

УДК 519.254

Методы оценки параметров колец черенковского излучения в детекторе RICH для эксперимента CBM

А. С. Айриян*, В. В. Иванов*, С. А. Лебедев[†],
Г. А. Ососков*, Н. И. Чернов[‡]

* Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д.6, Дубна, Московская область, 141980, Россия

[†] Центр имени Гельмгольца по исследованию тяжёлых ионов
64291 Дармштадт, Германия

[‡] Кафедра математики
Университет Алабамы в Бирмингеме
1300 Университетский бульвар, Бирмингем, 35294-1170, Алабама, США

В работе рассмотрены два метода оценки параметров колец черенковского излучения в детекторе RICH для эксперимента CBM. Приведены результаты сравнительного анализа этих методов на модельных данных.

Ключевые слова: оценка параметров эллипса, кольца черенковского излучения, детектор RICH, эксперимент CBM.

1. Введение

На строящемся в Дармштадте (Германия) ускорительном комплексе FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research) создаётся установка CBM (Compressed Baryonic Matter). Она предназначена для экспериментального изучения новых состояний ядерной материи, образующихся в ядро-ядерных соударениях при энергии пучка $8 \div 45$ ГэВ на нуклон [1].

Исследование процессов рождения лёгких векторных мезонов и чармония, распадающихся на лептонную пару, является одной из ключевых задач эксперимента CBM. Для идентификации электронов в диапазоне импульсов $0,5 \div 10$ ГэВ/с в CBM будет использоваться детектор черенковского излучения RICH (Ring Imaging Cherenkov). В дополнении к RICH-у электроны с импульсами выше $1,5$ ГэВ/с будут идентифицироваться детектором переходного излучения TRD (Transition Radiation Detector) [1].

Идентификация частиц, регистрируемых детектором RICH, включает в себя процедуру распознавания и реконструкции колец от черенковского излучения, а также определение их параметров [2]. Указанная задача серьёзно осложняется высокой множественностью частиц в каждом событии, ведущей к большому числу перекрывающихся колец в области фокальной плоскости RICH-а. В этой связи важно разработать быстрые и устойчивые алгоритмы реконструкции колец, позволяющие с высокой точностью оценить их параметры [1].

Обычно для описания колец черенковского излучения в RICH детекторах в качестве математической модели используется окружность (см., например, [3–5]). В детекторе CBM RICH плоскость, детектирующая фотоны от колец черенковского излучения, не совпадает в точности с фокальной плоскостью сферических зеркал. Кроме того, в области RICH-а присутствует небольшое магнитное поле от расположенного перед ним дипольного магнита, которое хоть и незначительно, но искривляет траектории заряженных частиц. Все это приводит к тому, что фотоны черенковского излучения от отдельной частицы распределяются на детекторующей плоскости не по окружности, а скорее по эллипсу. Проведённый

Статья поступила в редакцию 21 октября 2009 г.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 08-01-00800. Авторы выражают глубокую благодарность к.ф.-м.н. Багиняну С.А. и к.ф.-м.н. Григоряну О.А. за полезные дискуссии и замечания при подготовке данной работы.

анализ данных, полученных путём моделирования процесса регистрации электронов в детекторе RICH, показал, что кольца черенковского излучения достаточно хорошо аппроксимируются эллипсом с эксцентриситетом $\varepsilon = 0,43$ [2].

В работе [6] был разработан метод для оценки параметров эллипса. В его основу положена минимизация функционала ошибок (смотри ниже раздел 2.1). Для минимизации указанного функционала использовался пакет MINUIT [7]. Этот метод в дальнейшем будем обозначать как MF (Minuit Fitter).

В настоящей работе развит другой подход для оценки параметров эллипса, который основан на минимизации функционала, предложенного в работе [8]. Далее будем обозначать этот метод как TF (Taubin Fitter). Нами будет проведено сравнение этих методов и показано, что новый метод имеет ряд преимуществ по сравнению с методом MF.

2. Методы определения параметров эллипса

2.1. Метод MF

В работе [2] реализован алгоритм оценки параметров эллипса на основе подхода, развитого в работе [6]; при этом весовые коэффициенты в функционале ошибок были заданы равными единице.

