Математика

УДК 517.956.25

Исследование свойств интегрируемости производных решения сопряжённого (нелинейного) уравнения Бельтрами в случае вырождения на граничной дуге

Ю. В. Терентьева

Кафедра теории функций
Кубанский государственный университет
ул. Ставропольская, д. 149, г. Краснодар, 350040, Россия

Предметом изучения данной работы являются вырождающиеся эллиптические уравнения. Используя интегральные представления для функций, обладающих обобщёнными производными, мы доказываем теорему существования решений таких уравнений как в классе квазиконформных в среднем отображений, так и в более общем случае. Доказывается улучшенная интегрируемость производных обобщённого решения квазилинейного вырождающегося уравнения Бельтрами в случае вырождения на граничной дуге.

Ключевые слова: сопряжённое (нелинейное) уравнение Бельтрами, вырождающиеся эллиптические уравнения, класс Макенхаупта, весовые соболевские пространства, теоремы вложения, ограниченные сингулярные операторы в весовых пространствах, квазиконформные отображения.

Введение

Хорошо известно [1], что теория K-квазиконформных отображений тесно связана с теорией упругости, например, с бесконечно малыми изгибаниями кусочно-регулярных поверхностей и с изучением их жёсткости. Для того чтобы иметь возможность изучать те случаи, в которых имеются точки уплощения, необходимо привлекать теорию общих квазиконформных отображений, которая в последнее время находится в стадии своего развития и все ещё далека от своего завершения.

Предметом изучения данной работы являются обобщённые решения [2] $w(z) = u(z) + iv(z)$ эллиптических систем вида

$$\begin{cases} \rho(z)\, u_x = v_y, \\ \rho(z)\, u_y = -v_x, \end{cases} \tag{1}$$

осуществляющие топологические отображения круга $B_1 = \{z : |z| < 1\}$ на себя с нормировкой $w(z_i) = w_i,\ z_i,\ w_i \in \partial B_1,\ i = 1, 2, 3$. Обозначим через Γ_0 дугу на границе Γ круга B_1 с концами в точках $z_1,\ z_2,\ 0 < \arg z_2 < \arg z_1 \leqslant 2\pi$.

Условие ρ: Пусть функция $\rho : \bar{B}_1 \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема на множестве $\bar{B}_1 \backslash \Gamma_0$, неотрицательна на нем и в окрестности Γ_0 удовлетворяет условиям:

$$a_1 \mathrm{dist}^{\alpha}(z, \Gamma_0) \leqslant \rho(z) \leqslant a_2 \mathrm{dist}^{\alpha}(z, \Gamma_0),$$

$$b_1 \mathrm{dist}^{\alpha-1}(z, \Gamma_0) \leqslant |\nabla \rho(z)| \leqslant b_2 \mathrm{dist}^{\alpha-1}(z, \Gamma_0),$$

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < a_1 < a_2, \quad 0 < b_1 < b_2.$$

Переходя к комплексным переменным, система (1) запишется в следующем виде:

$$w_{\bar{z}} = \frac{1-\rho}{1+\rho}\overline{w_z} \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 13 июля 2012 г.

Автор выражает свою глубокую благодарность Е. А. Щербакову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и полезные советы.

Уравнение (2) иногда называют сопряжённым (нелинейным) уравнением Бельтрами.

Используя интегральные представления для функций, обладающих обобщёнными производными, мы докажем теорему существования решений таких уравнений как в классе квазиконформных в среднем отображений, так и в более общем случае. Подобная задача, например, была рассмотрена в работе [3]. Так же нами будут получены улучшенные свойства интегрируемости производных определённого класса квазиконформных отображений в дополнительном предположении, что производные, так называемой, «весовой» функции $\rho(z)$ обладают некоторыми свойствами интегрируемости.

1. Решение сопряжённого (нелинейного) уравнения Бельтрами, вырождающегося на граничной дуге в случае $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

Нас будет интересовать, прежде всего, множество весов $\rho(z)$, принадлежащих классу Макенхаупта A_2 [4]. Поэтому, для начала докажем лемму, дающую достаточные условия принадлежности функции $\rho(z)$ этому классу.

Лемма 1. *Пусть* $\operatorname{dist}(z, \Gamma_0)$ *— расстояние от точки* z *до дуги* Γ_0*,* $d(z)$ *— неотрицательная непрерывная в* $\mathbb{C}$ *функция, которая обращается в нуль на* Γ_0*, положительна в* $\mathbb{C}\backslash\Gamma_0$ *и удовлетворяет условиям:*

$$d(z) = d\left(\frac{1}{\bar{z}}\right), \quad \forall z \in \bar{B}_1; \tag{3}$$

существуют константы $\alpha \in (0, 1)$ *и* $0 < c_1 \leqslant c_2$*, такие что*

$$c_1 \operatorname{dist}^{\alpha}(z, \Gamma_0) \leqslant d(z) \leqslant c_2 \operatorname{dist}^{\alpha}(z, \Gamma_0) \tag{4}$$

для точек $z \in B_1$*, принадлежащих некоторой окрестности* Γ_0*. Тогда* $d(z)$ *является* A_2 *— весом в* $\mathbb{C}$*.*

Доказательство. Пусть

$$B(\zeta, r) = \{z : |z - \zeta| < r\}, \quad r \in (0, +\infty), \quad \zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}.$$

Для доказательства леммы необходимо показать, что функция

$$K_{\alpha}(\zeta, r) = \frac{1}{\pi^2 r^4} \int\limits_{B(\zeta,r)} \operatorname{dist}(z, \Gamma_0)^{\alpha}\, s\mathrm{d}s\mathrm{d}\varphi \int\limits_{B(\zeta,r)} \operatorname{dist}(z, \Gamma_0)^{-\alpha}\, s\mathrm{d}s\mathrm{d}\varphi \tag{5}$$

имеет конечную верхнюю грань на множестве $\mathbb{C} \times (0, +\infty)$.

В силу условий (3), (4) для проверки ограниченности (5) мы можем ограничиться точками $\zeta \in \bar{B}_1$.

Обозначим через A_0 сектор $A_0 = \{z \in B_1 : \arg z_2 < \arg z < \arg z_1\}$, где z_1, $z_2 \in \partial B_1$ и z_1, z_2 — концевые точки дуги Γ_0.

