиями излучения на бесконечности [1]. Направив ось Ox по оси волновода, рассматриваемую область можно описать как полосу

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < y < \phi(x)\};$$

будем считать, что вне компакта $|x| \leq a$ эта полоса имеет постоянную ширину $b = 1$, см. рис. 1.

Теорема Римана [2] гарантирует существование конформного преобразования

$$\xi = g(x, y), \quad \eta = h(x, y),$$

переводящего область X в прямую полосу $Y = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < \eta < 1\}$ на плоскости $\xi\eta$. Это преобразование порождает изоморфизм пространств Соболева $\overset{\circ}{W}X \simeq \overset{\circ}{W}Y$. При этом скалярное произведение в L_2 преобразуется как

$$\int\limits_X uv \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_Y uvq \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

если обозначить якобиан преобразования $\dfrac{\partial xy}{\partial \xi\eta}$ как $q(\xi, \eta)$, а скалярное произведение в W_2^1 не меняется

$$\int\limits_Y (\nabla' u, \nabla' v)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \int\limits_X (\nabla u, \nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

Здесь для удобства градиент по ξ и η отмечен штрихом.

Последние обстоятельство прямо следует из условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial \xi\eta}{\partial xy} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \xi_x^2 + \xi_y^2$$

и

$$\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 = (\xi_x^2 + \xi_y^2)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) = \frac{\partial \xi\eta}{\partial xy}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) = h_1^2\mathrm{d}x^2 + h_2^2\mathrm{d}y^2.$$

Поэтому квадраты коэффициентов Ламе совпадают с якобианом перехода, откуда

$$\mathrm{grad}' u = \sqrt{\frac{\partial xy}{\partial \xi\eta}}\mathrm{grad} u$$

и

$$\int\limits_Y (\nabla' u, \nabla' v)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \int\limits_X (\nabla u, \nabla v)\frac{\partial xy}{\partial \xi\eta}\frac{\partial \xi\eta}{\partial xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_X (\nabla u, \nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Применительно к задаче (1) это означает, что любое обобщённое решение

$$\int\limits_X (\nabla u \nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \lambda\int\limits_X uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_X fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}X$$

является решением

$$\int\limits_Y (\nabla u \nabla v)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta - \lambda \int\limits_Y uvq\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \int\limits_Y fvq\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}Y,$$

т.е. обобщённым решением задачи

$$\Delta' u + \lambda q u = qf, \quad u|_{\partial Y}, \tag{2}$$

описывающей возбуждение колебаний в прямом волноводе Y с заполнением

$$q(\xi,\eta) = \frac{\partial xy}{\partial \xi\eta} = \left(\frac{\partial \xi\eta}{\partial xy}\right)^{-1} = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} = |\nabla y|^{-2}.$$

Обычно подобного рода соображения применяются при решении краевых задач математической физики, особенно в гидродинамике [2], когда само конформное преобразование можно угадать из геометрических соображений, поскольку теорема Римана гарантирует существование такого преобразования, но не даёт конструктивного способа его построения. Отображение деформированной полосы на прямую замечательно тем, что можно указать конструктивный способ его отыскания.

3. Краевая задача для отыскания конформного преобразования

В силу принципа соответствия границ [2] можно считать, что дуга $y = 0$ переходит в $\eta = 0$, а $y = \varphi(x)$ — в $\eta = 1$. Это означает, что функция $h(x, y)$, описывающая конформное отображение

$$\xi = g(x,y), \quad \eta = h(x,y),$$

должна обращаться в нуль на прямой $x = 0$ и в 1 на кривой $y = \varphi(x)$. Поэтому её можно отыскать как решение краевой задачи

$$\Delta h = 0, \quad h|_{y=0} = 0, \quad h|_{y=\varphi(x)} = 1. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если полоса*

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < y < \varphi(x)\}$$

вне некоторого компакта совпадает с прямой полосой Y, а функция $\varphi(x)$, задающая её границу, непрерывна и кусочно дифференцируема, то задача

$$\Delta h = 0, \quad h|_{y=0} = 0, \quad h|_{y=\varphi(x)} = 1$$

имеет и притом единственное решение в $W_2^1(X)$, причём

$$h(x,y) - y$$

при $x \to \infty$ убывает экспоненциально:

$$|h(x,y) - y| \leqslant Ce^{-\alpha|x|}. \tag{4}$$

Это решение является классическим, если $\varphi(x)$ является гладкой функцией.