В работе [6] используется кеплеровское представление уравнения эллипса:

$$d_1 + d_2 = 2a, \quad (1)$$

где $d_1 = \sqrt{(x - x_{F1})^2 + (y - y_{F1})^2}$ и $d_2 = \sqrt{(x - x_{F2})^2 + (y - y_{F2})^2}$, а (x_{F1}, y_{F1}) и (x_{F2}, y_{F2}) являются фокусами эллипса. Определяя невязку между i -ой точкой измерения и модельной кривой в виде $\rho_i = d_1(x_i, y_i) + d_2(x_i, y_i) - 2a$, минимизируем следующий функционал ошибок:

$$L(x_{F1}, y_{F1}, x_{F2}, y_{F2}, a) = \sum_{i=1}^n \rho_i^2, \quad (2)$$

где n — число отсчётов на рассматриваемом кольце черенковского излучения.

При минимизации данного функционала использовался пакет MINUIT. Начальные значения для искомых параметров при инициализации MINUIT-а определялись следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 5; \\ x_{F1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2}a; \\ x_{F2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2}a; \\ y_{F1} = y_{F2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \end{array} \right. \quad (3)$$

Вычисленный таким образом вектор параметров $\mathbf{F} = (x_{F1}, y_{F1}, x_{F2}, y_{F2}, a)^T$, отвечающих минимуму функционала (2), преобразовывался затем в вектор новых

параметров $\mathbf{P} = (a, b, x_c, y_c, \varphi)^T$:

$$\begin{cases} a = a; \\ b = \sqrt{a^2 - \sqrt{(x_{F1} - x_{F2})^2 + (y_{F1} - y_{F2})^2}}; \\ x_c = (x_{F1} + x_{F2})/2; \\ y_c = (y_{F1} + y_{F2})/2; \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y_{F2} - y_{F1}}{x_{F2} - x_{F1}}\right), \end{cases} \quad (4)$$

где φ — угол наклона большей полуоси эллипса к оси OX .

Это преобразование позволяет получить величины большой a и малой b полуосей эллипса, которые нужны для идентификации электронов в RICH детекторе.

Недостатки рассмотренного метода: 1) использование громоздкого пакета MINUIT для минимизации функционала ошибок, 2) необходимость задания хорошего начального приближения для того, чтобы обеспечить сходимость процесса минимизации [2].

2.2. Taubin Fitter

Возьмём в качестве математической модели для описания результатов измерений кривую второго порядка $P(x, y) = 0$. В общем случае, для оценки параметров модели, необходимо минимизировать сумму квадратов расстояний от измеренных точек до модельной кривой:

$$\mathcal{S}(x_i, y_i, \Theta) = \sum_{i=1}^n d_i^2, \quad (5)$$

где Θ — вектор параметров модели, причём для кривой второго порядка $\Theta = (A, B, C, D, E, F)^T$.

В результате минимизации функционала $\mathcal{S}(x_i, y_i, \Theta)$ получаем кривую второго порядка, наиболее адекватно отображающую результаты измерений. Но в таком представлении задача не всегда поддаётся однозначному решению за разумное время. На практике для преодоления указанной проблемы накладываются дополнительные условия.

В частности, в работах [8–10] для решения указанной проблемы используется линейная аппроксимация расстояния от измеренной точки до модельной кривой:

$$\frac{\|P(x_i, y_i, \Theta)\|}{\|\nabla P(x_i, y_i, \Theta)\|} = d_i + O(d_i^2). \quad (6)$$

В этом случае функционал (5) принимает следующий вид:

$$\mathcal{P}(x_i, y_i, \Theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\|P(x_i, y_i, \Theta)\|^2}{\|\nabla P(x_i, y_i, \Theta)\|^2}, \quad (7)$$

где градиент функции $P(x, y)$ выражается следующим образом:

$$\nabla P(x_i, y_i, \Theta) = \begin{pmatrix} 2Ax_i + By_i + D \\ 2Cy_i + Bx_i + E \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Оценка параметров кривых второго порядка, полученная при минимизации (7), называется взвешенно-градиентной оценкой [8–10]:

$$\mathcal{P}(x_i, y_i, \Theta) = \sum_{i=1}^n \omega_i [P(x_i, y_i, \Theta)]^2, \quad (9)$$

где $\omega_i = 1/(\|\nabla P(x_i, y_i, \Theta)\|^2)$.