Предположим, что в условии (5) верхняя грань бесконечна:

$$\sup_{\zeta \in \bar{B}_1,\, r \in (0, +\infty)} K_{\alpha}(\zeta, r) = +\infty.$$

Рассмотрим сектор A_0 и последовательность $\{(\zeta_n, r_n)\}$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} K_{\alpha}(\zeta_n, r_n) = +\infty.$$

Можно предполагать, что последовательности ζ_n, r_n являются сходящимися. Тогда существуют следующие возможности:

A) Начиная с некоторого номера n_0, имеем, что $B(\zeta_n, r_n) \subset A_0$. В таком случае

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n \in \varGamma_0.$$

B) Начиная с некоторого номера n_0, имеем, что

$$B(\zeta_n, r_n) \cap (B_1 \backslash A_0) \neq \emptyset.$$

При этом необходимо исследовать следующие возможности:

B1) $B(\zeta_n, r_n) \subset B_1 \backslash A_0$;

B2) $(B(\zeta_n, r_n) \cap A_0 \neq \emptyset) \wedge (B(\zeta_n, r_n) \subset B_1)$;

B3) $(B(\zeta_n, r_n) \backslash B_1 \neq \emptyset) \wedge (B(\zeta_n, r_n) \cap A_0 \neq \emptyset) \wedge (B(\zeta_n, r_n) \cap (B_1 \backslash A_0) \neq \emptyset)$.

В каждом из этих случаев можно показать, что для последовательности пар $\{(\zeta_n, r_n)\}$ верхняя грань $K_\alpha(\zeta, r)$ конечна. $\square$

Замечание 1. В том случае, когда $\Gamma_0 = \partial B_1$ или $\Gamma_0 = \{z_1\}$, доказательство тривиально.

Так как характеристика $K(z) = \frac{|w_z| + |w_{\bar z}|}{|w_z| - |w_{\bar z}|}$ отображения w равна $\rho^{-1}(z)$, а функция $\rho(z)$ в системе (1) обращается в нуль на Γ_0, то отображения, удовлетворяющие уравнению (2), не являются K-квазиконформными [5] ни для какой константы $K \in \mathbb{R}$. Такие отображения назовём общими квазиконформными отображениями, а соответствующую им систему — вырождающейся. Система (1) в таком случае не является равномерно эллиптической.

Для доказательства теоремы существования обобщённого решения $w(z)$ уравнения (2) нам понадобится две вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Пусть функция ρ удовлетворяет условию ρ, в котором α подчинено неравенствам:*

$$0 < \alpha < 1.$$

Пусть $\{w_n\}$, $w_n = u_n + iv_n$ — последовательность K_n-квазиконформных отображений, являющихся решениями уравнений:

$$w_{\bar z} = \frac{1 - \rho_n}{1 + \rho_n} \overline{w_z}, \tag{6}$$

где $\rho_n(z) = \rho\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) z\right)$, $K_n = \sup\limits_{z \in B_1} \rho_n^{-1}(z)$, нормированных условиями $w(z_i) = w_i$, $z_i, w_i \in \partial B_1$, $i = 1, 2, 3$. Пусть

$$I(g, z, D) := \iint_D \frac{g(\varsigma)}{\varsigma - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta, \quad I_z(g, z, D) = \iint_D \frac{g(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta =: -\pi \Pi(g).$$

Последовательность функций $\rho_n u_n + iv_n$ является компактной в смысле равномерной сходимости внутри B_1. Для сходящейся последовательности имеют место равенства:

$$I\left(\frac{\rho_\xi v_\xi}{\rho} + \frac{\rho_\eta v_\eta}{\rho}, z, B_1\right) \equiv I(v_{\varsigma\bar\varsigma}, z, B_1) = \lim_{n\to\infty} I(v_{n\varsigma\bar\varsigma}, z, B_1);$$

$$I_z(v_{\varsigma\bar\varsigma}, z, B_1) = \lim_{n\to\infty} I_z(v_{n\varsigma\bar\varsigma}, z, B_1) \tag{7}$$

Функция $u+iv$ имеет в среднем граничные значения на Γ и для функции $\rho u+iv$ и её производной имеют место представления:

$$\rho u+iv=F\left(z\right)-\frac{1}{\pi}I\left(\rho_{\bar{\varsigma}}\left(\varsigma\right)u\left(\varsigma\right),z,B_1\right), \tag{8}$$

$$\left(\rho u+iv\right)_z\equiv\rho_z u+2iv_z=F'\left(z\right)-\frac{1}{\pi}I_z\left(\rho_{\bar{\varsigma}}\left(\varsigma\right)u\left(\varsigma\right),z,B_1\right), \tag{9}$$

где аналитическая функция $F\left(z\right)$ имеет вид:

$$F\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_1}\frac{\rho u+iv}{\varsigma-z}\mathrm{d}\varsigma=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_1}\frac{\rho_n u_n+iv_n}{\varsigma-z}\mathrm{d}\varsigma.$$

Доказательство. Пусть

$$B_{r'}=\left\{\zeta\in B_1:|\zeta|<r'\right\},$$

$$C_{r'r}=\left\{\zeta\in B_1:r'<|\zeta|<r\right\},r'<r<1.$$

Ясно, что

$$I_z\left(\rho_{n\bar{\varsigma}}u_n,z,B_1\right)=I_z\left(\rho_{n\bar{\varsigma}}u_n,z,C_{r1}\right)+I_z\left(\rho_{n\bar{\varsigma}}u_n,z,B_r\right).$$

