УДК 533.932

К релятивистской теории движения заряженной частицы в резонансных условиях

В. П. Милантьев

Кафедра экспериментальной физики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Представлена достаточно общая релятивистская теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях в резонансных условиях в дрейфово-эйкональном приближении. Подробно рассмотрено движение частицы в области циклотронного, параметрического и полуциклотронного резонансов.

Ключевые слова: заряженная частица, релятивистское движение, циклотронный и параметрический резонансы, полуциклотронный резонанс.

1. Введение

Теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях в резонансных условиях имеет многочисленные применения в задачах ускорения заряженных частиц, удержания и нагрева плазмы в магнитных ловушках, генерации электромагнитного излучения различных диапазонов и т. д. Теория движения отдельной частицы играет также важную роль в кинетической теории плазмы, поскольку уравнения движения частицы определяют характеристики кинетического уравнения. Исследованию различных механизмов резонансного взаимодействия частицы с волной в конкретных условиях посвящено огромное количество работ. В данной обзорной статье представлена достаточно общая релятивистская теория, описывающая резонансное движение заряженных частиц в слабо неоднородном ведущем магнитном поле и медленно изменяющемся высокочастотном (ВЧ) электромагнитном поле. Теория строится на основе дрейфово-эйконального приближения с использованием метода усреднения Боголюбова. В рассматриваемом приближении фазы (эйконалы) ВЧ волновых пакетов считаются независимыми быстрыми переменными, наряду с фазой циклотронного вращения частицы. Усреднение проводится по всем быстрым фазам и их нерезонансным комбинациям, при этом резонансные комбинации фаз относятся к числу медленных переменных. Возможность конкретных резонансов определяется интенсивностью волны, ее поляризацией, направлением распространения относительно внешнего магнитного поля и т. д. Предполагается, что отдельные резонансы не перекрываются между собой. В противном случае движение частицы существенно усложняется и становится стохастическим. В качестве конкретных примеров рассматривается движение частицы в условиях циклотронного, параметрического и полуциклотронного резонансов в волнах разного типа. Обсуждается возможность нагрева плазмы волнами в магнитных ловушках, а также в астрофизических условиях.

2. Дрейфово-эйкональная теория движения заряженной частицы в резонансных условиях

Представим электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ в виде суммы квазистационарных полей $\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)$ и высокочастотного (ВЧ) поля $\mathbf{E}_\sim(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}_\sim(\mathbf{r},t)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_\sim, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\sim. \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 11 июня 2012 г.

Работа (частично) проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 г.», а также поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 10-02-01302).

Считая, что $|\mathbf{B}_\sim| \leqslant |\mathbf{B}_0|$, введём, как это принято в дрейфовой теории [1], правую тройку ортогональных единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, связанных с силовыми линиями ведущего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, так, что

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)/B_0(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{I}.$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичный тензор, произведение $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ — диада (тензор). Точка между векторами означает их скалярное произведение. Вектор $\mathbf{e}_1$ представляет собой вектор касательной к силовой линии ведущего магнитного поля. Векторы $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ можно не конкретизировать. Иногда их связывают с векторами нормали и бинормали к силовой линии. Предполагая, что магнитное поле $\mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)$ является сильным, а электрическое поле $\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t)$ — «слабым» [1], при не слишком интенсивном ВЧ поле можно выделить циклотронное вращение частицы с помощью формул:

$$\mathbf{p} = p_\parallel\mathbf{e}_1 + p_\perp(\mathbf{e}_2\cos\vartheta_c + \mathbf{e}_3\sin\vartheta_c), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} = v_\parallel\mathbf{e}_1 + v_\perp(\mathbf{e}_2\cos\vartheta_c + \mathbf{e}_3\sin\vartheta_c). \tag{3}$$

Здесь ϑ_c — фаза циклотронного вращения частицы в ведущем магнитном поле $\mathbf{B}_0(\mathbf{r},t)$, $p_\parallel$, $p_\perp(v_\parallel, v_\perp)$ — соответственно, величины продольной и поперечной составляющих импульса (скорости) частицы, m — её масса, $\gamma = \sqrt{1 + (p_\parallel^2 + p_\perp^2)/(mc)^2}$ — релятивистский фактор.

Будем рассматривать ВЧ поля в виде суперпозиции конечного числа (M) квазимонохроматических волн в эйкональном приближении:

$$\mathbf{E}_\sim(\mathbf{r},t|\vartheta) = \sum_{1\leqslant s\leqslant M}\{\mathbf{E}_s\exp(i\vartheta_s) + \text{к.с.}\}, \tag{4}$$

$$\mathbf{B}_\sim(\mathbf{r},t|\vartheta) = \sum_{1\leqslant s\leqslant M}\{\mathbf{B}_s\exp(i\vartheta_s) + \text{к.с.}\}. \tag{5}$$

Здесь к.с. означает комплексное сопряжение, комплексные амплитуды $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_s(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_s(\mathbf{r},t)$ — медленно меняющиеся функции координат и времени, $\vartheta_s = \vartheta_s(\mathbf{r},t)$ — быстрые фазы (эйконалы). С помощью эйконала определяется мгновенная частота ω_s и локальный волновой вектор $\mathbf{k}_s$ s–го волнового пакета [2]:

$$\omega_s = -\frac{\partial\vartheta_s}{\partial t}, \quad \mathbf{k}_s = \nabla\vartheta_s. \tag{6}$$

Представление ВЧ поля в виде (4), (5), (6) отвечает достаточно общим условиям, реализующимся в лабораторной и космической плазме, и содержит в себе, как частные случаи, плоскую волну, ВЧ поля в волноводе и резонаторе, гауссов пучок и т. п. В ряде задач удобно использовать выражения для ВЧ полей в виде разложения по ортам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{E}_\sim = \sum_{1\leqslant s\leqslant M}\sum_{1\leqslant i\leqslant 3}\mathbf{e}_i E_{is}\cos(\vartheta_s + \varphi_{is}), \quad \mathbf{B}_\sim = \sum_{1\leqslant s\leqslant M}\sum_{1\leqslant i\leqslant 3}\mathbf{e}_i B_{is}\cos(\vartheta_s + \varphi_{is}). \tag{7}$$

Быстрые фазы ϑ_s парциальных волновых пакетов будем рассматривать как независимые угловые переменные наряду с фазой циклотронного вращения ϑ_s. Уравнения для фаз ϑ_s следуют из определений (6) с учётом (3):

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_s}{\mathrm{d}t} = -\omega_s + \mathbf{k}_s\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = -\omega_s + v_\parallel k_{1s} + v_\perp(k_{2s}\cos\vartheta_c + k_{3s}\sin\vartheta_c) \equiv \nu_s + A_s. \tag{8}$$

Здесь и далее используются обозначения:

$$\nu_s \equiv -\omega_s + \nu_\parallel k_{1s}, \quad k_{is} = \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{e}_i. \tag{9}$$

