

Определение траектории свободного движения гиростабилизированного тела через проективно-двойственные переменные

В. В. Чистяков

*Кафедра электрификации
ФГБОУ ВПО «Ярославская государственная сельскохозяйственная академия»
Россия, 150042, Ярославль, Тутаевское шоссе, 58*

Развитый ранее метод перехода к проективно-двойственным переменным применён для интегрирования уравнений свободного движения в трансзвуковой области гиростабилизированного тела (снаряда), обладающего в среде квадратичными по скорости V сопротивлением $R = \alpha V^2 \gg mg$ и относительно слабой подъёмной силой $L = \gamma V^2 \approx 0,02 - 0,1 mg$, коэффициенты $\alpha(\theta)$ и $\gamma(\theta)$ которых зависят от угла атаки θ по интерполяционным формулам для баллистических данных. Получены как абсолютно точные, так и приближённые аналитические выражения для резольвентной функции $f(b) = a''_{bb}(b)$ ($a(b)$ — подкасающаяся, $b = \operatorname{tg} \theta$ — угловой коэффициент), через которую выражаются все характеристики движения.

Ключевые слова: квадратичный закон сопротивления, угол атаки, гиростабилизированный, проективно-двойственный, баллистический, подъёмная сила, траектория.

1. Свободное движение с квадратичным сопротивлением

В трансзвуковой области с числами Маха $M > 2$ сопротивление движению R в среде с хорошей точностью описывается квадратичной по скорости V формулой Рэлея $R = C_d \rho S V^2 / 2 = \alpha m g V^2$, где ρ — плотность газа, S — фронтальная площадь, C_d — коэффициент формы движущегося тела.

Начиная с пионерского исследования Леонардо Эйлера [1] и вплоть до наших дней различным аспектам интегрирования уравнений свободного движения в такой среде точечной массы посвящается значительное число работ. Интерес поддерживается сугубо практическим значением темы для внешней баллистики (см., например, [2, 3]), а в наши дни — также для спорта [4] и даже компьютерной анимации.

Кроме того, проблема представляет интерес и для нелинейной динамики и *вычислительной механики* (Computational Mechanics) в плане пополнения арсенала средств и методов решения нелинейных же систем обыкновенных дифференциальных уравнений, получения новых фактов и выработки новых алгоритмов приближённого интегрирования в практически важных задачах.

Также и теория движения твёрдого тела под действием аэродинамических сил и моментов среды насчитывает долгую историю и является вполне сформировавшейся отраслью механики и математической теории динамических систем с диссипацией (см., например, обзор [5] и библиографию в нём). Отрасль, интенсивно развивающейся в настоящее время, выдвигающей на повестку дня не только фундаментальный, но и прикладной аспект решаемых задач в плане развития новых технологий различного направления — от сверхточной баллистики до беспилотной авиации.

Ранее была продемонстрирована эффективность и высокая точность интегрирования нелинейных уравнений резистивного движения при помощи метода, опирающегося на преобразования Лежандра [6–8]. Переход к *проективно-двойственным* переменным позволял избавиться от временного фактора — мало важного в проблеме, которая предстаёт тем самым задачей дифференциальной геометрии траектории движения.

Метод также рассматривал движение именно материальной точки с постоянными во времени коэффициентом формы C_d и площадью фронтального сечения S , что в идеале верно лишь для сферически симметричного снаряда, т. е. ядра. Но одна из проективно-двойственных переменных — угловой коэффициент касательной к траектории $b = \operatorname{tg} \theta$ позволяет учитывать изменение угла атаки тела вращения в полёте, а вместе с ним и резистивных параметров, в случае, если ориентация тела в пространстве остается неизменной.

Именно такая ситуация имеет место в баллистике за счёт стабилизации вылетающего осесимметричного снаряда значительным кинетическим моментом вращения вокруг главной оси инерции. Также близость центров аэродинамических сил и тяжести обеспечит невращение тела.

Настоящая работа демонстрирует вычислительные и точностные возможности метода, а также — полученные с помощью его результаты при интегрировании уравнений свободного движения в однородной среде тела неизменной ориентации в пространстве. При этом также учитывается действие подъёмной силы, уступающей по величине лобовому сопротивлению и составляющей величину порядка 5–10% от силы тяжести снаряда.

2. Задача в проективно-двойственных переменных

2.1. Проективно-двойственные координаты

В каждой точке баллистической траектории вектор скорости \vec{V} составляет свой уникальный угол θ с горизонтом, равно как уникальны и параметры в уравнении касательной $y_t = a + bx$: *угловой коэффициент* $b = \operatorname{tg} \theta$ и прерывание $a(\theta(b)) \equiv a(b)$ (рис. 1), изменяющиеся монотонно от своих стартовых значений — $b_0 = \operatorname{tg} \theta_0 > 0$ и $a_0 = 0$. Следовательно, альтернативно траектория описывается через касательное расслоение как $a = a(b)$, $b = b(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