В работе [8] предложено заменить функционал (7) на:

$$\mathcal{L}(x_i, y_i, \Theta) = \frac{\sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i, \Theta)]^2}{\sum_{i=1}^n \|\nabla P(x_i, y_i, \Theta)\|^2}. \quad (10)$$

Тогда $\omega = 1/\left(\sum_{i=1}^n \|\nabla P(x_i, y_i, \Theta)\|^2\right)$ будет общим для всех точек, что значительно упрощает процедуру минимизации.

Положим $\sum_{i=1}^n \|\nabla P(x_i, y_i, \Theta)\|^2 = 1$, тогда выражение (10) примет следующий вид:

$$\mathcal{L}(x_i, y_i, \Theta) = \sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i, \Theta)]^2. \quad (11)$$

В матричной форме задача минимизации выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = \Theta^T \mathbf{M} \Theta \Rightarrow \min, \text{ при } \Theta^T \mathbf{B} \Theta = 1, \quad (12)$$

где $\sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i, \Theta)]^2 = \Theta^T \mathbf{M} \Theta$ и $\sum_{i=1}^n \|\nabla P(x_i, y_i, \Theta)\|^2 = \Theta^T \mathbf{B} \Theta$.

Отсюда следует, что

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{xxxx} & M_{xxxy} & M_{xxyy} & M_{xxx} & M_{xxy} & M_{xx} \\ M_{xxxy} & M_{xxxy} & M_{xyyy} & M_{xxy} & M_{xxy} & M_{xy} \\ M_{xxyy} & M_{xyyy} & M_{yyyy} & M_{xyy} & M_{yyy} & M_{yy} \\ M_{xxx} & M_{xxy} & M_{xyy} & M_{xx} & M_{xy} & M_x \\ M_{xxy} & M_{xxy} & M_{yyy} & M_{xy} & M_{yy} & M_y \\ M_{xx} & M_{xy} & M_{yy} & M_x & M_y & N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \cdot M_{xx} & 2 \cdot M_{xy} & 0 & 2 \cdot M_x & 0 & 0 \\ 2 \cdot M_{xy} & M_{xx} + M_{yy} & 2 \cdot M_{xy} & M_y & M_x & 0 \\ 0 & 2 \cdot M_{xy} & 4 \cdot M_{yy} & 0 & 2 \cdot M_y & 0 \\ 2 \cdot M_x & M_y & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & M_x & 2 \cdot M_y & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $M_{xxxx} = \sum_{i=1}^N x_i^4$, $M_{xyyy} = \sum_{i=1}^N x_i y_i^3$, $M_{xy} = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ и т.д.

Задача (12) решается методом множителей Лагранжа:

$$\mathcal{F}(\Theta, \eta) = \Theta^T \mathbf{M} \Theta - \eta \cdot (\Theta^T \mathbf{B} \Theta - 1). \quad (13)$$

Дифференцируя $\mathcal{F}(\Theta, \eta)$ по вектору Θ и приравнивая производную к нулю, получим обобщённую задачу на собственные значения:

$$\mathbf{M}\Theta - \eta \cdot \mathbf{V}\Theta = \mathbf{0}. \quad (14)$$

В задаче (14) обобщённый собственный вектор, соответствующий минимальному положительному обобщённому собственному значению, даёт минимум функционала (10) [8]. Вектор Θ является вектором параметров кривой второго порядка и легко преобразуется в вектор параметров $\mathbf{P} = (a, b, x_c, y_c, \varphi)^T$.

3. Сравнительный анализ методов

Рассмотренные выше методы оценки параметров эллипса тестировались на двух выборках.