Релятивистские уравнения движения заряженной частицы в указанных полях с учётом (2) стандартным образом сводятся к системе:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p_\parallel}{\mathrm{d}t} &= a_0 + a_1\cos\vartheta_c + a_2\sin\vartheta_c + a_3\cos 2\vartheta_c + a_4\sin 2\vartheta_c + \\
&\quad + \sum_{1\leqslant s\leqslant M}(a_{5s}\cos\vartheta_s + a_{6s}\sin\vartheta_s + a_{7s}\cos\vartheta_{s+} + a_{8s}\sin\vartheta_{s+} + \\
&\quad + a_{9s}\cos\vartheta_{s-} + a_{10s}\sin\vartheta_{s-}) \equiv a_\parallel\,, \\
\frac{\mathrm{d}p_\perp}{\mathrm{d}t} &\equiv a_\perp\,, \\
\frac{\mathrm{d}\vartheta_c}{\mathrm{d}t} &= \omega_c + A_c\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Величины $a_\perp$, A_c имеют такой же вид, как $a_\parallel$, с заменой коэффициентов a_i, соответственно, на b_i, c_i. Явные выражения этих коэффициентов здесь не выписываются. В уравнениях (10) и далее используются обозначения:
для комбинационных фаз:

$$\vartheta_{s\pm} = \vartheta_c \pm \vartheta_s\,, \tag{11}$$

для релятивистской гирочастоты:

$$\omega_c = -eB_0/mc\gamma \equiv \omega_{c0}/\gamma\,. \tag{12}$$

Введение фаз ϑ_s парциальных волновых пакетов как независимых переменных наряду с фазой циклотронного вращения ϑ_c позволяет рассматривать уравнения (10) вместе с (3) и (8) как многопериодную (или многочастотную) систему уравнений стандартного вида [1, 3]:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a(t,x,\vartheta), \\
\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} &= \omega(t,x) + A(t,x,\vartheta).
\end{aligned} \tag{13}$$

В рассматриваемой задаче:

$$\begin{aligned}
x =& (\mathbf{r}, p_\parallel, p_\perp), \quad a = (\mathbf{v}, a_\parallel, a_\perp), \quad \vartheta = (\vartheta_c, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_M), \\
&\omega = (\omega_c, \nu_1, \ldots, \nu_M), \quad A = (A_c, A_1, \ldots, A_M).
\end{aligned} \tag{14}$$

Целесообразность сведения уравнений движения частицы в сильном магнитном поле и в поле ВЧ волновых пакетов к многопериодной системе вида (13) обусловлена тем, что в ней явно выделяются не только быстрые фазы, но и возможные комбинации между ними. Кроме того, для таких систем достаточно хорошо разработаны и математически обоснованы методы усреднения [3], что даёт возможность построения последовательной теории усреднённого движения заряженных частиц в электромагнитных полях с ВЧ составляющей.

Система (13), в общем, является чрезвычайно сложной. Она может быть упрощена с помощью сглаживания, усреднения по быстрым осцилляциям [1, 3]. Под «быстрыми» понимают колебания, частоты ω которых удовлетворяют неравенству:

$$\omega T \gg 1, \tag{15}$$

где T — характерный временной масштаб.

Для проведения усреднения необходимо разделить «быстрые» и «медленные» переменные и оценить относительный порядок членов в системе уравнений движения частицы. При условии (15) фазы ϑ, соответствующие частотам ω, являются «быстрыми» переменными, тогда как переменные x относятся к числу «медленных». При отсутствии ВЧ поля уравнения движения заряженной частицы в сильном магнитном поле в форме (13) представляют собой систему уравнений с быстро вращающейся фазой, на основе которой Н. Н. Боголюбов и Д. Н. Зубарев впервые дали последовательный вывод дрейфовых уравнений [3].

Пусть L — характерный линейный масштаб неоднородности поля и параметров плазмы, T — характерный временной масштаб их изменения. Если магнитное поле $\mathbf{B}_0$ является сильным, то можно ввести малый параметр μ, характерный для дрейфовой теории [1]:

$$\mu = r_c/L \ll 1, \tag{16}$$

где r_c — радиус циклотронного вращения частицы. Тогда условия того, что осцилляции в системе (13) являются быстрыми, можно представить в виде:

$$1/|\omega_c|T \approx 1/|\nu_s|T \approx \mu. \tag{17}$$

При отсутствии черенковского и других резонансов следует, что:

$$1/\omega_c T \approx \mu, \quad 1/k_{s1}V_\parallel T \approx 1/k_{s1}L \approx \mu. \tag{18}$$

Это означает, что ВЧ поле рассматривается как квазимонохроматическая волна, распространение которой в направлении магнитного поля $\mathbf{B}_0$ описывается в приближении геометрической оптики [2]. При этом малый параметр геометрической оптики считается сравнимым с малым параметром дрейфовой теории.

В дрейфовой теории различают случаи «слабого» и «сильного» электрического поля $\mathbf{E}_0$ [1]. Электрическое поле считается «слабым», если скорость электрического дрейфа $V_E = c\big|[\mathbf{E}_0\mathbf{B}_0]\big|/B_0$ является «малой», т. е.

$$V_E \approx \mu V. \tag{19}$$

где V — характерная скорость частицы. В случае «сильного» электрического поля:

$$V_E \approx V. \tag{20}$$

Случай «слабого» электрического поля соответствует собственно дрейфовой теории, тогда как «сильное» электрическое поле характерно для магнитогидродинамического приближения в теории плазмы. Далее будет рассматриваться дрейфовое движение заряженной частицы в ВЧ полях в случае «слабого» электрического поля.

Уравнения движения (10) содержат в себе также параметр

$$g = e|E_\sim|/m\omega c. \tag{21}$$

Это — отношение амплитуды осцилляторной скорости частицы в ВЧ поле к скорости света, или отношение амплитуды осцилляций частицы в поле ВЧ волны к длине волны. Предполагается, что параметр

$$g \approx \mu \ll 1. \tag{22}$$

В поле мощного лазерного излучения параметр g может быть большим. Этот случай далее не рассматривается.

В уравнениях (8) содержится параметр $k_{s\perp}L$, где $k_{s\perp}$ — величина поперечной составляющей волнового вектора. В уравнениях (10) предполагается, что

$$k_{s\perp}L \approx 1. \tag{23}$$

Согласно (18) это означает, что

$$k_{s\perp}/k_{s1} \approx \mu. \tag{24}$$

Другими словами, уравнения (10) применимы в случае квазипродольного распространения ВЧ волновых пакетов относительно внешнего магнитного поля. Тогда при отсутствии резонансов стандартным образом можно провести усреднение этих уравнений по всем быстрым фазам. Отметим, что соотношение (23) означает также, что

$$k_{s\perp} r_c \approx \mu. \tag{25}$$

Это значит, что гирорадиус частицы мал по сравнению с поперечной длиной волны. В случае конечного гирорадиуса частицы:

$$k_{s\perp} r_c \approx 1. \tag{26}$$

так что параметр

$$k_{s\perp} L \approx 1/\mu \gg 1. \tag{27}$$

В этом случае усреднение по фазам волновых пакетов невозможно, поскольку уравнения для фаз (8) содержат большие (порядка μ^{-1}) быстро осциллирующие члены. Чтобы обойти эту трудность, перейдём от фаз волновых пакетов ϑ_s к новым вспомогательным фазам ψ_s по формуле [4]:

$$\psi_s = \vartheta_s - (v_\perp/\omega_c)(k_{s2}\sin\psi_c - k_{s3}\cos\psi_c), \quad \psi_c \equiv \vartheta_c\,. \tag{28}$$

Такая замена позволяет устранить в уравнениях для фаз ψ_s быстро осциллирующие члены, имеющие порядок μ^{-1}. Используем соотношение:

$$\exp(i\vartheta_s) = \sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty} J_n(\rho_s)\exp\{i[\psi_s + n(\psi_0 - \phi_s)]\},$$