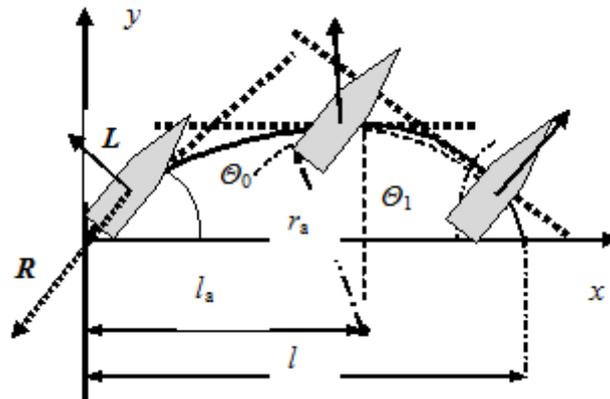


Рис. 1. Баллистическая траектория гиристабилизированного тела (сплошная линия) и её касательное расслоение (штриховая линия): \vec{L} — подъёмная сила, \vec{R} — лобовое сопротивление

В точке траектории с абсциссой x подкасательная (*intercept*) a и наклон b суть — $a = y - bx$, $\dot{y} = bx$, следовательно,

$$\begin{aligned}
 x(b) &= -\frac{da}{db} = -\frac{da(b_0)}{db} - \int_{b_0}^b \frac{d^2a(b')}{db'^2} db', \\
 y(b) &= a - \frac{da}{db}b = a(b_0) - \frac{da(b_0)}{db}b_0 - \int_{b_0}^b b' \frac{d^2a(b')}{db'^2} db'.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Таким образом, вышеприведённые соотношения определяют в параметрическом виде траекторию движения тела, при этом параметр имеет нужный физический смысл — наклон вектора скорости .

2.2. Аэродинамические силы

Вектор силы лобового сопротивления есть $\vec{R} = -\alpha mgV\vec{V}$, подъёмная сила $\vec{L} = \gamma mgV^2\vec{n}$, \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к траектории. Аэродинамические моменты считаются неспособными вызвать значительную прецессию и нутацию и тем самым нарушить ориентацию быстро вращающегося тела из-за чрезвычайно высокого фактора его стабильности S_g [2,3], в идеале стремящегося в бесконечность.

Соответствующие коэффициенты лобового сопротивления α и подъёмной силы γ зависят от угла атаки $\vartheta = \theta_0 - \theta$ — разности между начальным (θ_0) и текущим (θ) углами наклона вектора скорости \vec{V} . То есть тоже зависят от проективной переменной $b = \operatorname{tg} \theta$ и параметра $b_0 = \operatorname{tg} \theta_0$.

Исходные уравнения движения составят систему

$$\begin{cases}
 m\ddot{x} = -\alpha(b)mg\dot{x}V + Ln_x, \\
 m\ddot{y} = -\alpha(b)mg\dot{y}V + Ln_y - mg.
 \end{cases}$$

После подстановки координат нормального вектора $\vec{n} = \left(\frac{-b}{\sqrt{1+b^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \right)$ и скорости $V = \dot{x}\sqrt{1+b^2}$ получается

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= -\alpha(b)g\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \gamma(b)gb\sqrt{1+b^2}\dot{x}^2, \\
 \ddot{y} &= -\alpha(b)g\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \gamma(b)gb\sqrt{1+b^2}\dot{x}^2 - g.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

2.3. Уравнение связи

Умножением верхнего уравнения (2) на b и последующим вычитанием его из нижнего получается

$$\ddot{y} - b\ddot{x} = -g + \gamma(b)g\dot{x}^2(1+b^2)^{3/2}.$$

С учётом соотношения $\dot{y} = b\dot{x}$ это означает

$$\dot{b}\dot{x} = -g + \gamma(b)g\dot{x}^2(1+b^2)^{3/2}. \tag{3}$$

Дифференцированием выражения для абсциссы (1) — $\dot{x} = -\frac{d^2a}{db^2}b > 0$ и подстановкой его в (3) получается *уравнение кинематической связи* темпа поворота

вектора \vec{V} с дифференциальной геометрией траектории

$$\dot{b} \left(-\frac{d^2 a}{db^2} \dot{b} \right) = -g + \gamma(b)g \left(-\frac{d^2 a}{db^2} \dot{b} \right)^2 (1 + b^2)^{3/2}$$

или

$$\dot{b}^2 \left(\frac{d^2 a}{db^2} \right) + \gamma(b)g \left(\frac{d^2 a}{db^2} \right)^2 (1 + b^2)^{3/2} \dot{b}^2 - g = 0. \quad (4)$$

Полученное уравнение справедливо для любого лобового сопротивления, вплоть до невозможной из-за причинно-следственной связи тяги [6] или гипотетической «следающей силы», поддерживающей постоянство модуля скорости V в резистивной среде с переменной диссипацией [5].

Из двух корней разных знаков

$$\dot{b} = \pm \sqrt{\frac{g}{a''_{bb} + \gamma(b)g(a''_{bb})^2(1 + b^2)^{3/2}}} \quad (5)$$

выбирается отрицательный, так как при слабой подъёмной силе угол наклона \vec{V} убывает.

