УДК 517.9

Достаточные условия существования единственного периодического решения для одномерных дифференциальных уравнений второго порядка

Ф. А. Белоусов

Лаборатория экспериментальной экономики
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Центральный экономико-математический институт РАН
Нахимовский пр., д. 47, Москва, 117418, Россия

В работе получены достаточные условия существования единственных периодических решений для одномерных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Цель работы не только в получении таких результатов, но и в демонстрации нового подхода, который может быть применён к более широкому классу дифференциальных уравнений, т.е. могут быть рассмотрены дифференциальные уравнения не только второго, но и более высоких порядков.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, периодические решения, существование и единственность периодических решений.

1. Введение. Постановка задачи

В работе будут изучаться одномерные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = f_0(t, x, \dot{x}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $f_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ — ω-периодическая по времени функция, для коэффициентов $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $a_1 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $a_1^2 - 4a_0 > 0$.

Также отдельно будут рассмотрены уравнения следующих двух видов

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = f_1(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = f_2(t, \dot{x}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $f_1(\cdot,\cdot), f_2(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ — ω-периодические по времени функции, для коэффициентов $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $a_1 \in \mathbb{R}$ также справедливо неравенство $a_1^2 - 4a_0 > 0$. Кроме этого, для функций $f_0(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f_1(\cdot,\cdot)$ и $f_2(\cdot,\cdot)$ выполняются условия Липшица с константами $l_1 > 0$ и $l_2 > 0$:

$$|f_0(t,x_1,y_1) - f_0(t,x_2,y_2)| \leqslant l_1|x_1-x_2| + l_2|y_1-y_2|, \text{ для любых } x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$|f_1(t,x_1) - f_1(t,x_2)| \leqslant l_1|x_1 - x_2|, \quad \text{для любых } x_1,x_2 \in \mathbb{R} \text{ и } t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$|f_2(t,x_1) - f_2(t,x_2)| \leqslant l_2|x_1 - x_2|, \quad \text{для любых } x_1,x_2 \in \mathbb{R} \text{ и } t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Данная статья посвящена изучению условий, которые необходимо наложить на a_0, a_1 и функцию $f_0(\cdot,\cdot,\cdot)$ (в частности $f_1(\cdot,\cdot)$ или $f_2(\cdot,\cdot)$), чтобы для уравнения (1) ((2) или (3)) обеспечить существование единственного ω-периодического решения из класса непрерывно-дифференцируемых функций.

Изучение схожих классов уравнений можно также найти в книге В. Н. Розенвассера [1]. Кроме этого, подобные классы уравнений изучались в диссертации [2], сделанной под руководством А. И. Перова. Однако в этой диссертации были получены условия существования единственного периодического решения относительно класса обобщённых функций из пространства L_2, тогда как полученные здесь

Статья поступила в редакцию 2 ноября 2012 г.
Работа выполнена при финансовой потдержке РФФИ (№12-01-00768-а).

условия гарантируют существование единственного периодического решения из класса непрерывно-дифференцируемых функций.

В отличие от работ [1, 2], основной идеей этой статьи является сведение одномерного дифференциального уравнения n-го порядка к n-мерному первого порядка и использование некоторых результатов работы [3].

2. Некоторые свойства периодических решений n-мерных дифференциальных уравнений первого порядка

2.1. Пространство периодических решений и оператор периодических решений

В этом разделе будут рассмотрены уравнения вида

$$\dot{z}(t) = Az + \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

где A — (n,n)-матрица, все собственные значения которой λ_i, $i = \overline{1,n}$ принадлежат пространству $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и размерности всех жордановых клеток при диагонализации равны 1, $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ — ω-периодическая функция.

В силу спектральных свойств матрицы A, из работы [3] известно, что для любой ω-периодической функции $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R})$ уравнение (7) имеет единственное ω-периодическое решение $z(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R})$. В таком случае можно ввести некоторый оператор $\mathbb{P}$, который каждой ω-периодической функции $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R})$ ставит в соответствие единственное ω-периодическое решение $z(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R})$. Как и в работе [3], назовем такой оператор $\mathbb{P}$ оператором периодических решений. Очевидно, этот оператор является линейным. В этом разделе будет дана оценка нормы этого оператора, действующего из вводимого ниже подпространства.