где $\rho_s = \sqrt{\rho_{s2}^2 + \rho_{s3}^2}$, $\rho_{sj} = v_\perp k_{sj}/\omega_c$, $\phi_s = \operatorname{arctg}(\rho_{s3}/\rho_{s2})$, $J_n(\rho_s)$ — функции Бесселя. Уравнения движения частицы в случае «слабого» электрического поля приобретают вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} = v_\parallel \mathbf{e}_1 + (v_\perp/2)\{\mathbf{e}_-\exp(i\psi_c) + \mathbf{e}_+\exp(-i\psi_c)\},\\
&\frac{\mathrm{d}p_\parallel}{\mathrm{d}t} = a_0 + \Bigg\{a_1\exp(i\psi_c) + a_2\exp(2i\psi_c) + \\
&\qquad + \sum_{1\leqslant s\leqslant M}\ \sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty} a_s^n \exp[i(\psi_s + n\psi_c)] + \text{к.с.}\Bigg\} \equiv a_\parallel\,,\\
&\frac{\mathrm{d}p_\perp}{\mathrm{d}t} = a_\perp,\\
&\frac{\mathrm{d}\psi_c}{\mathrm{d}t} = \omega_c + A_c,\\
&\frac{\mathrm{d}\psi_s}{\mathrm{d}t} = \nu_s + C_{s0} + \Bigg\{C_{s1}\exp(i\psi_c) + C_{s2}\exp(2i\psi_c) + \\
&\qquad + \sum_{1\leqslant s_1\leqslant M}\ \sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty} C_{ss_1}^n \exp[i(\psi_{s1} + n\psi_c)] + \text{к.с.}\Bigg\} \equiv v_s + A_s\,.
\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь введены комплексные векторы $\mathbf{e}_\pm = \mathbf{e}_2 \pm i\mathbf{e}_3$.

Выписанная система уравнений имеет вид многопериодной системы (13) и может быть упрощена путем сглаживания по быстрым фазам. Уравнения движения содержат коэффициенты, определяемые амплитудами ВЧ поля (4), (5), которые не являются независимыми. Они связаны друг с другом максвелловским уравнением индукции. В рассматриваемом приближении геометрической оптики предполагается, что

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_s^0 + \mu\mathbf{E}_s^1 + \ldots,$$
$$\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_s^0 + \mu\mathbf{B}_s^1 + \ldots.$$

Тогда из уравнения индукции следует:

$$\mathbf{B}_s^0 = (c/\omega_s)[k_s\mathbf{E}_s^0], \tag{30}$$

$$\mathbf{B}_s^1 = \frac{1}{i\omega_s}\frac{\partial \mathbf{B}_s^0}{\partial t} + \frac{c}{i\omega_s}\mathrm{rot}\mathbf{E}_s^0 + \frac{c}{\omega_s}[k_s\mathbf{E}_s^1]. \tag{31}$$

Согласно общей схеме усреднения Боголюбова [3] следует перейти от истинных динамических переменных частицы $x = (\mathbf{r}, p_\parallel, p_\perp))$ и быстрых фаз $\vartheta = (\vartheta_c, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_M)$ (или фаз ψ) к новым, сглаженным переменным $X = (\mathbf{R}, P_\parallel, P_\perp)$ и фазам $\alpha = (\alpha_c, \alpha_1, \ldots, \alpha_M)$ по формулам:

$$x = X + \mu g_1(X, \alpha, t) + \mu^2 g_2(X, \alpha, t) + \ldots, \tag{32}$$

$$\vartheta = \alpha + \mu q_1(X, \alpha, t) + \mu^2 q_2(X, \alpha, t) + \ldots. \tag{33}$$

Функции g_i, q_j, определяющие быстро осциллирующие добавки к сглаженным переменным, предполагаются периодическими по всем фазам с периодом 2π. Сглаженные переменные представляют собой усредненные по всем быстрым фазам значения истинных переменных:

$$X \equiv \langle x\rangle = (2\pi)^{-(M+1)} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} x\, \mathrm{d}\alpha_c\, \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_M\,, \tag{34}$$

при этом

$$\langle g\rangle = \langle q\rangle = 0. \tag{35}$$

При отсутствии резонансных соотношений между частотами уравнения эволюции сглаженных переменных X и α формально разделяются, поскольку, по предположению, уравнения для медленных переменных X не содержат быстрых фаз α:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= \varphi_0(X, t) + \mu\varphi_1(X, t) + \mu^2\varphi_2(X, t) + \ldots\,, \\ \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} &= \mu^{-1}\nu(X, t) + \Omega_0(X, t) + \mu\Omega_1(X, t) + \ldots\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Уравнения (36) представляют собой усреднённые уравнения, причем функции φ, Ω, g, q вычисляются по общим правилам метода усреднения $[1, 3, 5]$. При отсутствии ВЧ поля уравнения (36) представляют собой систему дрейфовых уравнений движения заряженной частицы в слабо неоднородном магнитном поле $[1, 3, 5]$.

При наличии резонансов схема усреднения изменяется. Резонансы в точной системе уравнений движения частицы определяются, в общем, соотношениями между частотами:

$$|N_0\omega_c + N_1\nu_1 + \cdots + N_M\nu_M| \equiv |(N \cdot \nu)| \ll \min(\omega_c, \nu_i), \tag{37}$$

где N_0, $N_1, \ldots, N_M$ — некоторые простые целые числа.

В этом случае комбинация фаз, соответствующая резонансному соотношению (37), не является «быстрой» переменной, и по ней нельзя проводить усреднение. Таким образом, при усреднении расширяется пространство «медленных» переменных за счёт резонансной комбинации фаз ψ_r:

$$\psi_r = N_0\vartheta_c + N_1\vartheta_1 + \cdots + N_M\vartheta_M \equiv (N \cdot \vartheta). \tag{38}$$

Тогда по остающимся быстрым фазам и их нерезонансной комбинации может быть проведено усреднение системы уравнений движения. При этом предполагается, что отдельные резонансы не перекрываются между собой. При указанных условиях вместо (36) усреднённые уравнения, в общем, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= \varphi_0(t, X, \psi_r) + \mu\varphi_1(t, X, \psi_r) + \mu^2\varphi_2(t, X, \psi_r) + \ldots\,, \\ \frac{\mathrm{d}\psi_r}{\mathrm{d}t} &= (N \cdot \nu) + (N \cdot \Omega_0) + \mu(N \cdot \Omega_1) + \ldots\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь $\psi_r = \langle\psi_r\rangle \equiv (N \cdot \alpha)$ — сглаженная резонансная комбинация фаз. Достоинством метода усреднения является то, что он позволяет получить упрощенные уравнения для медленных переменных типа@(39), а также вычислить периодические добавки к этим переменным, в принципе, с любой степенью точности.

Из уравнений движения (29) следует, что в нулевом приближении (с учётом функций φ_0 в усреднённых уравнениях) возможен черенковский резонанс частицы с s–й волной (при $\nu_s \approx 0$) и циклотронный резонанс (при $\omega_c \approx \nu_s$). В случае конечного гирорадиуса частицы возможны также резонансы на гармониках гирочастоты (при $\nu_s \approx n\omega_c$). В следующем приближении (с учётом φ_1) возникают более сложные резонансы. В частности, при квазипродольном распространении волн возможны резонансные комбинации фаз вида:

$$2\alpha_c \pm \alpha_s; \quad 3\alpha_c \pm \alpha_s; \quad \alpha_{s1} \pm \alpha_s; \quad \alpha_c \pm \alpha_{s1} \pm \alpha_s; \quad 2\alpha_c \pm \alpha_{s1} \pm \alpha_s\,. \tag{40}$$

Первые две комбинации фаз соответствуют резонансам на обертоне «собственной» частоты, которые называют также демультипликационными, или параметрическими резонансами [3]. Этим резонансным фазам отвечают соотношения между частотами: $2\omega_c \pm \nu_s \approx 0$, $3\omega_c \pm \nu_s \approx 0$. Третья комбинация фаз в (40) при $s_1 \neq s$ соответствует взаимодействию волна–частица–волна, или нелинейному затуханию Ландау [6]: $\nu_{s_1} \pm \nu_s = -\omega_{s_1} \mp \omega_s + V_\parallel(k_{s_1\parallel} \pm k_{s\parallel}) \approx 0$. Четвёртая комбинация при $s_1 = s$ описывает резонанс на «обертоне внешней частоты», или, как говорят, полуциклотронный резонанс [3]: $\omega_c \pm 2\nu_s \approx 0$. Если $s_1 \neq s$, то последние две комбинации отвечают циклотронному и параметрическому резонансам на биениях двух волн. В следующем приближении (с учётом φ_2) возникают более сложные резонансы, в том числе с участием трёх волн.