Тогда скорость определится как

$$V(b) = \frac{dx}{db} \dot{b}(1 + b^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{g(1 + b^2)a''_{bb}}{1 + \gamma(b)ga''_{bb}(1 + b^2)^{3/2}}}. \quad (6)$$

Для квадрата темпа потери наклона

$$\dot{b}^2 = \frac{g}{a''_{bb} + \gamma(b)g(a''_{bb})^2(1 + b^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Для второй производной — «углового ускорения» — получается выражение

$$\ddot{b} = -\frac{g \left(a'''_{bbb} + 2g\gamma(b)a''_{bb}a'''_{bbb}(1 + b^2)^{3/2} + g(a''_{bb})^2 \frac{d(\gamma(b)(1 + b^2)^{3/2})}{db} \right)}{2(a''_{bb} + g\gamma(b)(a''_{bb})^2(1 + b^2)^{3/2})^2}. \quad (8)$$

2.4. Начальные условия

Если считать, что движение начинается из начала координат, то из (1) следует

$$\frac{da(b_0)}{db} = -x(b_0) = 0, \quad a(b_0) = y(b_0) + \frac{da(b_0)}{db} b_0 = 0.$$

Что касается второй производной, то её начальное значение получается решением иррационального уравнения (6) при $b = b_0$. Оно, тем не менее, имеет единственное решение

$$\frac{d^2 a(b_0)}{db^2} = \frac{V_0^2}{g(1 + b_0^2)(1 - \gamma(b_0)gV_0^2(1 + b_0^2)^{1/2})}, \quad (9)$$

в первом порядке по величине подъёмной силы L приближаемое как

$$\frac{d^2 a(b_0)}{db^2} \approx \frac{V_0^2}{g(1 + b_0^2)} + \gamma(b_0)\sqrt{1 + b_0^2}V_0^4.$$

Стоит заметить, что соотношение (9) получено из (6) без каких-либо предположений о величине L , и оно остается верным при положительном знаке корня в (5). Тогда при достаточно большой скорости $V_0 > \sqrt{\frac{\cos \theta_0}{\gamma(b_0)}}$ знак $a''_{bb}(b_0)$ изменится на противоположный, и будет (3) $\dot{b} > 0$: тело полетит по вогнутой траектории.

Также достойно внимания то, что две из трёх действующих сил — L и mg вошли в начальное условие (9), между тем как для динамических систем в исходном виде начальные условия по положениям и скоростям полностью независимы от сил.

Формула (9) учитывает общий случай наличия подъёмной силы на старте, однако для осесимметричных тел, полётная стабилизация которых обеспечивается значительным кинетическим моментом, величина $\gamma(b_0) = 0$, и начальные условия сохраняются в неизменном виде.

3. Зависимость от угла атаки

Угол атаки легко определится как $\vartheta = \arctg b_0 - \arctg b$. При нулевом его значении имеет место минимум сопротивления R , и можно предложить разные зависимости.

Плавное поведение, например,

$$\alpha = \alpha_0(1 + \varepsilon|\vartheta^k|) = \alpha_0(1 + \varepsilon|\arctg b_0 - \arctg b|^k), \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (10)$$

Однако более корректно с математической точки зрения поведение

$$\alpha = \alpha_0(1 + \varepsilon \sin^k |\vartheta|) = \alpha_0(1 + \varepsilon \sin^k |\arctg b_0 - \arctg b|), \quad k = 2, 3, 4, \dots, \quad (11)$$

учитывающее многозначное представление угла.

Другой тип зависимостей предполагает так называемую *шатровую* (cusp) особенность в нуле

$$\alpha = \alpha_0(1 + \varepsilon|\vartheta|) = \alpha_0(1 + \varepsilon|\arctg b_0 - \arctg b|) \quad (12)$$

или же

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0(1 + \varepsilon \sin |\vartheta|) = \alpha_0(1 + \varepsilon \sin |\arctg b_0 - \arctg b|) = \\ &= \alpha_0 \left(1 + \varepsilon \cdot \frac{|b_0 - b|}{\sqrt{(1 + b_0^2)(1 + b^2)}} \right). \quad (13) \end{aligned}$$

(Во всех вышеприведённых формулах модуль используется лишь затем, чтобы подчеркнуть особенности углового поведения коэффициента — реально угол атаки знака не меняет.)

Регрессионный анализ баллистических данных [3] для профилей пуль 7,62 мм (M118, M168grain, M190) показывает, что в трансзвуковой области при чрезвычайно высоком скорректированном коэффициенте детерминации $adj-R^2 = 0,998-0,999$ реализуются как шатровые, так и плавные зависимости, причём для последних показатель степени может достигать до $k = 5$. (Анализ также выявил слабую степенную зависимость коэффициента от стартового числа Маха $M_0 = \frac{V_0}{V_{зв}}$ с показателем $(-0,4)-(-0,3)$, но учёт зависимости показателя степени в формуле для коэффициента α [8] — не предмет настоящего исследования.)

Однако в баллистической литературе принята формула (13) со значением показателя $k = 2$. В табл. 1 приведены результаты регрессионного анализа для

коэффициента сопротивления баллистического профиля М118 [3], определяемого отношением силы F к половине произведения плотности среды на квадрат скорости и фронтальную площадь — $\rho V^2 S/2$.