Для любой точки z, $|z|=r_0<r$, первый интеграл может быть сделан сколь угодно малым равномерно по n за счёт выбора r. Покажем теперь, что

$$I_z\left(\rho_{\bar{\varsigma}}u_n,z,B_r\right)=\lim_{n\to\infty}I_z\left(\rho_{n\bar{\varsigma}}u_n,z,B_r\right). \tag{10}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}I_z\left(\rho_{n\bar{\varsigma}}u_n,z,B_r\right)&=I_z\left(\left(\rho_n u_n\right)_{\bar{\varsigma}},z,B_r\right)-I_z\left(\rho_n u_{n\bar{\varsigma}},z,B_r\right)=\\&=I_z\left(\left(\rho_n u_n\right)_{\bar{\varsigma}},z,B_r\right)+iI_z\left(v_{n\bar{\varsigma}},z,B_r\right)=\\&=\frac{\partial}{\partial z}\left(I\left(\left(\rho_n u_n\right)_{\bar{\varsigma}},z,B_r\right)+iI\left(v_{n\bar{\varsigma}},z,B_r\right)\right)=\\&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\rho_n\left(\varsigma\right)u_n\left(\varsigma\right)}{\varsigma-z}\mathrm{d}\varsigma+\pi\rho_n\left(z\right)u_n\left(z\right)+\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{v_n\left(\varsigma\right)}{\varsigma-z}\mathrm{d}\varsigma+\pi v_n\left(z\right)\right).\end{aligned}$$

Для любой точки z, $|z|=r_0<r$, последние интегралы сходятся равномерно по n. Отсюда легко следует (10).

Докажем теперь существование $I_z\left(v_{\varsigma\bar{\varsigma}},z,B_1\right)$, $z\in B_{r'}$.

Так как в круге $B_{r'}$ функции $\frac{\rho_x}{\rho}v_x$, $\frac{\rho_y}{\rho}v_y$ непрерывны по Гёльдеру, то $I_z\left(v_{\varsigma\bar{\varsigma}},z,B_{r'}\right)$ существует для любой точки $z\in B_{r'}$. Докажем теперь, что при фиксированном r' существует предел

$$\lim_{r\to1}I_z\left(v_{\varsigma\bar{\varsigma}},z,B_r\right). \tag{11}$$

Ясно, что

$$I_z\left(v_{\varsigma\bar{\varsigma}},z,B_r\right)=\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{v\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-z\right)^2}\right)\mathrm{d}\zeta+2\int\limits_{\Gamma_r}\frac{v\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-z\right)^3}\mathrm{d}\zeta-$$

$$-\int\limits_{\Gamma_{r'}} \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{v(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\right) \mathrm{d}\zeta - 2\int\limits_{\Gamma_{r'}} \frac{v(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \mathrm{d}\zeta.$$

Так как величина r' фиксирована и функция v_z непрерывна внутри B_1, то для доказательства существования предела (11) достаточно исследовать предел функции

$$\int\limits_{\Gamma_r} \frac{v(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \mathrm{d}\zeta$$

при $r \to 1$.

Так как функция $|\nabla v|^2$ интегрируема с весом ρ^{-1}, то существуют в среднем её граничные значения [6] и

$$\int\limits_{\Gamma_r} \left|v\left(re^{i\varphi}\right) - v\left(e^{i\varphi}\right)\right|^2 r\mathrm{d}\varphi \to 0, \quad r \to 1.$$

Это означает, что интеграл $I_z(v_{\varsigma\bar{\varsigma}}, z, B_1)$ существует. Существование интеграла $I(v_{\varsigma\bar{\varsigma}}, z, B_1)$, $\forall z \in B_1$, доказывается аналогично.

Рассмотрим теперь вопрос о поточечной сходимости внутри B_1 последовательности $\{I_z(v_{n\varsigma\bar{\varsigma}}, z, B_1)\}$ к $I_z(v_{\varsigma\bar{\varsigma}}, z, B_1)$. Для этого нужно рассмотреть последовательность функций $\{v_{nz\bar{z}}\}$, $v_{nz\bar{z}} = \frac{\rho_{nx} v_{nx}}{\rho_n} + \frac{\rho_{ny} v_{ny}}{\rho_n}$ на B_1.

Отображения $u_n + iv_n$ являются K-квазиконформными внутри единичного круга. Из теорем компактности для K-квазиконформных отображений с привлечением рассуждений, использованных нами при доказательстве существования интегралов I, I_z, мы получаем поточечную сходимость $I(v_{n\varsigma\bar{\varsigma}}, z, B_1)$ к $I(v_{\varsigma\bar{\varsigma}}, z, B_1)$ и $I_z(v_{n\varsigma\bar{\varsigma}}, z, B_1)$ к $I_z(v_{\varsigma\bar{\varsigma}}, z, B_1)$. □

Лемма 3. *Пусть* $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n = \frac{\rho_{nx}}{\rho_n} v_{nx}$ *— последовательность функций, построенных по отображениям* $w_n(z)$*, являющихся обобщёнными решениями уравнений (6) в круге* B_1 *с нормировкой:*

$$w(z_1) = i, w(z_2) = -i, \tag{12}$$

где z_1, z_2 *— концевые точки дуги* Γ_0, $z_3 \notin \Gamma_0$, $w(z_3) = w_3 \notin \Gamma_0$.

Тогда эта последовательность равномерно ограничена в $L_{\frac{4-4\delta}{3-\alpha-\delta}}(\sigma_1, B_1)$ *с весом* $\sigma_1 = \mathrm{dist}^{1-\delta}(z, \Gamma_0)$*, и слабо сходится [7] в* $L_{\frac{4-4\delta}{3-\alpha-\delta}}(\sigma_1, B_1)$ *к функции из этого же пространства* $\varphi = \frac{\rho_x}{\rho} v_x$ *в* B_1*, здесь* $0 < \delta < 1$ *— фиксированное число. Аналогичный результат имеет место и для последовательности* $\{\psi_n\}$, $\psi_n = \frac{\rho_{ny}}{\rho_n} v_{ny}$.

Доказательство. Несложно проверить, что пространство $L_{\frac{4-4\delta}{3-\alpha-\delta}}(\sigma_1, B_1)$ является рефлексивным банаховым пространством с нормой:

$$\|f\|_{L_{\frac{4-4\delta}{3-\alpha-\delta}}(\sigma_1, B_1)} = \left(\iint_{B_1} |f|^{\frac{4-4\delta}{3-\alpha-\delta}} \sigma_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{3-\alpha-\delta}{4-4\delta}}.$$

В силу топологических соображений производные v_{nx}, v_{ny} интегрируемы в круге B_1 с квадратом и весом ρ_n^{-1}. Используя это свойство и неравенство Гёльдера, легко показать, что функции φ_n интегрируемы со степенью $\frac{4-4\delta}{3-\alpha-\delta}$ и весом $\sigma_1 = \mathrm{dist}^{1-\delta}(z, \Gamma_0)$ и их нормы равномерно ограничены в пространстве $L_{\frac{4-4\delta}{3-\alpha-\delta}}(\sigma_1, B_1)$.