Может показаться, что высшие приближения дают относительно малый вклад, и, следовательно, соответствующие резонансы мало существенны. Однако они могут проявляться в сильных ВЧ полях и в тех случаях, когда в резонансном взаимодействии участвует достаточно большое число частиц.

Общие условия типа (40) указывают лишь на принципиальную возможность соответствующих резонансов в рассматриваемой системе. Их реальная осуществимость зависит от конкретного типа ВЧ поля, в частности от поляризации волн и направления их распространения. Рассмотрим далее некоторые резонансы.

3. Циклотронный резонанс

Взаимодействие заряженной частицы с электромагнитной волной во внешнем магнитном поле может происходить в условиях циклотронного резонанса, если волна является поперечной. Рассмотрим циклотронный резонанс электронов в двух предельных случаях: поперечная волна, бегущая строго поперек магнитного поля, и волна, распространяющаяся строго вдоль магнитного поля.

а). В первом случае рассмотрим обыкновенную волну, распространяющуюся в однородной плазме перпендикулярно внешнему магнитному полю (вдоль оси x), которое предполагается однородным и направленным вдоль оси z. Векторы поля волны задаются формулами:

$$E_z = E\cos\vartheta, \quad B_y = -(kc/\omega)E_z, \quad k = k_x.$$

В этом случае возможен не только основной циклотронный резонанс, но и резонансы на гармониках циклотронной частоты. Усреднённое движение электрона описывается уравнениями (в безразмерной форме):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P_z}{\mathrm{d}\tau} &= -gJ_N(\rho)(1 - N\omega_c/\omega)\cos\Psi_r\,,\\
\frac{\mathrm{d}P_\perp}{\mathrm{d}\tau} &= -gJ_N(\rho)(N\omega_c/\omega)(P_z/P_\perp)\cos\Psi_r\,,\\
\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau} &= -gJ_N(\rho)(P_z/\gamma)\cos\Psi_r\,,\\
\frac{\mathrm{d}\psi_r}{\mathrm{d}\tau} &= -1 + N\omega_c/\omega + g(Nkc/\omega\gamma)(P_z/P_\perp)J_N'\sin\Psi_r\,.
\end{aligned} \tag{41}$$

Здесь $\Psi_r = \psi + N\psi_c$ — резонансная разность фаз, $\tau = \omega t$, параметр $g = eE/mc\omega$, безразмерные компоненты вектора импульса нормированы на mc, аргумент $\rho = kP_\perp/m\omega_{c0}$, $J_N(\rho)$ — функция Бесселя, $J_N'(\rho) = \mathrm{d}J_N/\mathrm{d}\rho$.

Выписанная система уравнений содержит интеграл [7]:

$$\gamma - (\omega/2N\omega_{c0})P_\perp^2 = \text{const}. \tag{42}$$

Существует также интеграл:

$$P_z - gJ_N(\rho)\sin\Psi_r = \text{const}. \tag{43}$$

Отсюда видно, что продольный импульс частицы не может возрастать неограниченно.

В нерелятивистском приближении при точном резонансе продольный импульс остается постоянным. Тогда полученный интеграл определяет фазовые траектории частицы на плоскости $(P_\perp, \Psi_r)$. В этом случае из системы (41) можно получить уравнение (для размерных переменных):

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_\perp^2}{\mathrm{d}t^2} = 2(eEv_\parallel/m)^2(k/\omega_{c0}v_\perp)J_N(\rho)J_N'(\rho). \tag{44}$$

В случае обыкновенной волны в нерелятивистском приближении параметр $\rho = kv_\perp/\omega_{c0} \approx v/c \ll 1$. С использованием разложения функций Бесселя уравнение (44) упрощается. В случае основного резонанса ($N = 1$) его решение:

$$v_\perp^2(t) = v_{\perp 0}^2 - 2atv_{\perp 0}\cos\psi_{10} + (a^2/2)t^2. \tag{45}$$

Здесь $v_{\perp 0}$, Ψ_{10} — начальные значения поперечной скорости частицы и резонансной разности фаз, соответственно. Видно, что энергия частицы неограниченно растет по закону t^2. При резонансе на второй гармонике гирочастоты ($N = 2$):

$$v_\perp^2(t) = v_{\perp 0}^2\{\mathrm{ch}(\sqrt{2}kat/4\omega_{c0}) - \cos\Psi_{20}\,\mathrm{sh}(\sqrt{2}kat/4\omega_{c0})\}. \tag{46}$$

На первый взгляд кажется, что при резонансе на второй гармонике гирочастоты энергия частицы растет быстрее (по экспоненциальному закону), чем в случае основного резонанса. Однако это не так. Дело в том, что правая часть уравнения для второй гармоники в $\rho^2/8$ раз меньше, чем для основной частоты. Поэтому темп нарастания энергии на второй гармонике меньше, чем на основной частоте.

При достижении достаточно большой энергии рассматриваемое нерелятивистское приближение становится недостаточным, и необходимо пользоваться релятивистскими уравнениями движения частицы (41). В этом случае можно получить приближённое уравнение для резонансной разности фаз:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi_r}{\mathrm{d}\tau^2} \approx (N\omega_{c0}/\omega\gamma^3) g P_\parallel J_N(\rho) \cos\Psi_r. \tag{47}$$

Отсюда следует приближённый интеграл «энергии»:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \Omega^2 \sin\Psi_r \cong \mathrm{const}. \tag{48}$$

Величина

$$\Omega \cong \sqrt{(N\omega_{c0}/\omega\gamma^3) g P_\parallel J_N(\rho)}$$

определяет частоту нелинейных колебаний электрона в поле обыкновенной волны. С такой частотой происходят и колебания энергии, которые возникают вследствие расстройки резонанса из-за релятивистского изменения циклотронной частоты. Таким образом, при учёте релятивистских эффектов энергия электрона в поле обыкновенной волны при циклотронном резонансе в постоянном и однородном магнитном поле не может монотонно возрастать со временем.

б). При взаимодействии релятивистской частицы с s–й поперечной волной, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля, возможен лишь основной циклотронный резонанс (с доплеровским сдвигом $\omega_c \approx \nu_s$). В этом случае усреднённое движение частицы (39) описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} &= V_\parallel \mathbf{e}_1\,,\\
\frac{\mathrm{d}P_\parallel}{\mathrm{d}t} &= eE_{0\parallel} + (P_\perp V_\perp/2)\nabla\cdot\mathbf{e}_1 + (ek_sV_\perp/2\omega_s)\{\mathbf{e}_-\cdot\mathbf{E}_s^*\exp(i\Psi_-) + \text{к.с.}\},\\
\frac{\mathrm{d}P_\perp}{\mathrm{d}t} &= -(P_\perp V_\parallel/2)\nabla\cdot\mathbf{e}_1 + (e/2)(1 - k_sV_\parallel/\omega_s)\{\mathbf{e}_-\cdot\mathbf{E}_s^*\exp(i\Psi_-) + \text{к.с.}\},\\
\frac{\mathrm{d}\psi_-}{\mathrm{d}t} &= \omega_c - \nu_s + (V_\parallel/2)(2T_{213} - \mathbf{e}_1\cdot\mathrm{rot}\mathbf{e}_1 - (e/2iP_\perp)(1 - k_sV_\parallel/\omega_s)\times\\
&\qquad\qquad \times\{\mathbf{e}_-\cdot\mathbf{E}_s^*\exp(i\Psi_-) + \text{к.с.}\},
\end{aligned} \tag{49}$$