В первом случае моделировались 10^5 эллипсов с полуосями $a = 6, 2$ и $b = 5, 6$ и центром $x_c = y_c = 0$. Случайным образом генерировалось число точек на эллипсе, а к координатам каждой точки добавлялась случайная величина, распределённая по нормальному закону $N(0, \sigma)$ с $\sigma = 0, 3$, имитируя измерительную ошибку. Разброс числа точек на эллипсе и величина ошибки в определении их координат выбирались на основе априорной информации, полученной в результате моделирования процесса регистрации электронов детектором СВМ RICH [1].

На рис. 1–2 представлены результаты тестирования обоих методов. Как видно из рис. 1, с помощью метода TF на вычисления тратится в $5 \div 25$ раз меньше времени¹ по сравнению с методом MF. Кроме того, оценки параметров, получаемые с помощью TF-метода, примерно в два раза ближе к истинным в среднем в смысле евклидовой нормы рис. 2.

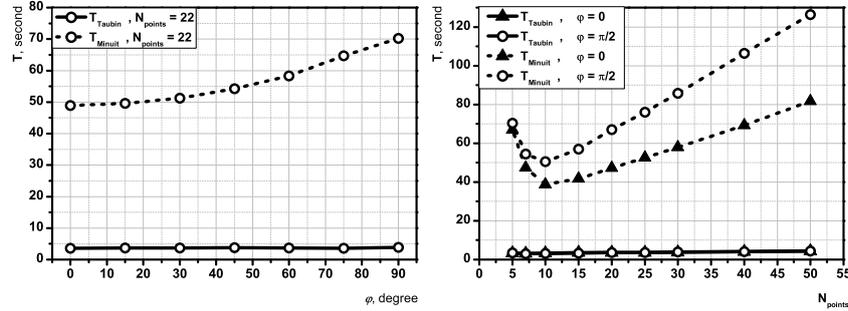


Рис. 1. Зависимость времени вычислений MF и TF от угла наклона главной диагонали эллипса (слева) и количества точек на эллипсе (справа) для 10^5 эллипсов

Во втором случае для тестирования использовались модельные данные, которые были получены следующим образом. Вначале генератором UrQMD [11] моделировался акт первичного ядро-ядерного взаимодействия, а затем вторичные частицы протаскивались через всю установку СВМ с помощью программы GEANT [12], в том числе, с учётом регистрации заряженных частиц детектором RICH.

На этих модельных данных оценивалась эффективность процедуры распознавания колец черенковского излучения, а также точность определения большой и малой полуосей эллипса.

¹Вычисления проводились на компьютере с процессором Intel Core 2 Duo с частотой 2,13 ГГц

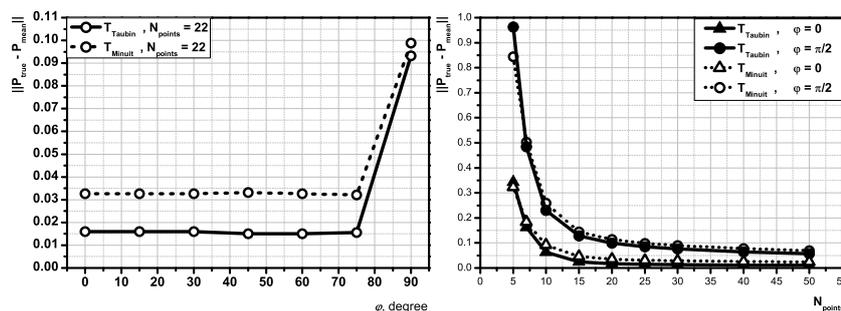


Рис. 2. Зависимость нормы $\|P_{true} - \hat{P}_{mean}\|$ от угла наклона главной диагонали эллипса (слева) и количества точек на эллипсе (справа)

На рис. 3 представлены эффективности распознавания колец в зависимости от импульса регистрируемой частицы. На самих графиках сложно заметить разницу между эффективностями для разных методов; просто заметим, что средняя эффективность при использовании для MF метода составляет 90,33%, а для метода TF равняется 93,02%, т.е. на 2,69% выше.

