УДК 517.51

Оптимальное восстановление функций по неточно заданному преобразованию Радона на классах, задаваемых степенью оператора Лапласа

Т. Э. Баграмян

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В работе рассматривается задача оптимального восстановления функции из пространства Шварца по неточно заданному (в средне квадратичной метрике) преобразованию Радона. Получены явные выражения для погрешности оптимального восстановления и семейства оптимальных методов. В качестве следствия приведено одно неравенство для функций из пространства Шварца.

Ключевые слова: преобразование Радона, пространство Шварца, оптимальное восстановление.

1. Введение

В общем случае задача оптимального восстановления, исследуемая в работах [1–3], состоит в восстановлении значения линейного оператора на некотором множестве (классе) в линейном пространстве по значениям другого линейного оператора (называемого информационным), возможно заданным неточно, с погрешностью в той или иной метрике. В конкретных задачах (начиная с [4] и недавних [5–8]) в качестве информации обычно рассматриваются линейные функционалы и операторы, сопоставляющие функции её значения на наборе точек, её коэффициенты Фурье или преобразование Фурье. В данной работе рассматривается преобразование Радона — оператор, переводящий функцию на $\mathbb{R}^d$ в множество её интегралов по гиперплоскостям в $\mathbb{R}^d$. Этот оператор подробно изучается в теории компьютерной томографии, которая занимается численным восстановлением функций по их линейным или плоскостным интегралам. Для функций из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ в случае, если преобразование Радона известно точно, существует формула обращения, позволяющая произвести однозначное восстановление (см. [9]). Мы рассматриваем случай, когда преобразование Радона измерено неточно, но с известной погрешностью δ в средне квадратичной метрике. В теории оптимального восстановления подобные операторы рассматривались ранее в [10] (пример 3.2), где для функции на $\mathbb{R}^2$ известны интегралы вдоль прямых, проходящих в некотором конечном числе направлений, а также в работе [11], где рассматривается оператор радиального интегрирования, значение которого известно с погрешностью.

2. Постановка задачи и формулировка результата

Пространство Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ состоит из гладких функций, вместе со своими производными убывающих на бесконечности быстрее любой степени $|x|$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right| < \infty, \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{Z}^d_+.$$

Рассмотрим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2} : S(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \geqslant 0$, задаваемый формулой

$$\widehat{(-\Delta)^{\alpha/2}f}(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi),$$

Статья поступила в редакцию 2 ноября 2012 г.

где $\widehat{f}$ — преобразование Фурье f,

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Определим класс W, $W = \{f \in S(\mathbb{R}^d) : \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1\}$.

Преобразованием Радона называется интегральный оператор

$$Rf(\vartheta, s) = \int\limits_{x\vartheta = s} f(x)\mathrm{d}x, \quad \vartheta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Функция Rf определена на единичном цилиндре $Z = \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$. Гильбертово пространство $L_2(Z)$ задаётся скалярным произведением

$$(g, h)_{L_2(Z)} = \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} g(\vartheta, s)\overline{h}(\vartheta, s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\vartheta.$$

Предположим, что функция Rf известна с погрешность δ, т.е. дана функция $g \in L_2(Z)$, такая что

$$||Rf - g||_{L_2(Z)} \leqslant \delta, \quad \delta > 0.$$

Задача состоит в нахождении оптимального метода восстановления функции $f \in W$ по информации g. Под методом восстановления понимается произвольное отображение $m : L_2(Z) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, а погрешностью метода называется величина

$$e(\delta, m) = \sup_{\substack{f \in W, g \in L_2(Z) \\ \|Rf - g\|_{L_2(Z)} \leqslant \delta}} ||f - m(g)||_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется наименьшая из погрешностей всех возможных методов

$$E(\delta) = \inf_{m : L_2(Z) \to L_2(\mathbb{R}^d)} e(\delta, m).$$

Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется оптимальным методом восстановления.