Поскольку в этой работе мы имеем дело исключительно с периодическими функциями, введём в рассмотрение следующие пространства

$$\mathbb{C}_\omega^{(0),n} = \{z(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}([0,\omega];\mathbb{R}^n)| \quad z(0) = z(\omega)\}$$

$$\mathbb{C}_\omega^{(1),n} = \{z(\cdot) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\omega];\mathbb{R}^n)| \quad z(0) = z(\omega), \quad \dot{z}(0) = \dot{z}(\omega)\}.$$

Норму в этих пространствах определим такую же как в $\mathbb{C}^{(0)}([0,\omega];\mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{C}^{(1)}([0,\omega];\mathbb{R}^n)$ соответственно, т.е.

$$\|z(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \max_{t\in[0,\omega]} \|z(t)\|_{\mathbb{R}^n},$$

$$\|z(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(1),n}} = \max\left\{\max_{t\in[0,\omega]} \|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}, \max_{t\in[0,\omega]} \|\dot{z}(t)\|_{\mathbb{R}^n}\right\}.$$

При этом норма $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ определяется по формуле

$$\|z\|_{\mathbb{R}^n} = |z_1| + m_2|z_2| + m_3|z_3| + \cdots + m_n|z_n|, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

где $m_1 = 1$, $m_k > 0$, $k \in \{2,3,\ldots,n\}$ — весовые параметры. В случае $n = 1$ эта норма будет совпадать с классической нормой $\|z\|_{\mathbb{R}} = |z|$. Очевидно, пространства $\mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ и $\mathbb{C}_\omega^{(1),n}$ являются банаховыми относительно введённых норм.

Таким образом, будем подразумевать, что оператор $\mathbb{P}$ действует из пространства $\mathbb{C}_\omega^{(0),n}$ в пространство $\mathbb{C}_\omega^{(1),n}$. Однако, в силу вложения $\mathbb{C}_\omega^{(1),n} \subset \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$, в дальнейшем будем считать, что $\mathbb{P} : \mathbb{C}_\omega^{(0),n} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),n}$.

Так как ниже будем приводить одномерное дифференциальное уравнение n-го порядка к n-мерному уравнению первого порядка (в нашем случае $n = 2$), в качестве функции $\varphi(\cdot)$ в уравнении (7) нас будет интересовать не произвольные функции из класса $\mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}$, а функции следующего вида

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix},$$

где $\varphi_n(\cdot) \in \mathbb{C}_{\omega}^{(0),1}(\mathbb{R})$. Определим подпространство таких функций формально, обозначив его через $\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}$.

$$\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n} = \left\{\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}_{\omega}^{(0),n} | \varphi_i(\cdot) \equiv 0, \quad i = \overline{1,(n-1)}, \quad \varphi_n(\cdot) \in \mathbb{C}_{\omega}^{(0),1}\right\}.$$

2.2. Оценка нормы оператора периодических решений

Нас будет интересовать норма оператора $\mathbb{P}$, индуцируемого уравнением (7), который действует из подпространства $\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}$ во все пространство $\mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}$. Другими словами, попытаемся оценить значение следующей величины $\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}}\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}}$.

В работе [3] было найдено значение нормы оператора $\mathbb{P}$ относительно пространства $\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}$ в случае, когда вместо матрицы A в уравнении (7) стояла некоторая константа $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, а именно, было получено, что $\|\mathbb{P}\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}} = 1/|a|$. В одномерном случая этот результат также был получен в книге [1, с. 110].

Рассмотрим одномерное уравнение.

$$\dot{x}(t) = ax + \phi(t), \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \phi(\cdot) - \omega - \text{периодическая}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

Сформулируем результат, полученный в работах [3] и [1] в одномерном варианте, в виде следующей леммы.

Лемма 1 (см. [3], [1]). *Пусть функция $\varphi(\cdot)$ в уравнении (9) принадлежит пространству $\mathbb{C}_{\omega}^{(0),1}$. Тогда уравнение (9) индуцирует оператор периодических решений $\mathbb{P}_a$, норма которого равна*

$$\|\mathbb{P}_a\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),1}} = \frac{1}{|a|}.$$

Причём, при $\varphi(\cdot) \equiv 1$ справедливо $\|\mathbb{P}_a\varphi(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),1}} = \|\mathbb{P}_a\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),1}} = \frac{1}{|a|}$.

Вернёмся к рассмотрению уравнения (7). Подставляя в это уравнение вместо функции $\varphi(\cdot)$ из пространства $\mathbb{C}_{\omega}^{(0),n}$ функцию из подпространства $\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}$, а также учитывая спектральные свойства матрицы A, уравнение (7) можно переписать в ином виде, т.е. существует некоторая матрица $Q = \{q_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ (каждый столбец матрицы Q^{-1} является собственным вектором матрицы A), такая, что QAQ^{-1} окажется диагональной матрицей, причём на диагонали будут находиться собственные значения исходной A. Тогда, делая замену $\widetilde{z}(t) = Qz(t)$ и учитывая, что $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}$, уравнение (7) примет вид

$$\dot{\widetilde{z}}(t) = \Lambda\widetilde{z} + q_n\varphi_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $\Lambda = QAQ^{-1} = \mathrm{diag}\left(\{\lambda_i\}_{i=1}^n\right)$ — диагональная (n,n)-матрица, $q_n\varphi_n(t) = Q\varphi(t)$, здесь q_n — последний столбец матрицы Q, а $\varphi_n(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),1}$ — функция, являющаяся n-ой координатой $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}$.