Покажем теперь, что последовательность $\{\varphi_n\}$ слабо сходится в пространстве $L_{\frac{4-4\delta}{3-\alpha-\delta}}(\sigma_1, B_1)$ к функции $\varphi = \frac{\rho_x}{\rho} v_x$в круге B_1.

Пусть функция $g(z) \in L_{2+l}(\sigma_1, B_1)$, $l > 0$, и $B_\varepsilon = \{z : |z| < 1 - \varepsilon\}$. Рассмотрим интеграл:

$$\iint_{B_1} g\bar{\varphi}_n \sigma_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{B_\varepsilon} g\bar{\varphi}_n \sigma_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{B_1 \backslash B_\varepsilon} g\bar{\varphi}_n \sigma_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Так как в круге B_ε у веса $\sigma_1(z)$ нет вырождения, то, очевидно, функции $\varphi_n(z)$ равномерно сходятся к функции $\varphi(z)$ в B_ε.

Так как $mes\ (B_1 \backslash B_\varepsilon) < \varepsilon$ при малом ε, то

$$\iint_{B_1 \backslash B_\varepsilon} g\bar{\varphi}_n \sigma_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \delta(\varepsilon) K_1, \tag{13}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0$.

По теореме Банаха–Алаоглу [8] о слабой компактности в рефлексивном банаховом пространстве, слабый предел φ последовательности $\{\varphi_n\}$ также лежит в пространстве $L_{\frac{4-4\delta}{3-\alpha-\delta}}(\sigma_1, B_1)$. Используя равномерную сходимость последовательности $\{\varphi_n\}$ на B_ε, получаем, с учётом неравенства (13), слабую сходимость $\{\varphi_n\}$ к функции φ.

Аналогично доказывается результат для последовательности $\{\psi_n\}$. □

Докажем теперь теорему о повышении показателя интегрируемости производных v_x, v_y. Впервые такого рода задача была рассмотрена для решения уравнения Бельтрами в работе Б. В. Боярского [9] (см. также [10]).

Теорема 1. *Пусть функция ρ удовлетворяет условию ρ, в котором α подчинено неравенствам:*

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Допустим, что существует квазиконформное в среднем отображение $w(z)$: $B_1 \to B_1$, являющееся обобщённым решением уравнения (2) *в круге B_1 с нормировкой* (12)*. Тогда производная $v_z(z)$ координатной функции $v(z)$ принадлежит шкале пространств $L_t(\operatorname{dist}^{\alpha_1}(z, \Gamma_0), B_1)$, в которой*

$$t = \frac{4(1-\delta)(2+\alpha_1)}{5 - 3\alpha + \alpha\delta - 2\delta + \delta^2}, \alpha_1 \in \left[\frac{1 + \alpha - \alpha\delta - \delta^2}{\alpha + \delta - 3}; 0\right],$$

где $0 < \delta < 1$ — фиксированное число.

Доказательство. Рассмотрим последовательность нормированных в соответствии с (12) K_n-квазиконформных отображений $w_n = u_n + iv_n$. Пусть $\omega_n := \rho_n u_n + iv_n$ — последовательность отображений, построенных по w_n, а ω_n^* — их продолжения в круг B_2 по правилу:

$$\omega^*(z) = \frac{1}{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \tag{14}$$

Ясно, что в круге B_2 имеет место представление И. Н. Векуа [1]:

$$\rho_n^* u_n^* + iv_n^* = F_n(z) - \frac{1}{\pi} \iint_{B_2} \frac{\rho_{n\bar{\varsigma}}^* u_n^*}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

где аналитические в круге B_2 функции $F_n(z)$ имеют вид:

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_2} \frac{\omega_n^*}{\varsigma - z} \mathrm{d}\varsigma.$$

Очевидно, что последовательность $\{\rho_n u_n + i v_n\}$ компактна в смысле равномерной сходимости внутри B_1.

Пусть $\Phi_n(z) = 2v_{nz}$. Ясно, что в круге B_1 верно равенство

$$\Phi_{n\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_{nx}}{\rho_n} v_{nx} + \frac{\rho_{ny}}{\rho_n} v_{ny}\right) := f_n.$$

Доопределим функции $\varphi_n = \frac{\rho_{nx}}{\rho_n} v_{nx}$ и $\psi_n = \frac{\rho_{ny}}{\rho_n} v_{ny}$ в круг B_2 по формулам:

$$\varphi_n^*(z) = \begin{cases} \varphi_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right), z \in B_2 \backslash B_1 \\ \varphi_n(z), z \in B_1 \end{cases}, \psi_n^*(z) = \begin{cases} \psi_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right), z \in B_2 \backslash B_1 \\ \psi_n(z), z \in B_1 \end{cases}. \quad (15)$$

В силу леммы 2 последовательность $\prod(\varphi_n + \psi_n)$ сходится поточечно к $\prod(\varphi + \psi)$ в круге B_1, поэтому последовательности $\{v_{nz\bar{z}}\}$ и $\{v_{nzz}\}$ компактны в смысле равномерной сходимости внутри B_1 и для предельной функции $v^*(z) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n^*(z)$ в области B_1 имеют место представления (см. лемму 2):

$$v_{z\bar{z}}^*(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_x}{\rho} v_x + \frac{\rho_y}{\rho} v_y\right),$$

$$v_{zz}(z) = F^{*'}(z) - \frac{1}{2\pi} \iint_{B_2} \left(\frac{\rho_\xi}{\rho} v_\xi + \frac{\rho_\eta}{\rho} v_\eta\right) \frac{1}{(\varsigma - z)^2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta. \quad (16)$$

Известно [11], что для весовых пространств с весовой функцией $\rho(z)$, удовлетворяющей условию теоремы 1, имеет место так называемая «весовая» теорема вложения в том случае, когда весовые пространства определяются весом из класса Макенхаупта. Как было сказано выше, производные $(v_z)_x$, $(v_{\bar{z}})_y$ принадлежат пространству $L_{t_1}(\sigma_1, B_1)$, где $\sigma_1(z) = [\mathrm{dist}(z, \Gamma_0)]^{1-\delta}$ и $t_1 = \frac{4-4\delta}{3-\alpha-\delta}$ с фиксированным δ: $0 < \delta < 1$. При этом вес $\sigma_1(z)$ является весом Макенхаупта.