Рассмотрим функции

$$x(\sigma) = (2\pi)^{1-d}\sigma^{d-1+2\alpha}\chi_{[0,\infty)}(\sigma), \quad y(\sigma) = (2\pi)^{1-d}\sigma^{d-1}\chi_{[0,\infty)}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}} \frac{(d-1)}{d-1+2\alpha} \delta^{\frac{4\alpha}{d-1+2\alpha}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}} \frac{2\alpha}{d-1+2\alpha} \delta^{\frac{2(1-d)}{d-1+2\alpha}}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2} = (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \delta^{\frac{2\alpha}{d-1+2\alpha}}.$$

Методы

$$\widehat{m_a(g)}(\sigma\vartheta) = (2\pi)^{(1-d)/2} a(\sigma)\widehat{g_\vartheta}(\sigma),$$

где $g_\vartheta(s) = g(\vartheta, s)$,

$$a(\sigma) = \left(\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} + \varepsilon(\sigma) \frac{\sigma^\alpha \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{x(\sigma)\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 - y(\sigma)} \right) \chi_{[0,\infty)}(\sigma), \tag{3}$$

$\varepsilon(\sigma) \in L_\infty(\mathbb{R})$ *и принимает значения на отрезке* $[-1, 1]$, *являются оптимальными.*

Следствие 1. В условиях теоремы 1 методы $\widehat{m_a(g)}(\sigma\vartheta) = (2\pi)^{(1-d)/2} a(\sigma)\widehat{g_\vartheta}(\sigma)$, где

$$a(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \in [0, 2\pi\widehat{\lambda}_2^{(1-d)}], \\ \left(\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} + \varepsilon(\sigma) \frac{\sigma^\alpha \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{x(\sigma)\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 - y(\sigma)} \right), & \sigma \in (2\pi\widehat{\lambda}_2^{(1-d)}, \widehat{\lambda}_1^{-1/2\alpha}), \\ 0, & \sigma \in [\widehat{\lambda}_1^{-1/2\alpha}, \infty), \end{cases}$$

$\varepsilon(\sigma) \in L_\infty(\mathbb{R})$ и принимает значения на отрезке $[-1, 1]$, являются оптимальными.

Функция a выполняет роль фильтра, определяющего соотношение между объёмом полезной информации и погрешностью, с которой она задана. Из следствия видно, что при достаточно малых σ информация $\hat{g}$ не нуждается в фильтрации, а при достаточно больших σ фильтр можно выбрать равным 0, т.е. соответствующий объем информации не влияет на погрешность оптимального восстановления. Таким образом, выбрав фильтр a как в следствии 1, получим, что восстановленная функция будет иметь ограниченный спектр.

Следствие 2. Для функции $f \in S(\mathbb{R}^d)$ имеет место точное неравенство

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \|Rf\|_{L_2(Z)}^{\frac{2\alpha}{2(d-1+2\alpha)}} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d-1}{d-1+2\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

3. Доказательства

Доказательство (теорема 1). Рассмотрим двойственную задачу

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1, \quad \|Rf\|^2_{L_2(Z)} \leqslant \delta^2.$$

Её решение даёт оценку снизу для квадрата погрешности оптимального восстановления в силу следующей цепочки неравенств (в которой m — произвольный метод)

$$E(\delta) \geqslant \sup_{\substack{f \in W, g \in L_2(Z) \\ \|Rf - g\|_{L_2(Z)} \leqslant \delta}} \|f - m(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geqslant \sup_{\substack{f \in W \\ \|Rf\|_{L_2(Z)} \leqslant \delta}} \|f - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\substack{f \in W \\ \|Rf\|_{L_2(Z)} \leqslant \delta}} \frac{\|f - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|-f - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{2} \geqslant \sup_{\substack{f \in W \\ \|Rf\|_{L_2(Z)} \leqslant \delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Найдём решение двойственной задачи. Известно следующее соотношение, связывающее преобразование Радона функции и её преобразование Фурье (см. [9]).

$$\widehat{(R_\vartheta f)}(\sigma) = (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\vartheta), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

где $R_\vartheta f(s) = Rf(\vartheta, s)$. Используя его, перепишем двойственную задачу.