Таблица 1

Model is: $\alpha = \alpha_0(1 + \varepsilon \cdot (\sin \vartheta)^2) \cdot M^k$ (**BRLM118_cut**) **Dep. Var.:** C_d **Level of confidence:** 95,0% ($\alpha = 0,050$)

	Estimate	Standard Error	t -value — $df = 9$	p -level	Lo. Conf. Limit	Up. Conf. Limit
α_0	0,45928	0,004750	96,6939	0,000000	0,44854	0,47003
ε	14,46649	0,701601	20,6193	0,000000	12,87936	16,05363
k	-0,37562	0,016327	-23,0054	0,000000	-0,41256	-0,33869

Что касается подъёмной силы, то для осесимметричных тел её коэффициент во всех случаях моделируется простой формулой

$$\gamma(b) = \gamma_0 \sin \vartheta = \frac{\gamma_0(b_0 - b)}{\sqrt{(1 + b_0^2)(1 + b^2)}}. \quad (14)$$

(Однако реально угловая зависимость коэффициента подъёмной силы у летательных аппаратов отличается от (14) и характеризуется наличием критического угла атаки, при котором происходит её исчезновение, приводящее к падению аппарата.)

4. Учёт роста коэффициента лобового сопротивления

Без учёта подъёмной силы «угловая скорость» и «угловое ускорение» определяются как $\dot{b} = -\sqrt{\frac{g}{a''_{bb}}}$ и $\ddot{b} = -\frac{a'''_{bbb}g}{2(a''_{bb})^2}$.

Уравнение для горизонтальной координаты запишется следующим образом

$$\ddot{x} = \left(-\frac{d^2a}{db^2}\dot{b}\right)'_b \dot{b} = -\frac{d^3a}{db^3}\dot{b}^2 - \frac{d^2a}{db^2}\ddot{b} = -\alpha(b)g \left(-\frac{d^2a}{db^2}\dot{b}\right)^2 \sqrt{1 + b^2},$$

и при подстановке в него угловых характеристик преобразуется к виду

$$\frac{a'''_{bbb}}{2(a''_{bb})^2} = \alpha(b)g\sqrt{1 + b^2}. \quad (15)$$

Подстановка шатровой формулы (13) для коэффициента сопротивления $\alpha(b)$ даёт

$$\frac{a'''_{bbb}}{2(a''_{bb})^2} = \alpha_0g \left(1 + \varepsilon \cdot \frac{b_0 - b}{\sqrt{(1 + b_0^2)(1 + b^2)}}\right) \sqrt{1 + b^2}. \quad (16)$$

Интегрирование с начальными условиями (9) определит резольвенту

$$\begin{aligned} a_{bb}^{(0)'''}(b) = & \\ = & \left[\frac{g - \frac{g\gamma(b_0)V_0^2}{\cos \theta_0}}{V_0^2 \cos^2 \theta_0} + \alpha_0g(b_0\sqrt{1 + b_0^2} + \operatorname{arcsinh} b_0 - b\sqrt{1 + b^2} - \operatorname{arcsinh} b) - \frac{\varepsilon\alpha_0g(b_0 - b)^2}{2\sqrt{(1 + b_0^2)}} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично, интегрирование с использованием также шатровой формулы (12) даёт

$$\hat{a}_{bb}^{(0)'''}(b) = \left[\frac{g - \frac{g\gamma(b_0)V_0^2}{\cos\theta_0}}{V_0^2 \cos^2\theta_0} + \right. \\ \left. + \alpha_0 g(1 + \varepsilon \operatorname{arctg} b_0 - \varepsilon \operatorname{arctg} b)(b_0 \sqrt{1 + b_0^2} + \operatorname{arcsinh} b_0 - b \sqrt{1 + b^2} - \operatorname{arcsinh} b) + \right. \\ \left. + \alpha_0 \varepsilon g \left(b^2 + \sqrt{1 + b^2} + \frac{b \operatorname{arcsinh} b}{1 + b^2} - b_0^2 - \sqrt{1 + b_0^2} - \frac{b_0 \operatorname{arcsinh} b_0}{1 + b_0^2} \right) - \right. \\ \left. - 2\alpha_0 \varepsilon g \int_{b_0}^b \frac{b'^2 \operatorname{arcsinh} b'}{(1 + b'^2)^2} db' \right]^{-1}, \quad (18)$$

у которой последний член в скобках имеет 4-й порядок малости по переменной $b < 0,3$ в области прицельного огня (*direct fire*).

Для плавного поведения (10) с $k = 2$ получается

$$\hat{a}_{bb}^{(0)'''}(b) = \left[\frac{g - \frac{g\gamma(b_0)V_0^2}{\cos\theta_0}}{V_0^2 \cos^2\theta_0} + \right. \\ \left. + \alpha_0(1 + \varepsilon b_0^2 - \varepsilon)g(b_0 \sqrt{1 + b_0^2} + \operatorname{arcsinh} b_0 - b \sqrt{1 + b^2} - \operatorname{arcsinh} b) + \right. \\ \left. + 2\alpha_0 \varepsilon g \left(b^2 + \frac{b_0^2}{4} + \frac{b_0^3}{3} - b - \frac{b^2}{4} - \frac{b^3}{3} \right) \right]^{-1}. \quad (19)$$