Поэтому (см. [11, 12]) производные v_x, v_y принадлежат шкале весовых пространств $L_{t_2}(\omega_1^*, B_1)$, где

$$t_2 = \frac{4(1-\delta)(2+\alpha_1)}{5 - 3\alpha + \alpha\delta - 2\delta + \delta^2}, \omega_1^* = \mathrm{dist}^{\alpha_1}(z, \Gamma_0), \quad q \in [1; 2),$$

$$\alpha_1 \in \left[\frac{1 + \alpha - \alpha\delta - \delta^2}{\alpha + \delta - 3}; 0\right].$$

Докажем теперь теорему существования обобщённого решения уравнения (2), являющегося квазиконформным в среднем топологическим отображением круга B_1 на себя.

Теорема 2. *Пусть функция ρ удовлетворяет условию ρ, в котором α подчинено неравенствам:*

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Тогда существует последовательность K_n-квазиконформных отображений w_n, $w_n = u_n + i v_n$, $K_n = \sup\limits_{z\in B_1} \rho_n^{-1}(z)$, сходящаяся равномерно внутри B_1 вместе *со своими производными первого порядка к квазиконформному в среднем топологическому отображению $w = u + iv$ круга B_1 на себя, непрерывному вплоть до границы B_1 с нормировкой* (12). *Функции u, v являются решениями вырождающейся эллиптической системы* (1). *При этом для функции $\omega = \rho u + iv$ и её производной ω_z имеют место интегральные представления И. Н. Векуа* (8) *и* (9).

Доказательство. Пусть $\{\rho_n\}$ — последовательность функций из леммы 2, а $\{w_n\}$ — последовательность K_n-квазиконформных отображений, являющихся решениями уравнений (6) в круге B_1 с нормировкой (12).

Сходимость последовательности $\{w_n\}$ внутри B_1 была доказана в лемме 2. Покажем теперь, что предельная функция $w = u + iv$ осуществляет топологическое отображение круга B_1 на себя с соблюдением нормировки (12).

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $K_\varepsilon > 1$ такое, что отображения w_n являются K_ε-квазиконформными в области $B_1 \backslash \Gamma_0^\varepsilon$, $\Gamma_0^\varepsilon = \{\varsigma \in B_1 : \operatorname{dist}(\varsigma, \Gamma_0) \leqslant \varepsilon\}$, поэтому функция $u+iv$, являющаяся пределом таких отображений, является непрерывной в $B_1 \backslash \Gamma_0^\varepsilon$ и, значит, в $B_1 \backslash \bar{\Gamma}_0$. Покажем теперь, что функция v на $\bar{\Gamma}_0$ принимает значения непрерывной функции почти всюду на Γ_0.

Рассмотрим последовательность отображений $\omega_n = \rho_n u_n + iv_n$ и их продолжения по правилу (14). В работе [13] даны их следующие интегральные представления в круге B_1:

$$\omega_n(z) = \Phi_n(z) + \iint_{B_1} \left[K_1(z, \varsigma)\,\omega_{n\bar{\varsigma}}(\varsigma) + K_2(z, \varsigma)\,\overline{\omega_{n\bar{\varsigma}}(\varsigma)}\right] \mathrm{d}s_\varsigma \equiv$$
$$\equiv \Phi_n(z) + I_n(z), \quad (17)$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma v_n(\varsigma)\,\mathrm{d}t + \frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \rho_n u_n \frac{\varsigma + z}{\varsigma - z}\mathrm{d}t, \quad \varsigma = e^{it}, \quad (18)$$

здесь

$$K_1 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{z-\zeta}, K_2 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}.$$

Из (18) следует, что последовательность $\{\Phi_n\}$ сходится внутри B_1 к функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma v(\varsigma)\,\mathrm{d}t + \frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma \rho u \frac{\varsigma + z}{\varsigma - z}\mathrm{d}t, \quad \varsigma = e^{it}.$$

Используя те же методы, что и в лемме 2, легко показать, что последовательность $\{\omega_n\}$ компактна в смысле равномерной сходимости внутри B_1 и сходится к функции:

$$\omega(z) = \Phi(z) + \iint_{B_1} \left[K_1(z, \varsigma)\,\omega_{\bar{\varsigma}}(\varsigma) + K_2(z, \varsigma)\,\overline{\omega_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)}\right] \mathrm{d}s_\varsigma \equiv \Phi(z) + I(z).$$

Так как $v_{n\varsigma}$ равномерно ограничена в $L_2(B_1)$, то интеграл $\operatorname{Im} I(z)$ ограничен в $W^{1,2}(B_1)$. В силу сопряжённости ядер $K_1(z,\varsigma)$, $K_2(z,\varsigma)$ на границе Γ функция $\operatorname{Im} I(z)$ принимает в среднем нулевые граничные значения.

Очевидно, что предельная функция $\Phi = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n$ является непрерывной на $\partial B_1 \backslash \bar{\Gamma}_0$ и внутри Γ_0. При этом производные функции $\Phi(z)$ интегрируемы внутри Γ_0, что означает наличие пределов этой функции в её концевых точках. Предельные значения этой функции на множестве $\Gamma \backslash \Gamma_0$ в концевых точках Γ_0 существуют в силу топологических свойств отображения $u+iv$. Используя принцип Линделёфа [14], получаем непрерывность функции Φ в этих точках, а значит, на границе Γ. Поэтому функция v является обобщённым решением уравнения

$$\left(\frac{1}{\rho}v_x\right)_x + \left(\frac{1}{\rho}v_y\right)_y = 0,$$

принимающим на границе Γ в среднем значение непрерывной функции $\operatorname{Im}\Phi$.