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{f}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_0^\infty \sigma^{d-1} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} |\widehat{f}(\sigma\vartheta)|^2 \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\sigma;$$

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{(-\Delta)^{\alpha/2}} f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |\widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \\ = \int\limits_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} |\widehat{f}(\sigma\vartheta)|^2 \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\sigma;$$

$$\|Rf\|^2_{L_2(Z)} = \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} |Rf(\vartheta, s)|^2 \mathrm{d}s \mathrm{d}\vartheta = \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{R_\vartheta f}(\sigma)|^2 \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\vartheta = \\ = (2\pi)^{d-1} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\sigma\vartheta)|^2 \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\vartheta = (2\pi)^{d-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} |\widehat{f}(\sigma\vartheta)|^2 \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\sigma.$$

Положим $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\widehat{f}(\sigma\vartheta)|^2 \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\mu(\sigma)$ и рассмотрим следующую задачу на мерах

$$\int\limits_0^\infty \sigma^{d-1} \mathrm{d}\mu \to \max, \quad \int\limits_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} \mathrm{d}\mu \leqslant 1, \quad (2\pi)^{d-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu \leqslant \delta^2. \tag{4}$$

Запишем её функцию Лагранжа,

$$L(\mu, \lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 - \lambda_2 \delta^2 + \\ + (2\pi)^{d-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\lambda_1 (2\pi)^{1-d} \sigma^{d-1+2\alpha} \chi_{[0,\infty)}(\sigma) + \lambda_2 - (2\pi)^{1-d} \sigma^{d-1} \chi_{[0,\infty)}(\sigma)\right) \mathrm{d}\mu.$$

Рассмотрим функцию, заданную параметрически уравнениями (1) или

$$y(x) = (2\pi)^{\frac{1-d+(d-1)^2}{(d-1+2\alpha)}} x^{\frac{(d-1)}{(d-1+2\alpha)}}.$$

Она является вогнутой при $\alpha \geqslant 0$. Уравнение касательной к графику функции $y(x)$ в точке $1/\delta^2$ (соответствующее значение σ равно $\sigma^* = [(2\pi)^{d-1}\delta^{-2}]^{1/(d-1+2\alpha)}$) имеет вид $y = \widehat{\lambda}_1 x + \widehat{\lambda}_2$, где $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ определены в (2). Отсюда имеем $\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2 - y(\sigma) \geqslant 0$ и $L(\mu, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geqslant -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2$.

Рассмотрим меру

$$\mathrm{d}\mu^* = \frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}} D\left(\sigma - (2\pi)^{\frac{d-1}{d-1+2\alpha}} (\delta^{-2})^{\frac{1}{d-1+2\alpha}}\right) \mathrm{d}\sigma,$$

где D — дельта-функция. Она допустима в задаче (4), удовлетворяет условиям дополняющей нежёсткости

$$\widehat{\lambda}_1\left(\int\limits_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha}\mathrm{d}\mu^* - 1\right) + \widehat{\lambda}_2\left((2\pi)^{d-1}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\mu^* - \delta^2\right) = 0$$

и минимизирует функцию Лагранжа, так как $L(\mu^*, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2\delta^2$. Отсюда следует, что она доставляет экстремум в задаче (4), решение которой равно $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2$.

Рассмотрим дельта-образную последовательность функций из $S(\mathbb{R}^d)$:

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-(n\sigma)^2} \longrightarrow D(\sigma).$$

Обозначим $g_n(\sigma) = \dfrac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}}\dfrac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-(n(\sigma-\sigma^*))^2}$, тогда $g_n(\sigma) \longrightarrow \dfrac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}}D(\sigma-\sigma^*)$. Обозначим $c_n = \max\left(1, \int\limits_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha}g_n(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)$ и $u_n(\sigma) = \dfrac{g_n(\sigma)}{c_n}$. В силу того, что

$$\int\limits_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha}g_n(\sigma)\mathrm{d}\sigma \longrightarrow \int\limits_{-\infty}^\infty \chi_{[0,\infty)}(\sigma)\sigma^{d-1+2\alpha}\frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}}D(\sigma-\sigma^*)\mathrm{d}\sigma = 1,$$