Здесь $E_{0\parallel}$ — продольное электростатическое поле; $\Psi_- \equiv \alpha_c - \alpha_s$ — резонансная разность фаз; величина $T_{213} \equiv e_{2i}e_{1j}\partial_j e_{3i}$. Вводя новую фазу $\Phi = \Psi_- - \phi$, где

$$\phi \equiv \int^t \mathrm{d}t'\{\omega_c - \nu_s + (V_\parallel/2)(2T_{213} - \mathbf{e}_1\mathrm{rot}\mathbf{e}_1)\},$$

можно получить формальное решение системы (49):

$$(P_\perp/\sqrt{B_0})\exp(i\Phi) = \{P_\perp(0)/\sqrt{B_0(0)}\}\exp[i\Psi_-(0)] - G(t), \tag{50}$$

где

$$G(t) = e\int^{t} \mathrm{d}t'(\nu_s/2\omega_s\sqrt{B_0})(\mathbf{e}_+\mathbf{E}_s)\exp(-i\phi). \tag{51}$$

Аргументы (0) означают соответствующие величины в начальный момент времени. Из (50) следует:

$$I_\perp \equiv P_\perp^2/B_0 = I_\perp(0) - 2\sqrt{I_\perp(0)}\Re\{G\exp[-i\Psi_-(0)]\} + |G|^2, \tag{52}$$

где $I_\perp(0) = P_\perp^2(0)/B_0(0)$. Отсюда видно, что при отсутствии ВЧ поля величина $I_\perp$ сохраняется. Это — поперечный адиабатический инвариант [1]. При наличии ВЧ поля величина $I_\perp$ не является инвариантом.

Рассмотрим простейший случай поперечных ВЧ колебаний ($\mathbf{k}_s = 0$), в которых магнитное поле $\mathbf{B}_s = 0$. Будем считать внешнее магнитное поле постоянным, а движение частицы — нерелятивистским. Положим, что поле $\mathbf{E}_0$ отсутствует. Тогда система (49) существенно упрощается. Из неё при точном циклотронном резонансе ($\omega_{c0} + \omega_s = 0$) следует уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}^2(P_\perp^2/2)}{\mathrm{d}t^2} = e^2(\mathbf{e}_-\mathbf{E}_s^*)(\mathbf{e}_+\mathbf{E}_s). \tag{53}$$

Отсюда следует, что поперечная энергия нерелятивистской частицы $W_\perp \equiv P_\perp^2/2m$ при условии точного циклотронного резонанса растёт со временем по квадратичному закону:

$$W_\perp = W_\perp(0) + t(\mathrm{d}W_\perp/\mathrm{d}t)_{t=0} + (e^2/2m)(\mathbf{e}_-\mathbf{E}_s^*)(\mathbf{e}_+\mathbf{E}_s)t^2. \tag{54}$$

Однако секулярный рост энергии ограничен из-за возрастающей роли релятивистского изменения циклотронной частоты. Это приводит к сбою резонанса и уменьшению энергии частицы. С уменьшением энергии возрастает гирочастота и уменьшается отклонение от условия резонанса, так что энергия опять начинает возрастать и т. д. Другими словами, при циклотронном резонансе в однородном магнитном поле релятивистские эффекты приводят к осцилляциям энергии частицы. Для набора энергии частицей необходимо, чтобы она постоянно находилась в резонансных условиях.

Существует особый режим движения частицы в поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль постоянного внешнего магнитного поля, в котором условие циклотронного резонанса частицы с волной является интегралом движения. Это режим циклотронного авторезонанса [8–10], в котором частица монотонно набирает энергию.

4. Параметрический резонанс

Движение заряженной частицы в ВЧ поле в условиях параметрического резонанса, по-видимому, впервые рассматривалось в работе [11]. Было показано, что в этих условиях возможен эффективный нагрев ионов плазмы. При квазипродольном распространении электромагнитной волны относительно внешнего магнитного поля параметрический резонанс отвечает соотношению между частотами: $2\omega_c \approx \nu_s$, при этом резонансной является комбинация фаз: $\psi = 2\vartheta_c \pm \vartheta_s$. Уравнения движения частицы, сглаженные по циклотронному вращению и быстрой фазе волны, а также по их нерезонансной комбинации, в общем, имеют вид (в случае $\Psi = 2\alpha_c - \alpha_s$):

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \cos\Psi + \mathbf{K}_2 \sin\Psi, \\
\frac{\mathrm{d}P_\parallel}{\mathrm{d}t} &= L_0 + L_1 \cos\Psi + L_2 \sin\Psi + L_3, \\
\frac{\mathrm{d}P_\perp}{\mathrm{d}t} &= M_0 + M_1 \cos\Psi + M_2 \sin\Psi + M_3, \\
\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} &= 2\omega_c - \nu_s + N_0 + N_1 \cos\Psi + N_2 \sin\Psi + N_3.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

При усреднении предполагалось, что черенковский и циклотронный резонансы отсутствуют. Величины $\mathbf{K}_0$, L_0, M_0 совпадают с соответствующими выражениями дрейфовой теории [1]. $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ имеют чисто релятивистское происхождение и в рассматриваемой резонансной области являются малыми. Поэтому средняя скорость частицы целиком определяется дрейфовым движением в неоднородном магнитном поле. Явные выражения других коэффициентов в системе (55), в общем, являются очень сложными. Они существенно упрощаются в пределе длинных волн ($k_s \to 0$) в случае однородного внешнего магнитного поля при отсутствии стационарного электрического поля. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{K}_0 = V_\parallel \mathbf{e}_1\,, \quad L_0 = L_1 = L_2 = L_3 = M_0 = M_3 = N_0 = 0, \\
&M_1 = -(V_\perp/4\omega_c)\{\nabla_2\Phi_1 + \nabla_3\Phi_2\} \equiv -(V_\perp/4\omega_c)G_1, \\
&M_2 = (V_\perp/4\omega_c)\{\nabla_2\Phi_2 - \nabla_3\Phi_1\} \equiv (V_\perp/4\omega_c)G_2, \\
&N_1 = 2M_2/P_\perp\,, \quad N_2 = -2M_1/P_\perp\,, \quad N_3 = -(2\omega_c/m^2\gamma^2c^2)(\beta_+ + \beta_-).
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Здесь введены обозначения:

$$
\nabla_i = \mathbf{e}_i \cdot \nabla, \quad \Phi_1 = e(E_2 \sin\varphi_2 + E_3 \cos\varphi_3), \quad \Phi_2 = e(E_2 \cos\varphi_2 - E_3 \sin\varphi_3),
$$
$$
\beta_\pm = e^2\{E_2^2 + E_3^2 \pm 2E_2E_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)\}/4(\omega_c \pm \omega)^2.
$$

ВЧ поле рассматривается в виде (7), индекс s–й волны опускается.