Доказательство. Подстановка $w = h(x,y) - y/\varphi(x)$ сводит задачу к

$$\Delta w = -\Delta \frac{y}{\varphi(x)}, \quad w \in \overset{\circ}{W} X,$$

решение которой единственно. Вне компакта область X совпадает с полосой, поэтому в силу теоремы Джонса [3] непрерывный спектр этой задачи отделён от нуля. Поэтому задача является фредгольмовой, а значит из единственности следует существование решения.

При достаточно больших x функция $\varphi(x)$ тождественно равна единице; здесь функцию w можно разложить в ряд по $\{\sin \pi n y\}$, коэффициенты которого можно вычислить по методу Фурье:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n e^{-\sqrt{\pi n} x} \sin \pi n y.$$

Этот ряд сходится в норме W_2^1 [4], поэтому $w = h - y$ экспоненциально убывает с ростом x.

Классичность решения прямо следует из леммы Вейля [5]. □

Неравенство (4) означает, что вне некоторого компакта возле неоднородности конформное преобразование приближается к тождественному с экспоненциальной скоростью. Это позволяет перенести парциальные условия излучения с задачи (1) на задачу (2) без изменений.

4. Вычисление конформного преобразования

Неравенства (4) указывает на то, что при достаточно больших $|x|$ решение (3) совпадает с y, поэтому при отыскании приближенного решения этой задачи можно обрезать бесконечную полосу прямыми $x = \pm a$:

$$\begin{cases} \Delta h = 0, \\ h|_{y=0} = 0, \quad h|_{y=\varphi(x)} = 1, \\ h|_{x=\pm a} = y. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнение Лапласа в конченой области без труда решается методом конечных элементов. Тем самым по заданной локально деформированной полосе X мы найдём функцию $h(x,y)$, описывающую конформное отображение

$$\xi = g(x,y), \quad \eta = h(x,y),$$

деформированной полосы на прямую полосу.

На рис. 2–3 представлены решения этой задачи для локально расширенной и локально сжатой полос. Хорошо видно, что при удалении от локального растяжения или сжатия на расстояние того же порядка, что и само растяжение, с графической точностью $h = y$. Поэтому вопрос о переформулировке парциальных условий излучения для (2) отпадает сам собой. Появление на границе полосы входящих углов не оказывает заметного влияния на вид отображения (рис. 2, 4).

Нетрудно построить и графики функции q как функции переменных x и y (рис. 5–7). Во всех трёх случаях q с графической точностью вне компакта, имеющего те же размеры, что и расширение или сужение полосы, эта функция остаётся постоянной. Это позволяет перенести на задачу (2) известные результаты о возбуждении волновода с локально-нерегулярным заполнением. На третьем примере видно, что наличие входящих рёбер не сказывается на ходе линий уровня $h(x,y) = \mathrm{const}$, но возле рёбер q обращается в бесконечность.