Видно, что после воздействия матрицей Q подпространство $\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}$ будет обладать иной конструкцией. В новых координатах обозначим это подпространство через $\widetilde{\mathbb{C}}_{\omega,n}^{(0),n}$ и опишем его формально

$$\widetilde{\mathbb{C}}_{\omega,n}^{(0),n} = \left\{\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),n} | \varphi_i(\cdot) \equiv q_{i,n}\psi(\cdot), \quad i = \overline{1,n}, \quad \psi(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),1}\right\}.$$

Очевидно, если $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}$, то $Q\varphi(\cdot)$ будет принадлежать $\widetilde{\mathbb{C}}_{\omega,n}^{(0),n}$.

Отметим также, что дифференциальное уравнение (10) индуцирует новый оператор периодических решений $\widetilde{\mathbb{P}}$, который связан с $\mathbb{P}$ соотношением $\mathbb{P} = Q^{-1}\widetilde{\mathbb{P}}Q$. Тогда для нормы $\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}$ справедлива следующая цепочка неравенств

$$\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} \leqslant \|Q^{-1}\|_{\mathbb{R}^n}\|\widetilde{\mathbb{P}}Q|_{\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \|Q^{-1}\|_{\mathbb{R}^n}\|\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{C}}_{\omega,n}^{(0),n}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}.$$

Таким образом, задачу оценки $\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}$ можно свести к задаче оценки норм $\|Q^{-1}\|_{\mathbb{R}^n}$ и $\|\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{C}}_{\omega,n}^{(0),n}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}} = \|\widetilde{\mathbb{P}}Q|_{\mathbb{C}_{\omega,n}^{(0),n}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}$.

Решим сперва первую задачу. Задача нахождения нормы в $\mathbb{R}^n$, определённой по правилу (8), матрицы Q^{-1} эквивалентна решению следующей оптимизационной задачи.

$$\|Q^{-1}\xi\|_{\mathbb{R}^n} \to \max_\xi,$$

при условии $\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} = |\xi_1| + m_2|\xi_2| + ... + m_n|\xi_n| = 1$.

Решим эту задачу с помощью геометрических соображений. Нетрудно убедиться, что множество точек, для которых выполнено $\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} = 1$, являются $2n$-угольником в пространстве $\mathbb{R}^n$. При этом, координаты вершин этого $2n$-угольника $\{\xi^k\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ описываются следующим образом

$$\xi_i^{2k-1} = \begin{cases} \frac{1}{m_k}, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \xi_i^{2k} = \begin{cases} -\frac{1}{m_k}, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad i, k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{11}$$

Обозначим множество таких вершин через $M = \{\xi^k\}_{k=1}^{2n}$. Аналогично, в силу невырожденности матрицы Q^{-1}, каждая линия уровня $\{\xi \in \mathbb{R}^n | \quad \|Q^{-1}\xi\|_{\mathbb{R}^n} = c\}$, соответствующая некоторой положительной константе c, представляют собой $2n$-угольник. Причём при увеличении c происходит параллельный сдвиг всех сторон этого $2n$-угольника в сторону увеличения его объёма. Тогда, из приведённых рассуждений, легко заключить, что максимальное значение c, при котором выполнено $\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} = 1$, будет достигаться в одной или нескольких точках множества M. Сформулируем этот результат в виде леммы.

Лемма 2. *Норма, определённая соотношением (8), матрицы Q^{-1} может быть найдена по следующему правилу*

$$\|Q^{-1}\|_{\mathbb{R}^n} = \max_{\xi \in M}\|Q^{-1}\xi\|_{\mathbb{R}^n}, \quad M = \{\xi^k\}_{k=1}^{2n},$$

где координаты точек $\xi^k \in \mathbb{R}^n$ множества M определяются формулой (11).

Теперь найдём норму $\|\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{C}}_{\omega,n}^{(0),n}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),n}}$. Для этого рассмотрим каждое из n уравнений преобразованного уравнения (7) в отдельности

$$\dot{\widetilde{z}}_i(t) = \lambda_i \widetilde{z}_i + q_{i,n}\varphi_n(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in [0,\omega]. \tag{12}$$

Из леммы 1 известно, что максимальное по норме решение каждого из таких уравнений при $\|\varphi_n(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_\omega} = 1$ будет достигаться, в частности, при $\varphi_n(\cdot) \equiv 1$. При этом максимальное значение нормы будет составлять $\|\widetilde{z}_i(\cdot)\|_{\mathbb{C}^{(0),1}_\omega} = |q_{i,n}/\lambda_i|$, $i = \overline{1,n}$. Следовательно, при $\varphi(\cdot) \equiv q_n$ норма каждой из компонент $\widetilde{z}_i(\cdot)$ решения уравнения (7) будет достигать максимальных значений. Из этого немедленно вытекает, что норма оператора $\widetilde{\mathbb{P}}$ будет реализовываться при $\varphi(\cdot) \equiv q_n$, т.е. $\|\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{C}}^{(0),n}_{\omega,n}}\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_\omega} = \|\widetilde{\mathbb{P}} q_n\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_\omega}$.