И, наконец, для уравнения с использованием формулы (11) с $k = 2$

$$\frac{a_{bbb}'''}{(a_{bb}''')^2} = \alpha_0 g \left(1 + \varepsilon \cdot \frac{(b_0 - b)^2}{(1 + b_0^2)(1 + b^2)} \right) \sqrt{1 + b^2}$$

резольвента имеет вид

$$a_{bb}''(b) = \left[\frac{g - \frac{g\gamma(b_0)V_0^2}{\cos\theta_0}}{V_0^2 \cos^2\theta_0} + \right. \\ \left. + \alpha_0 g \left(1 + \frac{\varepsilon}{1 + b_0^2} \right) (b \sqrt{1 + b^2} + \operatorname{arcsinh} b - b_0 \sqrt{1 + b_0^2} - \operatorname{arcsinh} b_0) + \right. \\ \left. + 4 \frac{\alpha_0 g \varepsilon b_0}{1 + b_0^2} (\sqrt{1 + b^2} - \sqrt{1 + b_0^2}) - \frac{2g\alpha_0 \varepsilon (b_0^2 - 1)(\operatorname{arcsinh} b - \operatorname{arcsinh} b_0)}{1 + b_0^2} \right]^{-1}. \quad (20)$$

Эта формула будет считаться основной, так как получена на основе принятой в баллистической литературе зависимости коэффициента лобового сопротивления от угла атаки. Характерный вид её графика в сравнении с аналогичной кривой для точечной массы (рис. 2а) показывает нарастающее отставание стабилизированного тела от точки, что сказывается на траектории и на дальности (рис. 2б).

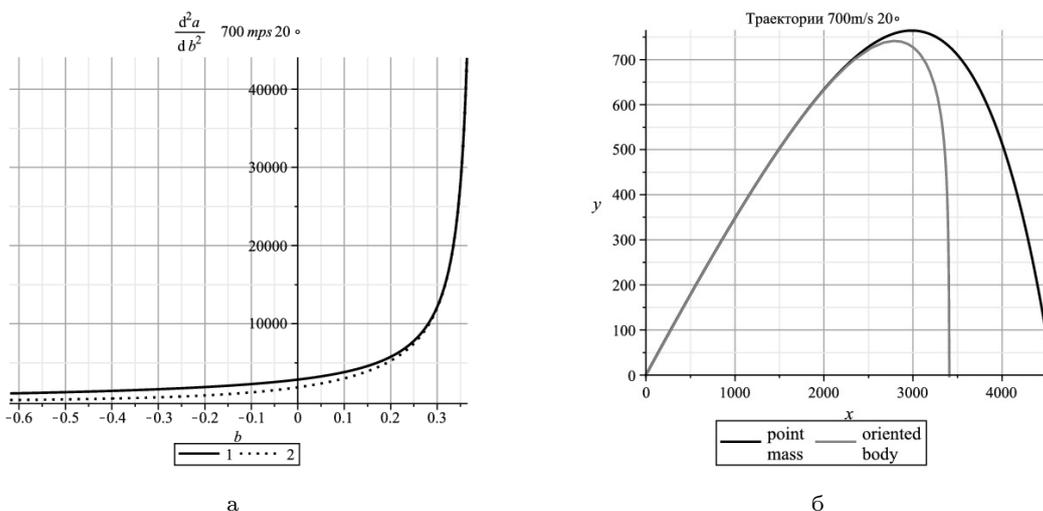


Рис. 2. Сравнение кривой зависимости коэффициента лобового сопротивления от угла атаки и аналогичной кривой для точечной массы:
 а) резольвентные функции $a''_{bb}(b)/m$ точечной массы (1), гиристабилизированного тела (2); б) траектории тела и точечной массы, $\theta_0 = 20^\circ$, $V_0 = 700$ м/с, $\varepsilon = 15$

5. Учёт подъёмной силы

Во всех полученных формулах учитывается возможное изменение начального условия (9) подъёмной силой, не реализующееся для тела вращения, но только для тела, обладающего подъёмной силой в момент старта.

Стабилизация ориентации тела приводит к появлению и росту угла атаки, а следовательно — к асимметрии обтекания и возникновению подъёмной силы L , вносящей вклад в резольвентную функцию a''_{bb} .

Уравнение для последней в условиях действия L выводится аналогичным образом и записывается как

$$\begin{aligned}
 & - a'''_{bbb} \frac{g}{a''_{bb} + \gamma(b)g(a''_{bb})^2(1 + b^2)^{3/2}} - \\
 & - a''_{bb} \left(\frac{g \left(a'''_{bbb} + 2\gamma(b)ga''_{bb}a'''_{bbb}(1 + b^2)^{3/2} + g(a''_{bb})^2 \frac{d(\gamma(b)(1 + b^2)^{3/2})}{db} \right)}{2(a''_{bb} + \gamma(b)g(a''_{bb})^2(1 + b^2)^{3/2})^2} \right) = \\
 & = \alpha g (-a''_{bb})^2 \left(\frac{g}{a''_{bb} + \gamma(b)g(a''_{bb})^2(1 + b^2)^{3/2}} \right) \sqrt{1 + b^2}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Элементарные преобразования приводят его к достаточно простому виду

$$\frac{a'''_{bbb}}{(a''_{bb})^2} = 2\alpha(b)g(1 + \gamma(b)ga''_{bb}(1 + b^2)^{3/2})\sqrt{1 + b^2} + g \frac{d(\gamma(b)(1 + b^2)^{3/2})}{db}. \quad (22)$$