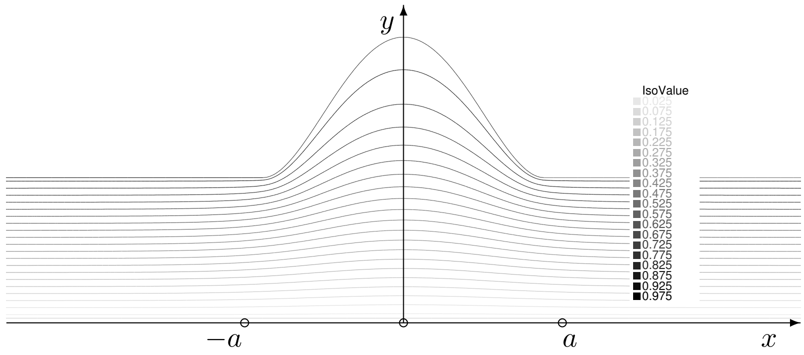

Рис. 2. Решение задачи (5) для локально расширенной полосы

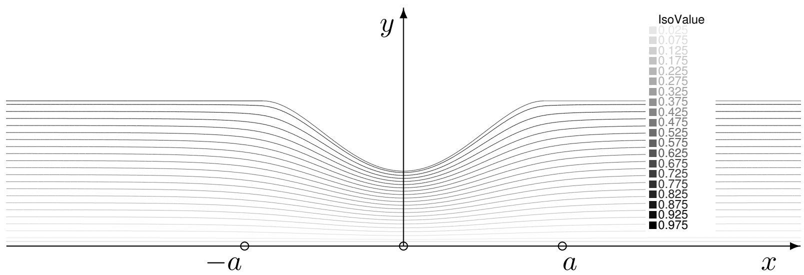

Рис. 3. Решение задачи (5) для локально сжатой полосы

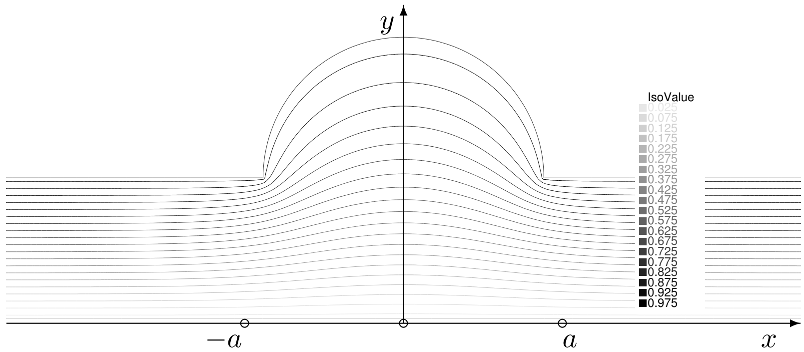

Рис. 4. Решение задачи (5) для локально расширенной полосы, граница которой имеет входящие углы $(3\pi/2)$

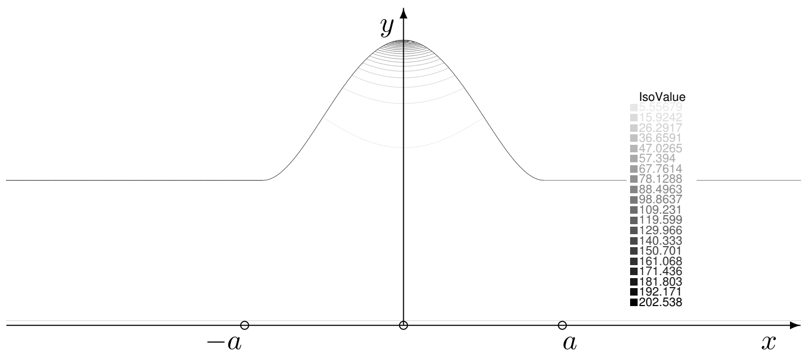

Рис. 5. Функция q для задачи (5) для локально расширенной полосы

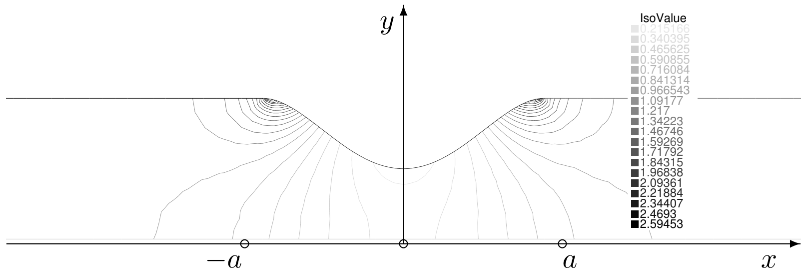

Рис. 6. Функция q для задачи (5) для локально сжатой полосы

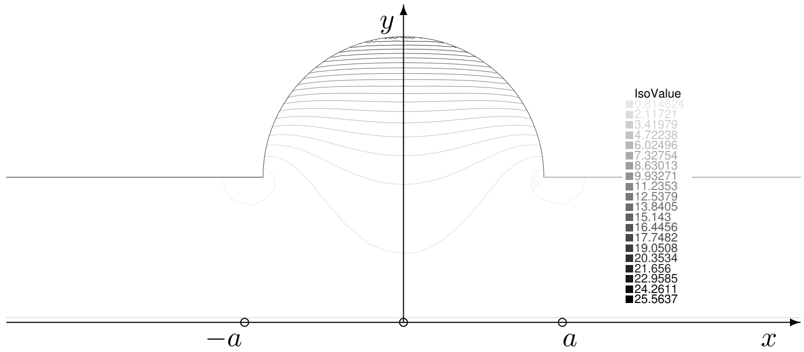

Рис. 7. Функция q для задачи (5) для локально расширенной полосы, граница которой имеет входящие углы ($3\pi/2$)