Подытоживая вышеприведенные рассуждения, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Если все собственные значения λ_i, $i = \overline{1,n}$ матрицы A уравнения (7) принадлежат пространству $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и размерности всех жордановых клеток при диагонализации равны 1, то это уравнение индуцирует оператор периодических решений $\mathbb{P}$, для нормы $\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,n}}\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_\omega}$ которого справедлива следующая оценка*

$$\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,n}}\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_\omega} \leqslant \|Q^{-1}\|_{\mathbb{R}^n} \|\widetilde{\mathbb{P}}|_{\widetilde{\mathbb{C}}^{(0),n}_{\omega,n}}\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_\omega} = \|Q^{-1}\|_{\mathbb{R}^n} \|\widetilde{\mathbb{P}} q_n\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_\omega} = \\ = \|Q^{-1}\|_{\mathbb{R}^n} \left(\left|\frac{q_{1,n}}{\lambda_1}\right| + m_2 \left|\frac{q_{2,n}}{\lambda_2}\right| + \dots + m_n \left|\frac{q_{n,n}}{\lambda_n}\right| \right),$$

где матрица Q такая, что $QAQ^{-1} = \operatorname{diag}\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, q_n — последний столбец матрицы Q.

3. Сведение одномерного уравнения второго порядка к двумерному первого порядка

Рассмотрим уравнение следующего вида

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = \psi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\psi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}$ — ω-периодическая функция, для коэффициентов $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $a_1 \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $a_1^2 - 4a_0 > 0$. Будем искать ω-периодические решения такого уравнения $x(\cdot)$ из класса $\mathbb{C}^{(1)}$. Как это было сделано в предыдущем разделе, сведём это уравнение к двумерному уравнению первого порядка и перейдём к пространствам $\mathbb{C}^{(0),1}_\omega$, $\mathbb{C}^{(1),2}_\omega$. Получим

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha y \\ \dot{y}(t) = -\frac{a_0}{\alpha} x - a_1 y + \frac{1}{\alpha}\psi(t), \end{cases}$$

здесь $\psi(\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),1}_\omega$, $t \in [0,\omega]$, $\alpha > 0$ — некоторый параметр. Будем искать решение $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))'$ из пространства $\mathbb{C}^{(1),2}_\omega$. В матричном виде это уравнение примет вид

$$\dot{z}(t) = Az + \varphi(t), \quad t \in [0,\omega], \tag{13}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\frac{a_0}{\alpha} & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha}\psi(\cdot) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Очевидно, матрица A не вырождена ($\det A = a_0 \neq 0$). Изучим спектральные свойства такой матрицы, для этого найдём её собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}. \tag{15}$$

В силу того, что для параметров a_0 и a_1 выполнено неравенство $a_1^2 - 4a_0 > 0$, рассматриваемая матрица имеет два различных собственных значения λ_1 и λ_2 из $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, следовательно существует матрица Q такая, что QAQ^{-1} будет диагональной матрицей с λ_1 и λ_2 на диагонали. Построим матрицы Q^{-1} и Q, а также второй столбец q_2 матрицы Q

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1}{\alpha} & \frac{\lambda_2}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} & -\frac{\alpha}{\lambda_2-\lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{\alpha}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \frac{\alpha}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

Первым столбцом матрицы Q^{-1} будет собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_1, вторым столбцом будет, соответственно, собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_2. Тогда, используя лемму 2 можно определить норму матрицы Q^{-1} в $\mathbb{R}^2$

$$\|Q^{-1}\|_{\mathbb{R}^2} = \max_{\xi \in M} \|Q^{-1}\xi\|_{\mathbb{R}^2} = \max\left\{1 + m_2\frac{|\lambda_1|}{\alpha}; \frac{1}{m_2} + \frac{|\lambda_2|}{\alpha}\right\},$$

где множество M состоит из четырёх точек $(\pm 1, 0)'$ и $(0, \pm 1/m_2)'$ из $\mathbb{R}^2$.

Таким образом, используя теорему 1, можем оценить норму $\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega,n}}\|_{\mathbb{C}^{(0),n}_{\omega}}$ оператора периодических решений $\mathbb{P}$, индуцированного уравнением (13)

$$\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,n}}\|_{\mathbb{C}^{(0),2}_{\omega}} \leqslant \max\left\{1 + m_2\frac{|\lambda_1|}{\alpha}; \frac{1}{m_2} + \frac{|\lambda_2|}{\alpha}\right\} \frac{\alpha}{|\lambda_2 - \lambda_1|}\left(\frac{1}{|\lambda_1|} + m_2\frac{1}{|\lambda_2|}\right).$$

4. Условия существования единственного периодического решения

4.1. Уравнение (1)

Рассмотрим уравнение (1), сразу представив его как двумерное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{z}(t) = Az + f(t, z), \tag{16}$$

где $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))' \in \mathbb{C}^{(0),2}_{\omega}$, A — $(2,2)$-матрица, определённая формулой (14), функция $f(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0),2}_{\omega,2}$ принимает вид

$$f(t, z) = f(t, x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha} f_0(t, x, \alpha y) \end{pmatrix} \tag{17}$$