Как видно из формул (56), параметрический резонанс осуществляется лишь в ВЧ поле с поперечными электрическими составляющими, зависящими от поперечных координат. Возникновение резонанса обусловлено тем, что зависимость поперечных электрических компонент от «перекрёстных» поперечных координат связана с наличием слабого периодического возмущения ведущего магнитного поля [11]. В самом деле, в рассматриваемом случае квазистационарного ВЧ поля ($k_s \to 0$) из максвелловского уравнения индукции следует, что магнитная компонента в (7) является величиной первого порядка:

$$
\begin{aligned}
B_1 \cos\chi_1 &= (c/\omega)\{\nabla_2 E_3 \sin\varphi_3 - \nabla_3 E_2 \sin\varphi_2\}, \\
B_1 \sin\chi_1 &= -(c/\omega)\{\nabla_2 E_3 \cos\varphi_3 - \nabla_3 E_2 \cos\varphi_2\}.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Однако не при всякой зависимости ВЧ поля от поперечных координат параметрический резонанс возможен. Из системы (55) следует, что рассматриваемый резонанс будет отсутствовать, если коэффициенты

$$
M_1 = M_2 = 0. \tag{58}
$$

Выберем направления векторов $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, соответственно, вдоль осей x и y. Тогда условия (58) можно записать в виде уравнений Коши–Римана:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \tag{59}$$

Таким образом, если конфигурация ВЧ поля такова, что величины Φ_1, Φ_2 являются сопряжёнными гармоническими функциями, то параметрический резонанс невозможен. Например, если $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y}$, то из (58) следует, что параметрический резонанс не осуществляется при условии: $\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$. При этом возмущение магнитного поля (57) отлично от нуля. Такое ВЧ поле реализуется в резонаторе, в котором возбуждена стоячая волна типа TE_{011}. Отсутствие параметрического резонанса в этом случае отмечалось в ряде работ [12].

Согласно уравнениям (55) продольный импульс частицы можно положить равным нулю. В этом случае усреднённое движение частицы описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}\tau} &= A_1 L_1 + (\Omega/\gamma - 1/2 - n_3/2 - A_2)L_2\,, \\ \frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}\tau} &= -(\Omega/\gamma - 1/2 - n_3/2 + A_2)L_1 - A_1 L_2\,, \end{aligned} \tag{60}$$

где $A_{1,2} = g_{1,2}/4$, $\gamma = \sqrt{1 + L_1^2 + L_2^2}$, при этом переменные $L_1 = p\cos(\psi/2)$, $L_2 = p\sin(\psi/2)$. Решение системы (60) в нерелятивистском приближении ($\gamma = 1, n_3 = 0$) ищется в виде $\exp(\lambda t)$. В результате получаем:

$$\lambda = \omega\sqrt{A_1^2 + A_2^2 - (\Omega - 1/2)^2}\,.$$

Отсюда следует, что область неустойчивости, в которой энергия частицы возрастает по экспоненциальному закону, определяется неравенствами:

$$\Omega - \sqrt{A_1^2 + A_2^2} < 1/2 < \Omega + \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\,.$$

Возможность экспоненциального увеличения энергии частицы при параметрическом резонансе рассматривалась как один из способов нагрева плазмы в магнитных ловушках [11, 12].

При достижении достаточно больших энергий становятся существенными релятивистские эффекты. В этом случае система (60) описывает нелинейные колебания вследствие зависимости циклотронной частоты от энергии частицы. В нелинейной колебательной системе возможны устойчивые режимы стационарных колебаний [3]. В этом случае можно получить соотношение между стационарным поперечным импульсом и частотой ВЧ поля:

$$p^2 = \{(2\Omega)^2 - (1 + n_3 \pm h)^2\}/(1 + n_3 \pm h)^2,$$

где $h = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Зависимость $p^2 = p^2(\omega)$ определяет резонансную кривую [3].

Таким образом, в нерелятивистском приближении в области параметрического резонанса происходит увеличение энергии частицы по экспоненциальному закону, тогда как в релятивистском случае, как и при циклотронном резонансе, возникают колебания энергии. Следует отметить, что нерелятивистское приближение вполне адекватно для описания параметрического резонанса ионов и очень ограничено в случае электронов.

5. Полуциклотронные резонансы

Среди различных типов нелинейных резонансов, квадратичных по амплитуде волны, имеются резонансы, которые, в общем, определяются условием:

$$2(\omega - k_z v_z) = n\omega_c, \tag{61}$$

где число $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Резонансы такого типа называются полуциклотронными. Полуциклотронные резонансы впервые наблюдались в спутниковых измерениях, в которых было обнаружено сильное излучение волн вблизи половины электронной гирочастоты. Механизм нелинейного взаимодействия частиц с волной конечной амплитуды при условиях (61) обсуждался в работах [13,14], где была показана возможность нагрева плазмы в магнитных системах электромагнитной или электростатической (ионной бернштейновской) волнами. Теоретическое описание в указанных работах основывалось на нерелятивистских уравнениях движения заряженных частиц плазмы. При этом ВЧ волна считалась плоской, а внешнее магнитное поле – стационарным и однородным. Между тем пренебрежение релятивизмом в циклотронных явлениях не всегда оправдано, поскольку даже слабые релятивистские эффекты при определенных условиях могут привести к коренному изменению характера резонансного взаимодействия волна–частица. Кроме того, в реальных ситуациях волна не всегда может считаться плоской. В работе [15] была развита последовательная релятивистская кинетическая теория взаимодействия заряженных частиц замагниченной плазмы с ВЧ волновыми пакетами в области нелинейных резонансов (61). В качестве примера была рассмотрена возможность полуциклотронного поглощения обыкновенной волны, распространяющейся поперек внешнего магнитного поля.

Электромагнитные поля, как в (1), разделяются на две части, где:

$$\mathbf{E}_{\sim}(\mathbf{r}, t \parallel \vartheta) = \sum_{1 \leqslant s \leqslant M} \mathbf{E}_s \exp(i\vartheta_s) + \\ + \sum_{1 \leqslant s_1,\, s_2 \leqslant M} \sum_{m_1, m_2} \mathbf{E}_{s_1 s_2}^{(m_1, m_2)} \exp[i(m_1\vartheta_{s_1} + m_2\vartheta_{s_2})] + \text{к.с.} \tag{62}$$

Выражение для поля $\mathbf{B}_{\sim}(\mathbf{r}, t \parallel \vartheta)$ имеет аналогичный вид с заменой медленно меняющихся комплексных амплитуд $\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_{s_1 s_2}^{m_1, m_2}(\mathbf{r}, t)$, соответственно, на $\mathbf{B}_s(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}_{s_1 s_2}^{m_1, m_2}(\mathbf{r}, t)$, M — число рассматриваемых волновых пакетов, m_1, m_2 — некоторые простые целые числа. Быстрые фазы (эйконалы) $\vartheta_s(\mathbf{r}, t)$ описываются уравнениями (8). Вторые суммы в (62) описывают возможность генерации гармоник и комбинационных частот, при этом считается $|\mathbf{E}_s| \gg |\mathbf{E}_{s_1 s_2}^{m_1, m_2}| \gg \ldots$. Будем предполагать, что выполняются условия дрейфового приближения в случае «слабого» электрического поля и условия геометрической оптики (18). Выделяя циклотронное вращение частицы по формулам (2) и переходя от фаз ϑ_s к вспомогательным фазам ψ_s согласно (28), запишем релятивистское кинетическое уравнение Власова для функции распределения $f(t, x, \psi)$ в виде:

$$-(\nu, \partial f/\partial \psi) = \mu\{\partial f/\partial t + (a, \partial f/\partial x) + (A, \partial f/\partial \psi) + (A_R, \partial f/\partial \psi_R)\}. \tag{63}$$

Здесь: $x = (\mathbf{r}, p_{1\parallel}, p_{1\perp})$ — вектор медленных переменных, $\psi = (\psi_c, \psi_1, \ldots, \psi_M)$ — вектор быстрых переменных (фаз), $\nu = (\omega_c, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_M)$ — вектор частот, символ (a, b) означает скалярное произведение векторов a и b, $\psi_R = 2\psi_1 + n\psi_c$ — резонансная комбинация фаз, ψ_1 — фаза одного из M волновых пакетов (62), векторы $a = (\mathbf{v}, a_\parallel, a_\perp)$, $A = (A_c, \ldots, A_M)$, $A_R = n(A_c + \omega_c) + 2(A_1 + \nu_1)$. Величины $a_\parallel$, $a_\perp$, A_c, $\ldots$, A_M имеют довольно громоздкий вид. Наличие быстрых фаз в кинетическом уравнении позволяет перейти к сглаженному описанию движения частиц с помощью усреднения (интегрирования) по этим фазам. Как отмечалось, в нулевом приближении разложения по малому параметру возможны черенковский и циклотронный резонансы, а также резонансы на гармониках гирочастоты. Нелинейные резонансы (61) возникают в первом приближении. Будем предполагать, что все возможные резонансы нулевого и первого приближений не перекрываются с резонансами (61), которые, в свою очередь не перекрываются между собой.