5. Заключение

Начально-краевая задача (1) о возбуждении колебаний в планарном волноводе с неровной границей может быть сведена к задача (2) в полосе. Для вычисления соответствующего конформного преобразования следует решить краевую задачу (3), решение которой существует, единственно и может быть найдено МКЭ. Как учат примеры, если отступить от локального растяжения или сжатия полосы на расстояния порядка этого растяжения, можно считать конформное преобразование тождественным. Следовательно, задача (2) принадлежит самому изученному классу задач такого рода — задачам о возбуждении колебаний в полосе с локально неоднородным заполнением.

Для решения задачи (5) был использован пакет `FreeFem++` [6].

Литература

1. *Свешников А. Г., Могилевский И. Е.* Математические задачи теории дифракции. — М.: ФФ МГУ, 2010. — 308 с. [Sveshnikov A. G, Mogilevskii I.E. Mathematical Problems of Theory of Diffraction. — Moscow: MSU, 2010. — 308 p. — (in russian).]
2. *Иванов В. И., Попов В. Ю.* Конформные отображения и их применения. — М.: ФФ МГУ, 2000. — 321 с. [Ivanov V. I., Popov V. Yu. Conformal Maps and its Applications. — Moscow: MSU, 2000. — 321 p. — (in russian).]
3. *Малых М. Д.* Об одном возможном обобщении теоремы Джонса // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3. — 2007. — Т. 62, № 2. — С. 15–17. [Malykh M. D. A

Generalization of the Jones Theorem // Moscow University Physics Bulletin. — 2007. — Vol. 62, No 2. — P. 15–17. — (in russian).]
4. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* Теория возмущений для вложенных собственных значений волновода // Журнал радиоэлектроники. — 2002. — № 2. — `http://jre.cplire.ru`. [Boglyubov A. N., Malykh M. D. Perturbation Theory for Embedded Eigenvalues of Waveguide // Journal of Radio Electronics. — 2002. — No 2. — `http://jre.cplire.ru`. — (in russian).]
5. *Боголюбов А. Н., Малых М. Д.* О распространении понятия обобщенного решения задачи Дирихле на решения, не принадлежащие L_2 // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3. — 2005. — Т. 60, № 4. — С. 12–14. [Boglyubov A. N., Malykh M. D. The Weak Solution of Dirichlet Problem and its Generalization to the Case when the Solution does not Belong to L_2 // Moscow University Physics Bulletin. — 2005. — Vol. 60, No 4. — P. 12–14. — (in russian).]
6. *Hecht F.* FreeFem++. Third Edition, Version 3.20-3. — 2013. — `http://www.freefem.org/ff++`.

UDC 519.633.2

On Straightening of Locally Deformed Waveguide

M. D. Malykh

Faculty of Materials Science
Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, Russia, 119991

Locally deformed planar wave guide, i.e. the strip limited to two curves, coinciding with couple of parallel straight lines out of some compact, is considered. By conformal map this strip can be straightened in a strip with rectilinear borders (straight waveguide). Thus the problem about initiation of electromagnetic oscillations in locally deformed waveguide can be reduced to a problem about excitement of a straight waveguide with non-homogeneous filling. This problem is simpler than an initial problem both for the theoretical analysis, and for practical calculations by, e.g., partial Galerkin method.

For calculation of conformal map of the deformed strip on a straight strip is given the boundary problem for one of the map functions. Proved that this problem has the unique decision solution decreasing on infinity, and also that this solution is classical in case of smooth borders. For the solution of this problem the finite element method (FEM) is used, solutions for locally squeezed and locally stretched waveguides are given. Shown that entering corners in the boundary don't change a character of map and a convergence of applied numerical method. It is shown that transformation coincides graphically with identical out of place of local stretching or compression; this is important for the formulation of partial radiation conditions.

Key words and phrases: mathematical model, conformal map, planar waveguide.