Для нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$, определённой соотношением (8), весовой параметр m_2 положим

$$m_2 = \alpha\frac{l_2}{l_1} > 0.$$

Тогда нетрудно видеть, что относительно такой нормы для функции $f(\cdot,\cdot)$, в силу наличия условий Липшица (4), будет выполнено

$$\|f(t, z_1) - f(t, z_2)\|_{\mathbb{R}^2} =$$

$$= \frac{m_2}{\alpha}|f_0(t,x_1,\alpha y_1) - f_0(t,x_2,\alpha y_2)| \leqslant \frac{m_2}{\alpha}(l_1|x_1-x_2| + l_2\alpha|y_1-y_2|) =$$

$$= \frac{m_2 l_1}{\alpha}(|x_1-x_2| + \alpha\frac{l_2}{l_1}|y_1-y_2|) = \frac{m_2 l_1}{\alpha}(|x_1-x_2| + m_2|y_1-y_2|) = l_2\|z_1-z_2\|_{\mathbb{R}^2},$$

для любых $z_1 = (x_1,y_1)'$ и $z_2 = (x_2,y_2)'$ из $\mathbb{R}^2$. То есть для функции $f(\cdot,\cdot)$, относительно выбранной нормы, константа l_2 является константой Липшица.

Введём в рассмотрение нелинейный оператор $F : \mathbb{C}_\omega^{(0),2} \to \mathbb{C}_\omega^{(0),2}$, действующий по правилу $(Fz(\cdot))(t) = f(t,z(t))$. Очевидно оператор F будет действовать из всего пространства $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$ в подпространство $\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}$. Кроме этого, из приведённых только что рассуждения следует, что при любых $z_1(\cdot)$ и $z_2(\cdot)$ из $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$ для этого оператора будет выполнено неравенство

$$\|Fz_1(\cdot) - Fz_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),2}} \leqslant l_2\|z_1(\cdot) - z_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),2}}.$$

Далее введём ещё один нелинейный оператор $\mathbb{P}F : \mathbb{C}_\omega^{(0),2} \to \mathbb{C}_\omega^{(1),2}$, который является суперпозицией операторов $\mathbb{P}$ и F. Нетрудно видеть, что задача поиска ω-периодических решений уравнения (16) (а значит и (1)) эквивалентна задаче нахождения неподвижных точек $z(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(1),2}$ оператора $\mathbb{P}F$

$$z(\cdot) = \mathbb{P}Fz(\cdot).$$

Один из способов, гарантирующих существование единственной неподвижной точки, это наложение условия сжимаемости на этот оператор. Выпишем эти условия

$$\|\mathbb{P}Fz_1(\cdot) - \mathbb{P}Fz_2(.)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),2}} \leqslant \|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),2}} l_2\|z_1(\cdot) - z_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),2}},$$

где $z_1(\cdot)$ и $z_2(\cdot)$ — произвольные функции из пространства $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$. Следовательно, при $\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),2}} l_2 < 1$ оператор $\mathbb{P}F$ будет сжимающим. Отметим, что приведённые условия, вообще говоря, гарантируют наличие неподвижной точки $z(\cdot)$ принадлежащей пространству $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$, но не $\mathbb{C}_\omega^{(1),2}$. Однако, вспоминая, что $\mathbb{P}$ действует из $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$ в $\mathbb{C}_\omega^{(1),2}$, автоматически получаем, что неподвижная точка будет принадлежать и пространству $\mathbb{C}_\omega^{(1),2}$.

С учётом полученных в предыдущем разделе результатов, выпишем условия, обеспечивающие существование единственного ω-периодического решения задачи (1), в явном виде

$$\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}}\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0),2}} l_2 \leqslant \max\left\{1 + m_2\frac{|\lambda_1|}{\alpha}; \frac{1}{m_2} + \frac{|\lambda_2|}{\alpha}\right\} \frac{\alpha}{|\lambda_2-\lambda_1|}\left(\frac{1}{|\lambda_1|} + m_2\frac{1}{|\lambda_2|}\right) l_2 =$$
$$\max\left\{1 + \frac{l_2}{l_1}|\lambda_1|; \frac{1}{\alpha}\frac{l_1}{l_2} + \frac{|\lambda_2|}{\alpha}\right\} \frac{\alpha l_2}{|\lambda_2-\lambda_1|}\left(\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{l_2}{l_1}\frac{\alpha}{|\lambda_2|}\right) < 1.$$

Поскольку $\alpha > 0$ является свободным параметром, необходимо минимизировать полученное выражение по этому параметру. Для этого введём в рассмотрение функцию $\sigma(\alpha)$

$$\sigma(\alpha) = \max\left\{\alpha + \frac{l_2}{l_1}\alpha|\lambda_1|; \frac{l_1}{l_2} + |\lambda_2|\right\} \frac{l_2}{|\lambda_2-\lambda_1|}\left(\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{l_2}{l_1}\frac{\alpha}{|\lambda_2|}\right).$$

Очевидно, эта функция непрерывна и монотонно возрастающая при $\alpha > 0$. Следовательно

$$\inf_{\alpha>0}\sigma(\alpha)=\sigma(0)=\frac{l_1+|\lambda_2|l_2}{|\lambda_2-\lambda_1||\lambda_1|}.$$

Таким образом, если выполнено $\sigma(0)<1$, то взяв параметр α сколь угодно малым, всегда можно добиться, чтобы выполнялось $\sigma(\alpha)<1$, что в свою очередь будет гарантировать существование единственного ω-периодического решения уравнения (16) и (1). Сформулируем теорему.