Интегрирование обеих частей даёт соотношение

$$- \frac{1}{a''_{bb}(b)} + \frac{1}{a''_{bb}(b_0)} =$$

$$= 2g \int_{b_0}^b \alpha(b')(1 + g\gamma(b')(1 + b'^2)^{3/2} a''_{b'b'}(b')) \sqrt{1 + b'^2} db' + g\gamma(b)(1 + b^2)^{3/2},$$

эквивалентное

$$-\frac{1}{a''_{bb}(b)} + \frac{1}{a^{(0)''}_{bb}(b_0)} = 2g^2 \int_{b_0}^b \alpha(b')\gamma(b')(1 + b'^2)^2 a''_{b'b'}(b') db' + g\gamma(b)(1 + b^2)^{3/2},$$

где $a^{(0)''}_{bb}(b)$ — функция (20), т.е. с возможным учётом подъёмной силы лишь в начальном условии (9).

В итоге получается нелинейное интегральное уравнение

$$a''_{bb}(b) = \frac{1}{\frac{1}{a^{(0)''}_{bb}(b)} - 2g^2 \int_{b_0}^b \alpha(b')\gamma(b')(1 + b'^2)^2 a''_{b'b'}(b') db' - g\gamma(b)(1 + b^2)^{3/2}}, \quad (23)$$

заменой $S(b) = \int_{b_0}^b \alpha(b')\gamma(b')(1 + b'^2)^2 a''_{b'b'}(b') db'$ сводимое опять к дифференциальному, но более простому, уравнению

$$\frac{dS}{db} = \frac{\alpha(b)\gamma(b)(1 + b^2)^2}{\frac{1}{a^{(0)''}_{bb}(b)} - 2g^2 S(b) - g\gamma(b)(1 + b^2)^{3/2}}. \quad (24)$$

Последнее можно решить численно при помощи высокоточных разностных схем, реализованных в компьютерном продукте Maple, и найти по (23) резольвенту.

Второй путь решения (23) — итерационный, с $a^{(0)''}_{bb}(b)$ в качестве начального приближения. При значениях подъёмной силы много меньших лобового сопротивления — а это реализуется всегда — уже первая итерация

$$a^{(I)''}_{bb}(b) = \frac{1}{\frac{1}{a^{(0)''}_{bb}(b)} - 2g^2 \int_{b_0}^b \alpha(b')\gamma(b')(1 + b'^2)^2 a^{(0)''}_{b'b'}(b') db' - g\gamma(b)(1 + b^2)^{3/2}} \quad (25)$$

даст хорошую точность.

Наконец, третий путь — по теории возмущений, дающий в первом порядке решение

$$a''_{bb}(b) \approx a^{(0)''}_{bb}(b) + (a^{(0)''}_{bb}(b))^2 \left(2g^2 \int_{b_0}^b \alpha(b')\gamma(b')(1 + b'^2)^2 a^{(0)''}_{b'b'}(b') db' + g\gamma(b)(1 + b^2)^{3/2} \right). \quad (26)$$

Однако стоит остановиться на итерационном способе решения интегрального уравнения (23), так как он не предполагает дифференцирований, выводящих даже небольшую, но быстро меняющуюся добавку из разряда малых величин.

Кривые для резольвентной функции 3-й итерации, для разностей 3-й, 2-й и 1-й с нулевой итераций, а также 2-й с 1-й (рис. 3а, 3б) подтверждают правомерность применения метода, при этом демонстрируя высокую точность нахождения

поправки на подъёмную силу уже на 2-й итерации: кривые 2-го и 3-го приближений абсолютно сливаются на графиках. Для итерации 1-го порядка точность примерно 5–10%.