имеем $u_n(\sigma) \longrightarrow \dfrac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}}D(\sigma-\sigma^*)$. Положим $\widehat{f}_n(\sigma\vartheta) = \dfrac{u_n(\sigma)}{|\mathbb{S}^{d-1}|}$, тогда последовательность $\{f_n\}$ допустима в двойственной задаче, так как

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2}f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha}u_n(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{c_n}\int\limits_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha}g_n(\sigma)\mathrm{d}\sigma \leqslant 1,$$

$$\|Rf\|^2_{L_2(Z)} = (2\pi)^{d-1}\int\limits_{-\infty}^\infty u_n(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{c_n}(2\pi)^{d-1}\int\limits_{-\infty}^\infty g_n(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{c_n}\delta^2 \leqslant \delta^2.$$

Значение двойственной задачи на последовательности $\{f_n\}$ совпадает с решением задачи (4)

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_0^\infty \sigma^{d-1}u_n(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{c_n}\int\limits_0^\infty \sigma^{d-1}g_n(\sigma)\mathrm{d}\sigma \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}}\delta^{\frac{4\alpha}{d-1+2\alpha}} = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2,$$

откуда следует, что на $\{f_n\}$ достигается решение двойственной задачи.

Рассмотрим метод $\widehat{m_a(g)}(\sigma\vartheta) = (2\pi)^{(1-d)/2}a(\sigma)\widehat{g_\vartheta}(\sigma)$. Запишем его погрешность

$$\|f - m_a(g)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{f} - \widehat{m_a(g)}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}}\int\limits_0^\infty \sigma^{d-1}|\widehat{f}(\sigma\vartheta) - (2\pi)^{(1-d)/2}a(\sigma)\widehat{g_\vartheta}(\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \int\limits_0^\infty \sigma^{d-1} \left| a(\sigma)(2\pi)^{(1-d)/2} \left(\widehat{g_\vartheta}(\sigma) - (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\vartheta) \right) + \widehat{f}(\sigma\vartheta)(a(\sigma)-1) \right|^2 \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\vartheta.$$

Применим неравенство Коши–Буняковского $|xy|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$ к векторам

$$x = \left((2\pi)^{(1-d)/2} \frac{a(\sigma)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}, \sigma^{\frac{1-d-2\alpha}{2}} \frac{(a(\sigma)-1)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}} \right),$$

$$y = \left(\left(\widehat{g_\vartheta}(\sigma) - (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\vartheta) \right) \sqrt{\widehat{\lambda}_2}, \sigma^{\frac{d-1+2\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{\lambda}_1} \widehat{f}(\sigma\vartheta) \right).$$

Получим

$$\|f - m_a(g)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \int\limits_0^\infty A(\sigma) \left(\sigma^{d-1+2\alpha} \widehat{\lambda}_1 |\widehat{f}(\sigma\vartheta)|^2 + \left| \widehat{g_\vartheta}(\sigma) - (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\vartheta) \right|^2 \widehat{\lambda}_2 \right) \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\vartheta,$$

где

$$A(\sigma) = \sigma^{d-1} \left((2\pi)^{(1-d)} \frac{a^2(\sigma)}{\widehat{\lambda}_2} + \sigma^{1-d-2\alpha} \frac{(a(\sigma)-1)^2}{\widehat{\lambda}_1} \right).$$

Условие (3) эквивалентно $A(\sigma) \leqslant 1$, $\sigma \in [0, \infty)$, откуда $\|f - m_a(g)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2$. □

Доказательство (следствие 1). Положим $a(\sigma) = 1$ в неравенстве $A(\sigma) \leqslant 1$, получим, что оно выполнено при $\sigma \leqslant 2\pi \widehat{\lambda}_2^{(1-d)}$. Аналогично, положим $a(\sigma) = 0$, тогда $A(\sigma) \leqslant 1$ выполнено при $\sigma \geqslant \widehat{\lambda}_1^{-1/2\alpha}$. □