Представим функцию распределения в виде разложения по малому параметру:

$$f(t,x,\psi) = f^0(t,x,\psi) + \mu f^1(t,x,\psi) + \dots . \tag{64}$$

В каждом приближении функция распределения разделяется на «медленную» часть, не зависящую от быстрых фаз ψ, и быстро осциллирующую составляющую: $f^i = \bar{f}^i + f^i_\sim$. Проводя усреднение, из (63), получаем упрощенное уравнение для сглаженной части функции распределения $\bar{f}$ с учетом членов первого порядка, которое можно представить в виде:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\nabla\bar{f} + \frac{\mathrm{d}p_\parallel}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\bar{f}}{\partial p_\parallel} + \frac{\mathrm{d}p_\perp}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\bar{f}}{\partial p_\perp} + \frac{\mathrm{d}\psi_R}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\psi_R} = 0. \tag{65}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{v}_{Dr} + v_\parallel \mathbf{e}_1\,,\\
\frac{\mathrm{d}p_\parallel}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\mathrm{d}p_\parallel}{\mathrm{d}t}\right)_{Dr} + \left(\frac{\mathrm{d}p_\parallel}{\mathrm{d}t}\right)_R\,,\\
\frac{\mathrm{d}p_\perp}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\mathrm{d}p_\perp}{\mathrm{d}t}\right)_{Dr} + \left(\frac{\mathrm{d}p_\perp}{\mathrm{d}t}\right)_R\,,\\
\frac{\mathrm{d}\psi_R}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\mathrm{d}\psi_R}{\mathrm{d}t}\right)_{Dr} + \left(\frac{\mathrm{d}\psi_R}{\mathrm{d}t}\right)_R\,.
\end{aligned} \tag{66}$$

Члены вида $(\dots)_{Dr}$ представляют собой известные выражения дрейфовой теории [1, 5]. Члены $(\dots)_R$ связаны с резонансным взаимодействием частицы с ВЧ волной:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}p_\parallel}{\mathrm{d}t}\right)_R &= \left(D^\parallel_\alpha E^{(11)}_{11\alpha} + D^\parallel_{\alpha\beta}E_{1\alpha}E_{1\beta}\right)\exp(i\psi_R) + \text{к.с.}\,,\\
\left(\frac{\mathrm{d}p_\perp}{\mathrm{d}t}\right)_R &= \left(D^\perp_\alpha E^{(11)}_{11\alpha} + D^\perp_{\alpha\beta}E_{1\alpha}E_{1\beta}\right)\exp(i\psi_R) + \text{к.с.}\,,\\
\left(\frac{\mathrm{d}\psi_R}{\mathrm{d}t}\right)_R &= \omega_R + \left(D_\alpha E^{(11)}_{11\alpha} + D_{\alpha\beta}E_{1\alpha}E_{1\beta}\right)\exp(i\psi_R) + \text{к.с.}
\end{aligned} \tag{67}$$

Векторы $D^\parallel_\alpha$, $D^\perp_\alpha$, D_α и тензоры $D^\parallel_{\alpha\beta}$, $D^\perp_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$ имеют очень сложный вид.

Система (66) описывает движение отдельной заряженной частицы в области полуциклотронных резонансов (61). Из этих уравнений следует, что рассматриваемые резонансы обусловлены не только отдельной волной $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)\exp(i\vartheta_1)$, но, в общем, также и нелинейной волной, генерируемой в плазме на второй гармонике $\mathbf{E}_{11} = \mathbf{E}^{(11)}_{11}(\mathbf{r},t)\exp(2i\vartheta_1)$. Уравнение (65) с характеристиками (66) совместно с уравнениями Максвелла составляет искомую полную систему для описания взаимодействия волна–частица в области резонансов (61).

В общем, система (66) чрезвычайно сложна и содержит в себе большое количество разнообразных частных случаев. Рассмотрим в качестве примера задачу о полуциклотронном затухании обыкновенной волны, распространяющейся перпендикулярно ведущему магнитному полю. Известно, что циклотронное поглощение такой волны целиком обусловлено эффектами релятивизма [16]. Это имеет место и в случае полуциклотронного поглощения. Для простоты, так же как в [13], будем считать волну плоской, а плазму и внешнее магнитное поле — однородным. Зададим обыкновенную электромагнитную волну в виде:

$$\mathbf{E} = \Re \mathbf{e}_1 E_0 \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \alpha)], \quad \mathbf{B} = (c/\omega)[\mathbf{kE}], \tag{68}$$

где $E_0(\mathbf{r}, t)$ — амплитуда, α — начальная фаза, $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (0, 0, 1)$ — вектор поляризации. Изменение средней кинетической энергии, поглощаемой резонансными частицами в единице объема плазмы, определим по формуле:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} \right\rangle = mc^2 \int (\partial f/\partial t)(\gamma - 1) p_\perp \,\mathrm{d}p_\perp \,\mathrm{d}p_\parallel \,\mathrm{d}\psi_c (\mathrm{d}\psi_1/2\pi)(\mathrm{d}\psi_R/2\pi). \tag{69}$$

Используем закон сохранения энергии

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}t + \mathrm{d}K/\mathrm{d}t = 0, \tag{70}$$

где W — среднее значение плотности энергии электромагнитного поля в плазме:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial\omega} (\omega e_i^* \Lambda_{ij} e_j) E_0^2(t), \\ \Lambda_{ij} &= (c^2 k^2/\omega^2)[(k_i k_j / k^2) - \delta_{ij}] + \varepsilon_{ij}^H \,, \end{aligned} \tag{71}$$

ε_{ij}^H — эрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости плазмы. В случае релятивистского максвелловского распределения частиц плазмы уравнение (70) можно представить в виде:

$$\mathrm{d}E_0^2/\mathrm{d}t = -2\kappa E_0^4 / E_0^2(0), \tag{72}$$

где $E_0(0) \equiv E_0(t = 0)$. Отсюда следует, что коэффициент κ определяет затухание волны:

$$E_0^2(t) = E_0^2(0)/(1 + 2\kappa t). \tag{73}$$

В случае слабого релятивизма:

$$\begin{aligned} \kappa = -\frac{1}{4}\sqrt{\pi/2}(\omega_p/\omega)^2 v_{E0}^2 (n\omega_{c0}/mc^2)\beta^{5/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega e_i^* \Lambda_{ij} e_j) \right\}^{-1} \times \\ \times \exp\{-\beta[(n\omega_{c0}/2\omega) - 1]\} \in t\mathrm{d}p_{\parallel 0} F^{(p_{\perp 0})} \{(mc)^2[(n\omega_{c0}/2\omega)^2 - 1] - p_{\parallel 0}^2\} \times \\ \times \{[(n\omega_{c0}/2\omega) - 1](\partial F^{(p_{\perp 0})}/\partial p_{\perp 0}) + (2\omega/n\omega_{c0})(p_{\perp 0} F^{(p_{\perp 0})}/m^2 c^2)\}, \end{aligned} \tag{74}$$

где $v_{E0} = eE_0(0)/m\omega$ — начальная скорость частицы в поле волны, ω_p — плазменная частота, параметр $\beta = mc^2/T$ (T — кинетическая температура). Из (74) видно, что в приближении нерелятивистской плазмы ($\beta \to \infty$, $n\omega_{c0}/2\omega \to 1$) полуциклотронное поглощение обыкновенной волны отсутствует ($\kappa = 0$).