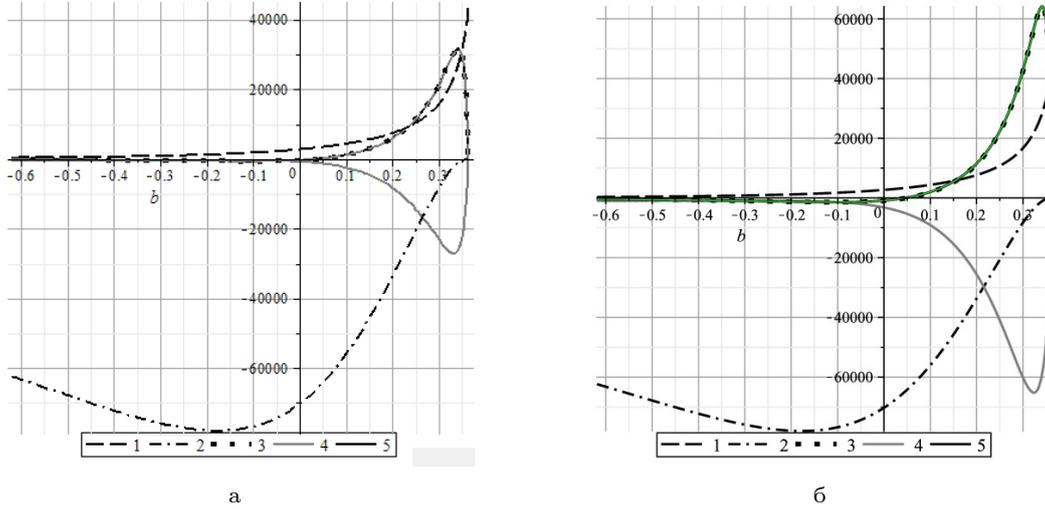


Рис. 3. Кривые $a_{bb}^{(III)''}(b)$ (1), $50\Delta a_{bb}^{(0)''}(b) = 50(a_{bb}^{(0)''}(b) - a_{bb}^{(0)''}(b)_{point})$ (2), $50\delta^{(II)} a_{bb}''(b) = 50(a_{bb}^{(II)''}(b) - a_{bb}^{(0)''}(b))$ (3), $500\delta^{(I)} a_{bb}''(b) = 500(a_{bb}^{(I)''}(b) - a_{bb}^{(0)''}(b))$ (4) и $50\delta^{(III)} a_{bb}''(b) = 50(a_{bb}^{(III)''}(b) - a_{bb}^{(0)''}(b))$ (5) для $V_0 = 700$ м/с, $\theta_0 = 20^\circ$, $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ c²/м²: а) — $\gamma_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ c²/м², б) — $\gamma_0 = 10^{-5}$ c²/м²

Сама поправка $\delta^{(III)} a_{bb}''(b)$ демонстрирует хорошую пропорциональность по угловому градиенту γ_0 , свидетельствующую о линейности эффекта, и, косвенно, — о собственной малости, хотя и составляет в максимуме около 2% от начального значения $a_{bb}^{(0)''}(b_0)$.

На стартовом участке она превышает относительно медленно нарастающую отрицательную поправку на рост угла атаки $\Delta a_{bb}^{(0)''}(b) = a_{bb}^{(0)''}(b) - a_{bb}^{(0)''}(b)_{point}$, составляющую до $\sim 5\%$ от аналогичной резольвенты точечной массы $a_{bb}^{(0)''}(b)_{point}$ [6]. Но вблизи вершины траектории и за ней — на 1–2 порядка уступает $\Delta a_{bb}^{(0)''}(b)$.

В целом при разных стартовых наклонах вид добавок (рис. 4) $\delta^{(III)} a_{bb}''(b, b_0) = a_{bb}^{(III)''}(b, b) - a_{bb}^{(0)''}(b, b_0)$ неизменен: резкий всплеск и достаточно скорое падение почти до нуля. Обращает на себя внимание тенденция к медленному падению величины этого всплеска с ростом начального наклона b_0 .

Импульсное поведение добавки на старте оправдывает применение избегающего дифференцирования итерационного метода. Оно приводит к поправкам к координатным функциям $\delta^{(III)} x(b)$ и $\delta^{(III)} y(b)$ (рис. 5), демонстрирующим быстрый выход на насыщение. Причём предельное значение высотной поправки $\delta^{(II)} y(b)$ для числа Маха $M \approx 2$ и углов вылета $\theta_0 = 20^\circ$ и 30° составляют достаточно большие величины около 40 и 50 м, соответственно, что непременно скажется на такой важной характеристике движения, как дальность полёта/стрельбы.

Также внесут свой вклад и горизонтальные добавки порядка 110 и 80 м. Но основной вклад будет за счёт увеличения модуля отрицательного конечного наклона $b_1 = \text{tg } \theta_1$ траектории (рис. 1), являющегося верхним пределом интегрирования при определении дальности [6].

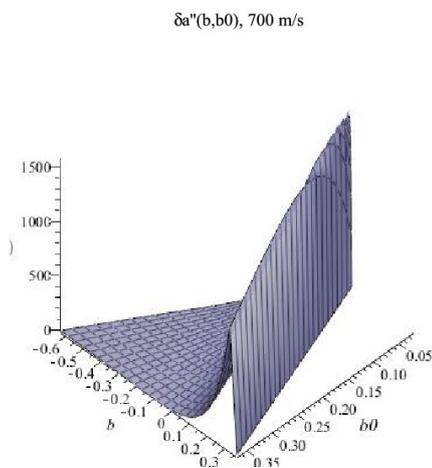


Рис. 4. Поверхность

$$\delta^{(III)} a''_{bb}(b, b_0) = a''_{bb}{}^{(III)}(b, b_0) - a''_{bb}{}^{(0)}(b, b_0) / \text{м},$$

$$V_0 = 700 \text{ м/с}, \alpha_0 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^2/\text{м}^2, \gamma_0 = 10^{-5} \text{ с}^2/\text{м}^2$$