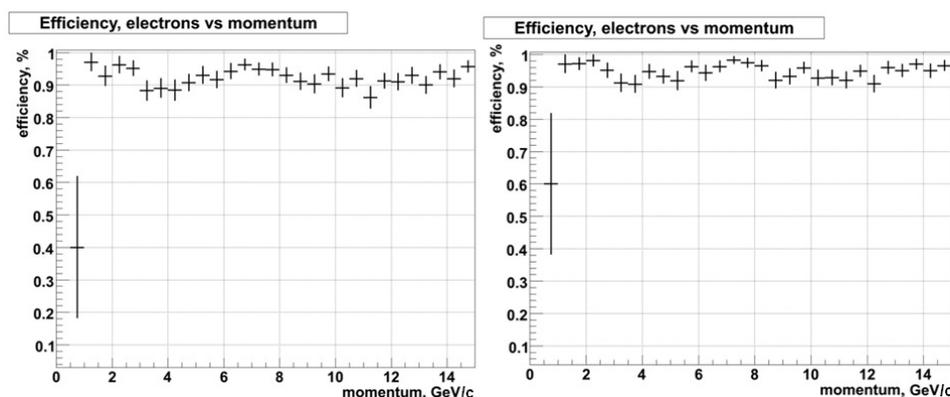


Рис. 3. Эффективности распознавания колец в зависимости от импульса электрона для MF (слева) и TF (справа) методов

На рис. 4–5 приведены гистограммы точности восстановления большой и малой полуосей эллипсов для MF и TF методов соответственно. Из этих распределений видно, что оба метода дают близкие результаты.

4. Заключение

В работе развит альтернативный подход для оценки параметров колец черенковского излучения TF, основанный на методе, предложенном в [8]. Ниже приведены результаты сравнительного анализа MF и TF методов:

- скорость вычислений параметров эллипса методом TF в 5 ÷ 25 раз превышает скорость вычислений с помощью MF метода (см. рис. 1);
- точность оценки параметров эллипса с помощью TF метода приблизительно в два раза превышает точность, достигаемую методом MF (см. рис. 2);

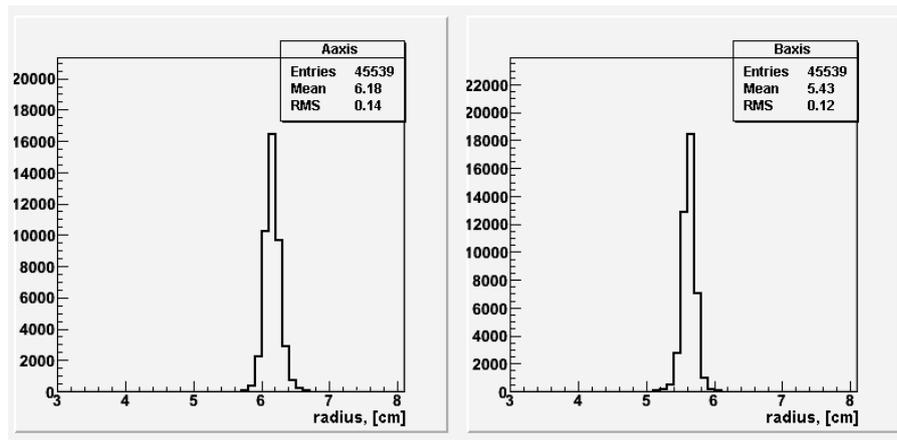


Рис. 4. Гистограммы точности восстановления большой (слева) и малой полуосей (справа) эллипсов с помощью метода MF