Теорема 2. *Пусть ω-периодическая функция $f_0(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathbb{C}^{(0)}$ уравнения (1) удовлетворяет условию Липшица (4) с константами $l_1>0$ и $l_2>0$, и пусть для параметров a_0 и a_1 выполнено неравенство $a_1^2-4a_0>0$. Тогда если справедливо*

$$\frac{l_1+l_2|\lambda_2|}{|\lambda_2-\lambda_1||\lambda_1|}<1, \tag{18}$$

где $\lambda_{1,2}$ определяются по формуле (15), то существует единственное ω-периодическое решение $x(\cdot)\in\mathbb{C}_\omega^{(1),1}$ уравнения (1).

Если выполнено условие (18), то всегда можно выбрать такое значение $\overline{\alpha}>0$, чтобы было выполнено

$$\sigma(\overline{\alpha})=\max\left\{\overline{\alpha}+\frac{l_2}{l_1}\overline{\alpha}|\lambda_1|;\frac{l_1}{l_2}+|\lambda_2|\right\}\frac{l_2}{|\lambda_2-\lambda_1|}\left(\frac{1}{|\lambda_1|}+\frac{l_2}{l_1}\frac{\overline{\alpha}}{|\lambda_2|}\right)<1$$

Для выбранного $\overline{\alpha}$ построим уравнение (16) с матрицей A и функцией $f(\cdot,\cdot)$, которые определяются формулами (14) и (17), соответственно. Кроме этого, выбранный $\overline{\alpha}$ определяет норму в $\mathbb{R}^2$ по правилу (8), где $m_2=\overline{\alpha}l_2/l_1$, а эта норма в $\mathbb{R}^2$, в свою очередь, определяет норму в $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$. Тогда для любой начальной функции $z_0(\cdot)=(x_0(\cdot),y_0(\cdot))'\in\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$ последовательность $z_k(\cdot)=(\mathbb{P}F)^k z_0(\cdot)$ стремится по норме $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$ к единственному ω-периодическому решению $z(\cdot)\in\mathbb{C}_\omega^{(1),2}$ уравнения (16). Более того, справедлива оценка сходимости

$$\|(\mathbb{P}F)^k z_0(\cdot)-z(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0)}}\leqslant\sigma(\overline{\alpha})^k\|z_0(\cdot)-z(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0)}}.$$

Единственным ω-периодическим решением задачи (1) является первая координата $x(\cdot)\in\mathbb{C}_\omega^{(0),1}$ неподвижной точки $z(\cdot)=(x(\cdot),y(\cdot))'\in\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$.

4.2. Уравнения (2) и (3)

Рассмотрим уравнения (2) и (3), также представив их как двухмерные дифференциальные уравнения первого порядка

$$\dot{z}(t)=Az+f(t,z), \tag{19}$$

где $z(\cdot)=(x(\cdot),y(\cdot))'\in\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$, A — $(2,2)$-такая же матрица, определённая формулой (14), $f(\cdot,\cdot)\in\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}$, если рассматривается уравнение (2) принимает вид

$$f(t,z)=f(t,x,y)=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\alpha}f_1(t,x)\end{pmatrix}, \tag{20}$$

в случае, если это уравнение (3), то

$$f(t,z)=f(t,x,y)=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha}f_2(t,\alpha y(t)) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Для нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$, определённой соотношением (8), положим $m_2=1$. Тогда для функции $f(\cdot,\cdot)$ в силу наличия условий Липшица (5) и (6) при любых $z_1=(x_1,y_1)'$ и $z_2=(x_2,y_2)'$ из $\mathbb{R}^2$ в случае, если $f(\cdot,\cdot)$ определяется формулой (20), будет справедливо

$$\|f(t,z_1)-f(t,z_2)\|_{\mathbb{R}^2}=\frac{1}{\alpha}|f_1(t,x_1)-f_1(t,x_2)|\leqslant\frac{l_1}{\alpha}|x_1-x_2|\leqslant\frac{l_1}{\alpha}\|z_1-z_2\|_{\mathbb{R}^2},$$

для $f(\cdot,\cdot)$, определённой формулой (21) будет выполнено

$$\|f(t,z_1)-f(t,z_2)\|_{\mathbb{R}^2}=\frac{1}{\alpha}|f_2(t,\alpha y_1)-f_2(t,\alpha y_2)|\leqslant l_2|y_1-y_2|\leqslant l_2\|z_1-z_2\|_{\mathbb{R}^2}.$$

Видно, что для функций $f(\cdot,\cdot)$, определённых формулами (20) и (21), относительно выбранной нормы, константа l_1/α и l_2 является константой Липшица.