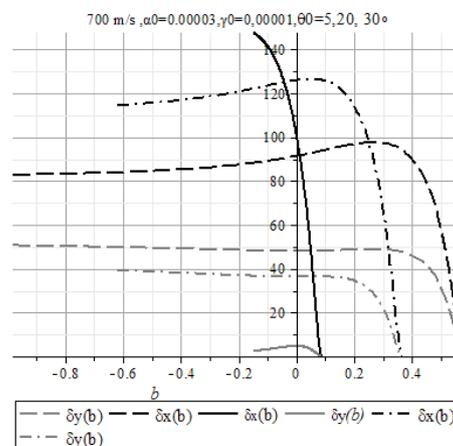


Рис. 5. Поправки к

координатным функциям

$$\delta^{(III)} x(b) / \text{м} \text{ и } \delta^{(III)} y(b) / \text{м},$$

$$V_0 = 700 \text{ м/с}, \theta = 5, 20 \text{ и } 30^\circ,$$

$$\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^2/\text{м}^2, \gamma_0 = 10^{-5} \text{ с}^2/\text{м}^2$$

6. Заключение

Развитый метод интегрирования оказывается результативным для получения аналитических решений в различных ситуациях резистивной среды, близких к реальным стационарным условиям. Это также и падение плотности с высотой [7], и пиковое поведение степенного показателя сопротивления вблизи звукового порога [8], и пр. Простота и единообразие подхода делает его перспективным для использования в так называемом *баллистическом калькуляторе*. Кроме того, как независимый и альтернативный метод он может выполнять контролируемую роль для других приёмов интегрирования в баллистике, одновременно формируя в последней отдельное и независимое двойственно-проективное направление.

Литература

1. Euler L. Recherches sur la veritable courbe que décrivent les corps jettés dans l'air ou dans un autre fluide quelconque // Memoires de l'academie des sciences de Berlin. — 1755. — Vol. 9. — Pp. 351–352.
2. Weinacht P., Cooper G. R., F. N. J. Analytical Prediction of Trajectories for High-Velocity Direct-Fire Munitions // Army Research Laboratory Report. — <http://www.arl.army.mil/arlreports/2005/ARL-TR-3567.pdf>.
3. Robert S., McCoy L. Aerodynamic Characteristics of 7.62 mm Match Bulets. — Memorandum Report BRL-MR-3733, Ballistic Research Laboratory. — 1988.
4. Chen L.-M., Pan Y.-H., Chen Y.-J. A Study of Shuttlecock's Trajectory in Badminton // Journal of Sports Science and Medicine. — 2009. — No 8. — Pp. 657–662. — <http://www.jssm.org/vol18/n4/23/v8n4-23pdf.pdf>.
5. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундаментальная и прикладная математика. — 2008. — Т. 14, № 3. — С. 3–327. [Shamolin M. V. Dynamical Systems with Variable Dissipation: Approaches, Methods and Applications // Fundamental and Applied Mathematics. — 2008. — Vol. 14, No. 3. — P. 3–237]

6. Чистяков В. В. Об одном резольвентном методе интегрирования уравнений свободного движения в среде с квадратичным сопротивлением // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 3. — С. 265–277. [Chistyakov V. V. On One Resolvent Method for Integrating the Law Angle Trajectories of a Heavy Point Projectile Motion Under Quadratic Air Resistance // Computer Research and Modelling. — 2011. — No. 3. — P. 265–277]
7. Чистяков В. В. Интегрирование уравнений свободного движения тяжёлой точки в среде с вертикальным градиентом плотности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — № 1. — С. 120–132. [Chistyakov V.V. On Integrating the Projectile Motion Equations of a Heavy Point in Medium with Height Decreasing Density // Udmurt University Bulletin. Series "Mathematics, Mechanics, Computer Sciences". — 2012. — No 1. — P. 120–132]
8. Чистяков В. В. Интегрирование уравнений динамики тяжёлой точки в среде с показательно-степенным законом сопротивления // Тезисы XIX-й Международной Конференции «Математика. Компьютер. Образование». — Дубна: 30 января–4 февраля 2012. — С. 213. [Chistyakov V.V. On Integrating of the Equations of a Heavy Point Projectile Motion in the Medium with Exponent-Power Law Air Drag // The Book of Abstracts of XIX Int. Conf. "Mathematics. Computer.Education". — Town of Dubna, Moscow distr., Russia 30.01–04.02.2012. — P. 213]

UDC 531.55+514.85

Determining the Trajectory of a Gyroscopically Stabilized Projectile in Air by Using Dual-Projective Variables

V. V. Chistyakov

*Department of Electric Engineering
Yaroslavl' State Academy of Agriculture
58, Tutaevskoe shosse, Yaroslavl', 150042, Russia*

Early developed method of integrating the ballistic equations in dual-projective variables was applied for the gyroscopically stabilized projectile under action of relatively weak lift force $L = \gamma V^2 \approx 0.1mg$ and the force of air drag $R = \alpha V^2 \gg mg$, both their coefficients $\alpha(\theta)$ and $\gamma(\theta)$ being strongly dependent on angle of attack θ . Obtained are both exact and approximate expressions for the resolventa function $f(b) = a''_{bb}(b)$, with the $a(b)$ and $b = \operatorname{tg} \theta$ being an intercept and slope of trajectory respectively.

Key words and phrases: quadratic air drag, lift force, gyroscopically stabilized, projectile, dual-projective variables.