В точках $z \in \Gamma\backslash\bar{\Gamma}_0$ функция v непрерывна. Для доказательства непрерывности этой функции в точках $z \in \bar{\Gamma}_0$ достаточно воспользоваться критерием Винера [11].

Перейдём теперь к исследованию непрерывности функции $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Последовательность $\{u_n\}$ равностепенно непрерывна в среднем на границе B_1. Следовательно, u принимает в среднем внутри Γ_0 значения непрерывной функции $\sqrt{1-v^2(z)}$ при $z \in \Gamma_0$ и $-\sqrt{1-v^2(z)}$ при $z \in \Gamma\backslash\Gamma_0$, и на $\Gamma\backslash\Gamma_0$ непрерывна как предел K_n-квазиконформных отображений.

Для доказательства непрерывности функции $u(z)$ в концевых точках Γ_0 применяется критерий Винера [11] для решения задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения

$$(\rho u_x)_x + (\rho u_y)_y = 0.$$

Функция $w = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = u + i\,v$ является, очевидно, однолистной [9], и осуществляет топологическое отображение круга $\bar{B}_1$ на себя.

Интегральные представления (8) и (9) для функции $\rho u + iv$ и её производной могут быть получены тем же способом, что и в лемме 2.

Нетрудно убедиться, что для предельной функции w имеет место нормировка (12). □

В теореме 1 была получена шкала пространств, которым принадлежат производные v_x, v_y. Следующая теорема даёт подобный результат для производных функции u.

Теорема 3. *Пусть функция ρ удовлетворяет условию ρ, в котором α подчинено неравенствам:*

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Допустим, что существует квазиконформное в среднем отображение $w(z) : B_1 \to B_1$, являющееся обобщённым решением уравнения (2) в круге B_1 с нормировкой (12). Тогда производная $u_z(z)$ координатной функции $u(z)$ принадлежит шкале пространств $L_s\left(\operatorname{dist}^k(z,\Gamma_0), B_1\right)$, в которой

$$s = \frac{4(1-\delta)(2+\alpha_1)(1-\delta+k)}{4(1-\delta)(2+\alpha_1)\alpha + (\alpha_1+1-\delta)(5-3\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2)},$$

где

$$\delta - 1 < k < \frac{4\alpha(1-\delta)(2+\alpha_1)}{5-3\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2} + \alpha_1,$$

$$\alpha_1 \in \left[\frac{1+\alpha-\alpha\delta-\delta^2}{\alpha+\delta-3}; 0\right],$$

здесь $0 < \delta < 1$ — фиксированное число.

Доказательство. Пусть $\{\rho_n\}$ — последовательность функций из леммы 2, а $\{w_n\}$ — последовательность K_n-квазиконформных отображений, являющихся решениями уравнений (6) в круге B_1 с нормировкой (12).

Сходимость последовательности $\{w_n\}$ внутри B_1 была доказана в лемме 2. Из теоремы 2 следует, что функция $u(z) \in C\left(\bar{B}_1\right)$. Используя шкалу весовых пространств для функции ∇v и систему уравнений (1), мы получаем принадлежность функции ∇u пространству $L_s\left(\operatorname{dist}^k(z, \Gamma_0), B_1\right)$

$$s = \frac{4(1-\delta)(2+\alpha_1)(1-\delta+k)}{4(1-\delta)(2+\alpha_1)\alpha + (\alpha_1+1-\delta)(5-3\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2)},$$

$$\delta - 1 < k < \frac{4\alpha(1-\delta)(2+\alpha_1)}{5-3\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2} + \alpha_1$$

и

$$\alpha_1 \in \left[\frac{1+\alpha-\alpha\delta-\delta^2}{\alpha+\delta-3}; 0\right],$$

здесь $0 < \delta < 1$ — фиксированное число. □

Замечание 2. В том же случае, когда $v_z \in L_t(B_1)$, $t = \frac{8(1-\delta)}{5-3\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2}$, то есть при $\alpha_1 = 0$, мы имеем принадлежность производной u_z пространству $L_s(B_1)$, $s = \frac{8(1-\delta)}{5+5\alpha+\alpha\delta-2\delta+\delta^2}$, $0 < \delta < 1$.

2. Решение сопряжённого (нелинейного) уравнения Бельтрами, вырождающегося на граничной дуге в случае $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

В теореме 3 при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ характеристика $K(z)$ является интегрируемой с квадратом. Поэтому отображение $w(z)$ является квазиконформным в среднем. В том случае, когда $\alpha > \frac{1}{2}$, отображение $w(z)$ не является таковым. Но, тем не менее, верна следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функция ρ удовлетворяет условию ρ, в котором α подчинено неравенствам:*

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Тогда существует последовательность K_n-квазиконформных отображений w_n, $w_n = u_n + iv_n$, $K_n = \sup\limits_{z \in B_1} \rho_n^{-1}(z)$, сходящаяся равномерно внутри B_1 вместе со своими производными первого порядка к квазиконформному топологическому отображению $w = u + iv$ круга B_1 на себя, непрерывному вплоть до границы B_1 с нормировкой (12). *Функции u, v являются решениями вырождающейся эллиптической системы* (1). *При этом для функции $\omega = \rho u + iv$ и её производной ω_z имеют место интегральные представления И. Н. Векуа* (8) *и* (9) *в круге B_1.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность K_n-квазиконформных отображений $w_n = u_n + iv_n$, являющихся решениями уравнений (6), в круге B_1 с нормировкой типа (12).

Пусть $\omega_n := \rho_n u_n + iv_n$, а ω_n^* — продолжения функций ω_n в круг B_2 по правилу (14). В силу рассматриваемого условия ρ мы имеем, что $\omega_{n\bar{z}}^* \in L_{2+l}(B_2)$, $l > 0$. Поэтому в круге B_2 имеет место представление И. Н. Векуа [1]:

$$\rho_n^* u_n^* + iv_n^* = F_n(z) - \frac{1}{\pi} \iint_{B_2} \frac{\rho_{n\bar{\zeta}}^* u_n^*}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta, \tag{19}$$

здесь $F_n(z)$ — аналитические в круге B_2 функции.