По аналогии с тем, как это было сделано выше, введём в рассмотрение нелинейный оператор $F:\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}\to\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}$, действующий по правилу $(Fz(\cdot))(t)=f(t,z(t))$. Через F_1 обозначим оператор, индуцируемый функцией $f(\cdot,\cdot)$ по правилу (20), через F_2 обозначим оператор, индуцируемый функцией $f(\cdot,\cdot)$ по правилу (21). Для F_1 будет выполнено неравенство

$$\|F_1z_1(\cdot)-F_1z_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}\leqslant\frac{l_1}{\alpha}\|z_1(\cdot)-z_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}.$$

Для F_2 будет справедливо

$$\|F_2z_1(\cdot)-F_2z_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}\leqslant l_2\|z_1(\cdot)-z_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}.$$

Также введём ещё один нелинейный оператор $\mathbb{P}F_i:\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}\to\mathbb{C}_{\omega}^{(1),2}$, $i=1,2$. Для операторов $\mathbb{P}F_i$, $i=1,2$ справедливы следующие оценки

$$\|\mathbb{P}F_1z_1(\cdot)-\mathbb{P}F_1z_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}\leqslant\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}}\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}\frac{l_1}{\alpha}\|z_1(\cdot)-z_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}.$$

$$\|\mathbb{P}F_2z_1(\cdot)-\mathbb{P}F_2z_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}\leqslant\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}}\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}l_2\|z_1(\cdot)-z_2(\cdot)\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}.$$

Как это было сделано выше, выпишем условия сжимаемости операторов $\mathbb{P}F_i$, $i=1,2$.

$$\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}}\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}\frac{l_1}{\alpha}<1,\quad \|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}}\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}l_2<1.$$

Подставляя оценку $\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}}\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}$ и вводя функции $\sigma_1(\alpha)=\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}}\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}l_1/\alpha$ и $\sigma_1(\alpha)=\|\mathbb{P}|_{\mathbb{C}_{\omega,2}^{(0),2}}\|_{\mathbb{C}_{\omega}^{(0),2}}l_2$, распишем эти условия более подробно:

$$\sigma_1(\alpha)=\left(1+\frac{\max\{|\lambda_1|;|\lambda_2|\}}{\alpha}\right)\frac{l_1}{|\lambda_2-\lambda_1|}\left(\frac{1}{|\lambda_1|}+\frac{1}{|\lambda_2|}\right),$$

$$\sigma_2(\alpha)=(\alpha+\max\{|\lambda_1|;|\lambda_2|\})\frac{l_2}{|\lambda_2-\lambda_1|}\left(\frac{1}{|\lambda_1|}+\frac{1}{|\lambda_2|}\right).$$

Инфинумы функций $\sigma_1(\alpha)$ и $\sigma_2(\alpha)$ при $\alpha > 0$ равны

$$\inf_{\alpha>0} \sigma_1(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} \sigma_1(\alpha) = \frac{l_1}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \left(\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{1}{|\lambda_2|} \right),$$

$$\inf_{\alpha>0} \sigma_2(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \sigma_2(\alpha) = \frac{l_2 \max\{|\lambda_1|; |\lambda_2|\}}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \left(\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{1}{|\lambda_2|} \right).$$

По аналогии с теоремой 2 сформулируем две теоремы.

Теорема 3. *Пусть ω-периодическая функция $f_1(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}$ уравнения (2) удовлетворяет условию Липшица (5) с константой $l_1 > 0$, и пусть для параметров a_0 и a_1 выполнено неравенство $a_1^2 - 4a_0 > 0$. Тогда если справедливо*

$$\frac{l_1}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \left(\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{1}{|\lambda_2|} \right) < 1, \tag{22}$$

где $\lambda_{1,2}$ определяются по формуле (15), то существует единственное ω-периодическое решение $x(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(1),1}$ уравнения (2).