В случае главного полуциклотронного резонанса ($n = 1$) в слаборелятивистском приближении коэффициент затухания описывается формулой:

$$\kappa = 3\sqrt{\pi} N^2 \omega (v_{E0}/c)^2 (c/v_{Te})^5 \delta^{3/2} \exp(-\beta\delta), \tag{75}$$

где $N = kc/\omega$ — показатель преломления, $v_{Te} = (T/m)^{1/2}$ — тепловая скорость электронов, $\delta = \omega_{c0}/2\omega - 1$ — резонансная расстройка частот. Отметим, что при частотах $\omega > \omega_{c0}/2$ поглощение волн отсутствует. Это связано с общим условием существования резонансов (61). Из полученной формулы следует, что максимальное поглощение волны соответствует расстройке $\delta \cong 3/2\beta$. Зависимость коэффициента поглощения от плотности плазмы определяется показателем преломления.

6. Заключение

На основе общей теории по методу усреднения Боголюбова рассмотрены задачи о движении заряженной частицы в области циклотронного, параметрического и полуциклотронного резонансов, представляющие интерес для ВЧ нагрева плазмы в магнитных ловушках. Полученные решения согласуются с известными результатами. Показано, что в резонансных условиях важным является последовательный учет релятивистских эффектов, которые существенно изменяют характер резонансного взаимодействия волна–частица. Особое значение усредненных уравнений движения состоит в том, что они определяют характеристики сглаженного кинетического уравнения. Этот факт был использован в задаче о поглощении обыкновенной волны в области полуциклотронных резонансов.

Литература

1. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.* Движение заряженных частиц в электромагнитных полях // Вопросы теории плазмы / под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Госатомиздат, 1963. — Т. 2. — С. 177–261. [Morozov A.I. and Solov'ev L.S. Motion of the Charged Particles in Electromagnetic Fields // Problems of Plasma Physics. Vol. 2 / ed. by M.A. Leontovich. — Moscow: Gosatomizdat, 1963. — P. 177–261]
2. *Бернштейн А., Фридленд Л.* Геометрическая оптика нестационарной и неоднородной плазмы // Основы физики плазмы / под ред. А. А. Галеева и Р. Судана. — М.: Госатомиздат, 1983. — Т. 1. — С. 393–443. [Bernstein I., Friedland L. Geometrical Optics of Nonstationary and Nonuniform Plasmas // Fundamentals of Plasma Physics. Vol. 1 / ed. by A.A. Galeev, R. Sudan. — Moscow: Gosatomizdat, 1983. — P. 393–443]
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. [Bogoliubov N. N., Mitropolsky Yu. A. Asymptotical Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. — Moscow: Nauka, 1974]
4. *Милантьев В. П.* Теория взаимодействия резонансных частиц замагниченной плазмы с ВЧ волновыми пакетами // ЖЭТФ. — 1983. — Т. 85, № 1(7). — С. 132–140. [Milant'ev V.P. Theory of Interaction Resonant Particles of Magnetized Plasmas with HF Wave Packets // JETPh. — 1983. — Vol. 85, No 1(7). — P. 132–140]
5. *Милантьев В. П.* Дрейфовая теория движения заряженных частиц. — М.: УДН, 1987. — 80 с. [Milant'ev V.P. Drift Theory of Motion of the Charged Particles. — Moscow: PFU, 1987]
6. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* Нелинейная теория плазмы // Вопросы теории плазмы / под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1973. — 7. — С. 3–145. [Galeev A.A., Sagdeev R.Z. Nonlinear Plasma Theory // Problems of Plasma Physics, No 7 / ed. by M.A. Leontovich. — Moscow: Atomizdat, 1973. — P. 3–145]
7. *Звонков В. В., Тимофеев А. В.* Влияние релятивизма на образование плещущихся электронов при циклотронном нагреве // Физика плазмы. — 1986. — Т. 12. — С. 413. [Zvonkov V. V., Timofeev A. V. Influence of Relativism on the Creation of Splashing Electrons at Cyclotron Heating // Physics of Plasma. — 1986. — Vol. 12. — P. 413]
8. *Коломенский А. А., Лебедев А. Н.* Резонансные явления при движении частиц в плоской электромагнитной волне // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 44, № 1. —

С. 261–269. [Kolomensky A. A., Lebedev A. N. Resonant Phenomena at Motion of Particles in the Plane Electromagnetic Wave // JETPh. — 1963. — Vol. 44, No 1. — P. 261–269]
9. *Давыдовский В. Я.* О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43, № 3(9). — С. 886–888. [Davydovsky V. Ya. On the Possibility of Resonant Acceleration of Charged Particles by Electromagnetic Waves in the Constant Magnetic Field // JETPh. — 1962. — Vol. 43, No 3(9). — P. 886–888]
10. *Милантьев В. П.* Явление циклотронного авторезонанса и его применения // УФН. — 1997. — Т. 167, № 1. — С. 3–16. [Milant'ev V. P. Cyclotron Autoresonance and its Applications // UFN. — 1997. — Vol. 167, No 1. — P. 3–16]
11. *Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З.* О высокочастотном нагреве плазмы // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / под ред. отв. редактор М. А. Леонтович. — М.: Изд. АН СССР, 1958. — Т. 3. — С. 153–164. [Rudakov L. I., Sagdeev R. Z. On the High-Frequency Heating of Plasma // Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions. AS of USSR. Vol. 3 / ed. by M. A Leontovich. — Moscow: AN USSR, 1958. — P. 153–164]
12. *Golovanivsky K. S., Punithavelu A. M., Rubtsov V. B.* On the Theory of Plasma Motion at the Conditions of Parametric Resonance // Plasma Phys. — 1977. — Vol. 19. — Pp. 1–14.
13. *Киценко А. Б., Панкратов И. М., Степанов К. Н.* Нелинейный циклотронный резонанс в плазме // ЖЭТФ. — 1974. — Т. 67. — С. 1728. [Kitsenko A B., Pankratov I. M., Stepanov K. N. Nonlinear Cyclotron Resonance in Plasma // JETPh. — 1974. — Vol. 67. —P. 1728]
14. *Schmitt J. P., Lapierre Y.* Resonant Wave–Particle Interaction at the Half-Integer Cyclotron Harmonics // J. Plasma Phys. — 1978. — Vol. 20. — Pp. 95–105.
15. *Гончаров А. В., Милантьев В. П.* Релятивистская теория полуциклотронных резонансов в бесстолкновительной плазме // Физика плазмы. — 1991. — Т. 17, № 1. — С. 47. [Goncharov A. V., Milant'ev V. P. Relativistic Theory of the Half–Cyclotron Resonances in the Collisionless Plasma // Physics of Plasma. — 1991. — Vol. 17, No 1. — P. 47]
16. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы. — М.: Высшая школа, 1978. — 407 с. [Aleksandrov A. F., Bogdankevich L. S., Rukhadze A. A. Fundamentals of Electrodynamics of Plasma. — Moscow: High school, 1978]

UDC 533.932

On the Relativistic Theory of Motion of the Charged Particle at the Resonant Conditions

V. P. Milant'ev

Department of Experimental Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

General relativistic theory of motion of the charged particles in the electromagnetic waves at the resonant conditions in the drift-eikonal approximation is presented. The motion of the particle in the vicinity of cyclotron, parametric and half-cyclotron resonances is considered.

Key words and phrases: charged particle, relativistic motion, cyclotron and parametric resonances, half-cyclotron resonance.