Функции $\rho^*_{n\bar{\varsigma}} u^*_n$ равномерно ограничены в $L_{2+l}(B_2)$, $l > 0$. Поэтому функции $g_n := \omega^*_n - F_n$ равностепенно непрерывны и ограничены в $\bar{B}_2$, а значит последовательность $\{g_n\}$ компактна в смысле равномерной сходимости в круге $\bar{B}_2$.

Последовательность $\{F_n\}$, очевидно, ограничена в $\bar{B}_2$ [1]. Поэтому последовательность $\{\rho_n u_n + iv_n\}$ компактна в смысле равномерной сходимости в круге $\bar{B}_1$.

Пусть $\rho u + iv$ — предел сходящейся подпоследовательности. В соответствие с вышесказанным, мы получаем, что $v(z) \in C\left(\bar{B}_1\right)$.

Функции $u_n(z)$ равностепенно непрерывны в среднем на границе ∂B_1. Поэтому предельная функция $u(z)$ в среднем принимает значения непрерывной функции, равной $\sqrt{1 - v^2(z)}$ при $z \in \Gamma_0$ и $-\sqrt{1 - v^2(z)}$ при $z \in \Gamma \backslash \Gamma_0$ [6]. Разрешая задачу Дирихле вида

$$(\rho u_x)_x + (\rho u_y)_y = 0,$$

$$u|_{\Gamma} = \begin{cases} \sqrt{1 - v^2(z)}, z \in \Gamma_0 \\ -\sqrt{1 - v^2(z)}, z \in \Gamma \backslash \Gamma_0 \end{cases},$$

с учётом критерия Винера [11], мы получаем, что функция $u(z)$ непрерывна в круге $\bar{B}_1$.

Итак, отображение $w = \lim\limits_{n \to \infty} w_n$ представляет собой квазиконформное топологическое отображение круга B_1 на себя. $\square$

В случае сильного вырождения мы имеем возможность получить дополнительную информацию об интегрируемости производных квазиконформных отображений. Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма, доказательство которой мы опускаем.

Лемма 4. *Пусть*

$$r(\varsigma) := \operatorname{dist}^{\alpha - 1}(\zeta, \Gamma_0), 0 < \alpha < 1,$$

$t = t(\varsigma)$ *— ограниченная в круге* B_1 *функция и* $z \in B_1$. *Тогда*

$$\left| \iint_{B_1} \frac{r(\varsigma)\, t(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \right| \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}^{1-\alpha}(z, \Gamma_0)} A(z),$$

где $A(z) \in L_p(B_1)$, $\forall p$, $p > 1$.

Докажем теперь теорему об улучшенной интегрируемости производных квазиконформных отображений.

Теорема 5. *Пусть функция* ρ *удовлетворяет условию* ρ, *в котором* α *подчинено неравенствам:*

$$\frac{3 + 10\delta - \delta^2}{5 + 9\delta} < \alpha < 1.$$

Пусть $w(z) : B_1 \to B_1$ *— обобщённое решение уравнения* (2) *в круге* B_1 *с нормировкой* (12). *Тогда координатные функции* $u(z)$ *и* $v(z)$ *принадлежат пространствам:*

$$v(z) \in W^{1,\tau}(B_1), u(z) \in W^{1,s}(B_1),$$

где

$$\tau = \frac{1 - \delta}{(1 - \alpha)(1 + \delta)}, s = \frac{1 - \delta}{1 + \delta(1 - \alpha)}, \quad 0 < \delta < 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функции $\omega_n = \rho_n u_n + i v_n$. Пусть ω_n^* — их продолжения в круг B_2 по правилу (14). В круге B_2 для ω_n^* верны представления И. Н. Векуа (19).

Согласно лемме 2 для предельной функции $\omega = \rho u + iv$ в круге B_1 верны представления (8) и (9).

Так как

$$(\rho\, u + iv)_z \equiv v_y + iv_x + \frac{1}{2}\left(\rho_x u - i\rho_y u\right) \equiv 2iv_z + \rho_z u,$$

то, в силу леммы 4, производные v_x, v_y принадлежат тому же пространству, что и функция

$$\frac{1}{\operatorname{dist}^{1-\alpha}(z, \Gamma_0)} A(z)\,.$$

Легко показать, что при $\tau = \frac{1-\delta}{(1-\alpha)(1+\delta)}$ и $\frac{3+10\delta-\delta^2}{5+9\delta} < \alpha < 1$ функция $v(z)$ принадлежит пространству $W^{1,\tau}(B_1)$.

Используя систему уравнений (1), получаем, что для $s = \frac{\tau(1-\delta)}{\tau\alpha+1-\delta}$ функция $u(z)$ принадлежит пространству $W^{1,s}(B_1)$. □

Замечание 3. Теорема верна и при $0 < \alpha < 1$. При $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ верно, что $v(z)$ принадлежит той же шкале пространств, что и в теореме 1, в которой показатель t даёт лучшую интегрируемость производной v_z при α, близких к нулю. Видно также, что производные v_x, v_y интегрируемы со сколь угодно большой степенью при достаточно высокой скорости вырождения веса.

В том же случае, когда $\alpha > 1$ и задача Дирихле

$$(\rho u_x)_x + (\rho u_y)_y = 0$$

разрешима таким образом, что все точки дуги вырождения Γ_0 являются регулярными, мы можем доказать существование квазиконформных отображений, являющихся решением уравнения (2) способами, аналогичными представленным ранее. Такого рода отображения, очевидно, не являются квазиконформными в среднем. В том случае, когда мы не располагаем возможностью доказать непрерывность функции $u(z)$ с помощью теории краевых задач, мы, тем не менее, можем утверждать, что существует отображение единичного круга на единичный круг с выброшенными горизонтальными отрезками, имеющими начало на границе Γ и представляющими собой предельные множества функции $w(z)$ в точках, соответствующих точкам на дуге Γ_0.

В данной работе рассматривалась область с просто устроенной границей. Проблемы, возникающие в вырожденном случае в связи со сложным устройством границы, обсуждаются в работе В. М. Миклюкова [15].