Если выполнено условие (22), то всегда можно выбрать такое значение $\overline{\alpha} > 0$, чтобы было выполнено

$$\sigma_1(\overline{\alpha}) = \left(1 + \frac{\max\{|\lambda_1|; |\lambda_2|\}}{\overline{\alpha}}\right) \frac{l_1}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \left(\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{1}{|\lambda_2|} \right) < 1.$$

Для выбранного $\overline{\alpha}$ построим уравнение (19) с матрицей A и функцией $f(\cdot,\cdot)$, которые определяются формулами (14) и (20), соответственно. Кроме этого, выбранный $\overline{\alpha}$ определяет норму в $\mathbb{R}^2$ по правилу (8), где $m_2 = 1$, а эта норма в $\mathbb{R}^2$, в свою очередь, определяет норму в $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$. Тогда для любой начальной функции $z_0(\cdot) = (x_0(\cdot), y_0(\cdot))' \in \mathbb{C}_\omega^{(0),2}$ последовательность $z_k(\cdot) = (\mathbb{P}F)^k z_0(\cdot)$ стремится по норме $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$ к единственному ω-периодическому решению $z(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(1),2}$ уравнения (19). Более того, справедлива оценка сходимости

$$\|(\mathbb{P}F)^k z_0(\cdot) - z(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0)}} \leqslant \sigma_1(\overline{\alpha})^k \|z_0(\cdot) - z(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0)}}.$$

Единственным ω-периодическим решением задачи (2) является первая координата $x(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),1}$ неподвижной точки $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))' \in \mathbb{C}_\omega^{(0),2}$.

Теорема 4. *Пусть ω-периодическая функция $f_1(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}$ уравнения (3) удовлетворяет условию Липшица (6) с константой $l_2 > 0$, и пусть для параметров a_0 и a_1 выполнено неравенство $a_1^2 - 4a_0 > 0$. Тогда если справедливо*

$$\frac{l_2 \max\{|\lambda_1|; |\lambda_2|\}}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \left(\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{1}{|\lambda_2|} \right) < 1, \tag{23}$$

где $\lambda_{1,2}$ определяются по формуле (15), то существует единственное ω-периодическое решение $x(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(1),1}$ уравнения (3).

Если выполнено условие (23), то всегда можно выбрать такое значение $\overline{\alpha} > 0$, чтобы было выполнено

$$\sigma_2(\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha} + \max\{|\lambda_1|; |\lambda_2|\}) \frac{l_2}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \left(\frac{1}{|\lambda_1|} + \frac{1}{|\lambda_2|} \right) < 1.$$

Для выбранного $\overline{\alpha}$ построим уравнение (19) с матрицей A и функцией $f(\cdot,\cdot)$, которые определяются формулами (14) и (21), соответственно. Кроме этого, выбранный $\overline{\alpha}$ определяет норму в $\mathbb{R}^2$ по правилу (8), где $m_2 = 1$, а эта норма в $\mathbb{R}^2$, в свою очередь, определяет норму в $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$. Тогда для любой начальной функции $z_0(\cdot) = (x_0(\cdot), y_0(\cdot))' \in \mathbb{C}_\omega^{(0),2}$ последовательность $z_k(\cdot) = (\mathbb{P}F)^k z_0(\cdot)$ стремится по норме $\mathbb{C}_\omega^{(0),2}$ к единственному ω-периодическому решению $z(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(1),2}$ уравнения (19). Более того, справедлива оценка сходимости

$$\|(\mathbb{P}F)^k z_0(\cdot) - z(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0)}} \leqslant \sigma_1(\overline{\alpha})^k \|z_0(\cdot) - z(\cdot)\|_{\mathbb{C}_\omega^{(0)}}.$$

Единственным ω-периодическим решением задачи (3) является первая координата $x(\cdot) \in \mathbb{C}_\omega^{(0),1}$ неподвижной точки $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))' \in \mathbb{C}_\omega^{(0),2}$.

Литература

1. *Розенвассер В. Н.* Колебания нелинейных систем. — М.: Наука, 1969. [Rosenvasser V.N. Fluctuations in Nonlinear Systems. — Moscow: Nauka, 1969]
2. *Полякова Л. А.* Обобщённый принцип сжимающих отображений и периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02, РГБ ОД, 61:07-1/387. — Воронеж, 2006. — 126 с. [Polyakova L. A. Generolized Contracting Mapping Principle and Periodical Solutions for Nonlinear Differential Equations / PhD of physical and mathematical Sciences: 01.01.02, RGB OD, 61:07-1/387, Voronej, 2006. — 126 p.]
3. *Белоусов Ф. А.* Существование и единственность периодических решений для обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. — № 56(1) / под ред. Ю. С. Попкова. — М.: URSS, 2010. — С. 5–19. [Belousov F. A. Existence and Uniqueness of Periodical Solutions for Ordinary Differential Equations // Proceedings of ISA RAN. Dynamics of Non-Homogeneous Systems / ed. by Yu.S. Popkov — Vol. 56(1). — Moscow: URSS, 2010. — P. 5–19]

UDC 517.9

Sufficient Conditions of Existence of Unique Periodic Solutions for Second Order One-Dimension Equations

F. A. Belousov

Institution of Russian Academy of Science
Central Economics and Mathematics Institute
47, Nachimovsky prospect, Moscow, 117418, Russia

In this work sufficient conditions of existence of unique periodic solutions for second order one-dimension equations are derived. The goal of the paper is not only in getting such results, but also in demonstration of new approach, which may be applied to more general class of differential equations, i.e. it may be considered not only second order, but also grater order differential equations.

Key words and phrases: ordinary differential equations, periodical solutions, existence and uniqueness of periodical solutions.