Доказательство (следствие 2). Из доказательства теоремы 1 следует $\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \delta^{\frac{2\alpha}{2(d-1+2\alpha)}}$, при ограничениях $\|Ru\|_{L_2(Z)} = \delta$ и $\|(-\Delta)^{\alpha/2} u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Положив $u(x) = \frac{f(x)}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}$, $f \neq 0$, получим

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \|Rf\|_{L_2(Z)}^{\frac{2\alpha}{2(d-1+2\alpha)}} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d-1}{d-1+2\alpha}}.$$

Литература

1. *Michelli C. A., Rivlin T. J.* A Survey of Optimal Recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory. — 1977. — Pp. 1–54.
2. *Michelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery // Lecture Notes in Mathematics. Numerical Analysis. — 1984. — Vol. 1129. — Pp. 21–93.
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Исследования по выпуклому анализу. — 2009. — Т. 2. — С. 158–192. [Magaril-Il'yaev G. G, Osipenko K. Yu. Optimal Recovery of Operators from Inaccurate Information // Results of Science. South Federal District. Mathematical Forum. Studies on the Convex Analysis. — 2009. — Vol. 2. — P. 158–192]

4. *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки. — 1972. — Т. 12, № 4. — С. 465–476. [Osipenko K. Yu. Optimal Interpolation of Analytic Functions // Mathematical Notes. — 1972. — Vol. 12, No. 4. — P. 465–476]
5. *Osipenko K. Y., Stessin M.* Hadamard and Schwarz Type Theorems and Optimal Recovery in Spaces of Analytic Functions // Constr. Approx. — 2010. — Vol. 31, No 1. — Pp. 37–67.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // Тр. МИАН. — 2010. — Т. 269. — С. 181–192. [Magaril-Il'yaev G. G, Osipenko K. Yu. Reconstruction of Convolution Type Operators from Inaccurate Data // Trudy Mat. Inst. Steklov. — 2010. — Vol. 269. — P. 181–192]
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функциональный анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 3. — С. 76–79. [Magaril-Il'yaev G. G, Osipenko K. Yu. On Optimal Harmonic Synthesis from Inaccurate Given Spectrum // Functional Analysis and its Applications. — 2010. — Vol. 44, No. 3. — P. 76–79]
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН. — 2011. — Т. 438, № 3. — С. 300–302. [Magaril-Il'yaev G. G, Osipenko K. Yu. The Hardy–Littlewood–Pölya Inequality and Recovery of Derivatives from Inaccurate Information // Doklady of the Academy of Sciences. — 2011. —Vol. 438, No. 3. — P. 300–302]
9. *Natterer F.* The Mathematics of Computerized Tomography. — Stuttgart: John Wiley & Sons., 1986.
10. *Logan B. F., Shepp L. A.* Optimal Reconstruction of a Function from its Projections // Duke mathematical journal. — 1975. — Vol. 42, No 4. — Pp. 645–659.
11. *Баграмян Т. Э.* Оптимальное восстановление гармонической функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования // Владикавказский математический журнал. — 2012. — Т. 14, № 1. — С. 22–36. [Bagramyan T. E. Optimal Recovery of a Harmonic Function from Inaccurate Information on the Values of the Radial Integration Operator // Vladikavkaz Mahematical Journal. — 2012. — Vol. 14, No. 1. — P. 22–36]

UDC 517.51

Optimal Recovery of Functions from Inaccurate Data on the Radon Transform for Classes Defined by the Degree of the Laplacian

T. E. Bagramyan

Department of Nonlinear Analysis and Optimization
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

We consider the problem of optimal recovery of function in Schwartz space from inaccurate data (in the mean square metric) on it's Radon transform. We present explicit expressions for the error of optimal recovery and a set of optimal methods. As a consequence we prove one inequality for functions in Schwartz space.

Key words and phrases: Radon transform, Schwartz space, optimal recovery.