Пусть $g = g(w)$ — обратное отображение к $w = w(z)$. Очевидным образом производные g_w, $g_{\bar{w}}$ принадлежат пространству $L_2(B_1)$ при $0 < \alpha < 1$. Для других α вопрос остаётся открытым. В работе С.К. Водопьянова [16] рассматриваются необходимые и достаточные условия интегрируемости обратного отображения w в терминах ассоциированного отображения w^*, действующего в пространстве дифференциальных форм, заданных на касательных пространствах многообразий, связанных с ним.

По-видимому, интересно было бы установить аналогичные теоремы для случая отображений с неограниченными характеристиками в терминах отображения w^*, действующего в весовых пространствах.

Заключение

Итак, нами рассмотрены различные случаи вырождения эллиптических систем, представленных в комплексной форме сопряжённым (нелинейным) уравнением Бельтрами.

Нами доказаны теоремы об интегрируемости производных квазиконформных отображений, определяемых решениями этих систем. Также нами отмечено, что в случае слабого вырождения (α находится вблизи нуля) более точные оценки интегрируемости определяются топологическими свойствами решений. В том же случае, когда скорость вырождения достаточно велика (α находится вблизи единицы), на степень интегрируемости производных решений оказывают большее влияние аналитические свойства их интегральных представлений.

Литература

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988. — 512 с. [Vekua I. N. Generalized Analytic Functions. — Moscow: Nauka, 1988. — 512 p.]
2. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. Перевод с английского В. В. Кривова / под ред. В. А.Зорича, Б. В. Шабата. — М.: Мир, 1969. — 133 с. [Ahlfors L. Lectures on Quasiconformal Mappings. — New Jersey: D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, 1966. — 133 p.]
3. *Щербаков Е. А.* Гомеоморфные решения одной вырождающейся эллиптической системы // Известия ВУЗов. Математика. — 1976. — № 10 (173). — С. 93–96. [Shcherbakov E.A. Homeomorphic Solutions of Degenerate Elliptic System // Izvestiya VUZov, Matematics. — 1976. — No. 10 (173). — P. 93–96]
4. *Малаксиано Н. А.* О точных вложениях классов Геринга в классы Макенхаупта // Математические заметки. — 2001. — Т. 70, № 5. — С. 742–750. [Malaksiano N.A. Exact Inclusions of Gehring Classes in Muckenhoupt Classes // Mathematical Notes. — 2001. — V. 70. — P. 742–750]
5. *Митюк И. П., Шеретов В. Г., Щербаков Е. А.* Плоские квазиконформные отображения. — Краснодар: КубГУ, 1989. — 84 с. [Mitiyuk I. P., Scheretov V. G., Shcherbakov E. A. Plane Quasiconformal Mappings. — Krasnodar: KubSU, 1989. — 84 p.]
6. *Вашарин А. А.* Граничные свойства функций класса $W_2^1(\alpha)$ и их приложение к решению одной краевой задачи математической физики // Изв. АН СССР, Сер. Матем. — 1959. — № 23. — С. 421–454. [Vascharin A. A. Boundary Properties of Functions of the Space $W_2^1(\alpha)$ and Their Application to Boundary-Value Problems of Mathematical Physics // Izvestiya AN SSSR, Ser. Math. — 1959. — No. 23. — P. 421–454]
7. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 588 с. [Riesz Frederic., Sz.-Nagy Bela. Lecons D'analyse Fonctionnelle. — Budapest: Akademiai KIADO, 1972. — 588 p.]
8. *Хатсон В., Пим Д.* Приложения функционального оператора и теории операторов. Перевод с англ. Н.И. Плужниковой и В.И. Авербуха. — М.: Мир, 1983. — 432 с. [Hutson V. C. L, Pim J. S. Applications of Functional Analysis and Operator Theory. — University of Sheffield, 1980. — 432 p.]
9. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. — 1957. — Т. 43 (85), № 4. — С. 451–503. [Boyarski B. V. Generalized Solutions of First Order Differential Equations of Elliptic Type with Discontinuous Coefficients // Math. sbornik. — 1957. — Vol. 43 (85), No. 4. — P. 451–503]
10. *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane. — Princeton University press, 2009. — 696 p.
11. *Stredulinsky E. W.* Weighted Inequalition and Degenerate Elliptic Partial Differential Equations // Lachtes Notes in Mathematics Sprienger. — 1984. — No 1074.

12. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. Анализ. — 1983. — № 21. — С. 42–129. [Dynkin E. M., Osilenker B. P. Weighted Estimates for Singular Integrals and Their Applications // Science and tech. Review. Ser. Math. Analysis. — 1983. — No. 21. — P. 42–129]
13. *Gergen J. J., Dressel F. G.* Mapping by p – Regular Functions // Duke math. J. — 1951. — Vol. 18, No 1. — Pp. 185–210.
14. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. — М.: Наука, 1968. — 471 с. [Evgrafov M. A. Analityc Functions. — Moscow: Nauka, 1968. — 471 p.]
15. *Миклюков В. М.* Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения. — Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2010. — 305 с. [Miklyukov V. M. Function Weighted Sobolev Classes, Anisotropic Metric and Degenerate Quasi-Conformal Mappings. — Volgograd: VolSU, 2010. — 305 p.]
16. *Водопьянов С. К.* Пространства дифференциальных форм и отображения с контролируемым искажением // Изв. РАН. Сер. Матем. — 2010. — Т. 74, № 4. — С. 5–32. [Vodop'yanov S. K. Spaces of Differential Forms and Mappings with Controlled Distortion // Math. RAS. Ser. Math. — 2010. Vol. 74, No. 4. — P. 5–32]

UDC 517.956.25

A Study of the Integrability of the Derivatives of the Solutions of the Conjugate (nonlinear) Beltrami Equation

J. V. Terentieva

Chair of «Theory of the functions»
Kuban State University
Stavropolskaya str., 149, Krasnodar, 350040, Russia

In this article we study degenerate elliptic equations. Using integral representations for the function posessing generalised derivatives we prove theorems of existence of solutions of these equations in the class of quasiconformal mappings in the mean, and in the more general case. We prove higher integrability of the solutions of these equations in the case of the boundary degeneration.

Key words and phrases: conjugate (nonlinear) Beltrami equation, degenerate elliptic equations, Muckenhoupt's weight function, weighted Sobolev's space, embedding theorems, bounded singular operator in weighted space, quasiconformal mappings.