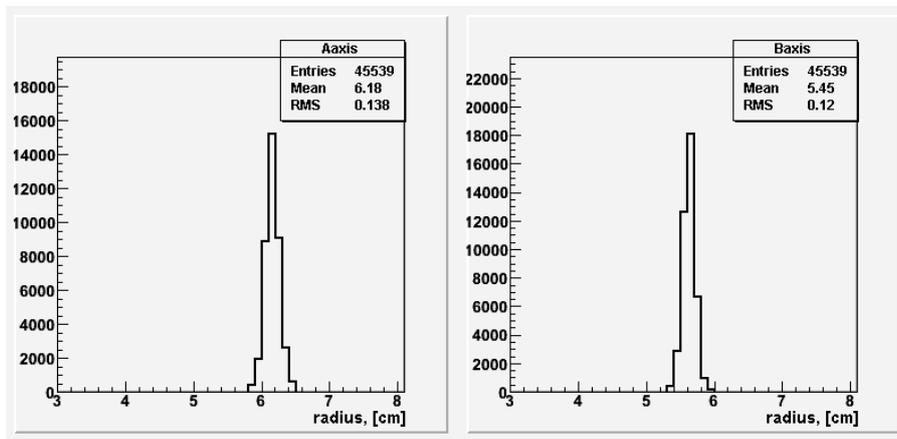


Рис. 5. Гистограммы точности восстановления большой (слева) и малой полуосей (справа) эллипсов с помощью метода TF

- эффективность процедуры распознавания электронных колец при использовании метода TF в среднем на 2,69% выше по сравнению с использованием MF метода (см. рис. 3).

Приведённые результаты наглядно демонстрируют преимущества метода TF по сравнению с методом MF. Однако следует заметить, что с помощью метода TF мы получаем параметры кривой второго порядка в общем виде, которая может не всегда отвечать эллипсу. Проведённая нами проверка показала, что такие случаи действительно возможны, хотя очень редки. В то же время, так как в методе MF в качестве модели взят эллипс, то на выходе он однозначно даёт нам оценки малой и большой полуосей эллипса, что можно считать преимуществом MF в сравнении с TF методом.

Оба метода включены в программную среду CBM ROOT [13, 14] и активно используются участниками коллаборации CBM.

Литература

1. The CBM Collaboration. Compressed Baryonic Matter Experiment. Technical Status Report.: Techrep / GSI. — Darmstadt, 2005. — <http://www.gsi.de/documents/DOC-2005-Feb-447-1.pdf>.

2. *Lebedev S. A., Ososkov G. A.* Fast Algorithms for Ring Recognition and Electron Identification in the RICH Detector of the CBM Experiment // *Physics of Particles and Nuclei, Letters.* — 2009. — Vol. 6, No 2(151). — Pp. 258–282.
3. *Agakichieva G. et al.* Cherenkov Ring Fitting Techniques for the CERES RICH Detectors // *NIM in Phys. Res. Sec. A.* — 1996. — Vol. 371, No 1-2. — Pp. 243–247.
4. *Chernov N., Kolganov E., Ososkov G.* Robust Methods for RICH Ring Recognition and Particle Identification // *NIM in Phys. Res. Sec. A.* — 1999. — Vol. 433, No 1–2. — Pp. 274–278.
5. *Lester C. G.* Trackless Ring Identification and Pattern Recognition in Ring Imaging Cherenkov (RICH) Detectors // *NIM in Phys. Res. Sec. A.* — 2006. — Vol. 560, No 2. — Pp. 621–632.
6. *Chernova N., Ososkov G., Silin I.* Robust Fitting of Ellipses to Non-Complete and Contaminated Data // *Czech. J. Phys.* — 2000. — Vol. 50, No S1. — Pp. 347–354.
7. *James F.* — MINUIT. CERN Program Library Long Write Up. — D506.
8. *Taubin G.* Estimation of Planar Curves, Surfaces and Nonplanar Space Curves Defined by Implicit Equations, with Applications to Edge and Range Image Segmentation // *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence.* — 1991. — Vol. 13, No 11. — Pp. 1115–1138.
9. *Sampson P. D.* Fitting Conic Sections to very Scattered Data: an Iterative Refinement of the Bookstein Algorithm // *Computer Graphics and Image Processing.* — 1982. — Vol. 18. — Pp. 97–108.
10. *Zhang Z.* Parameter Estimation Techniques: A Tutorial with Application to Conic Fitting // *International Journal of Image and Vision Computing.* — 1997. — Vol. 15. — Pp. 59–76.
11. *Bass S. A. et al.* Microscopic Models for Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions // *Prog. Part. Nucl. Phys.* — 1998. — Vol. 41. — Pp. 225–370.
12. *Allison J. et al.* Geant4 Developments and Applications, Nuclear Sciences // *IEEE Transactions on Nuclear Science.* — 2006. — Vol. 53. — Pp. 270–278.
13. FairRoot — Simulation and Analysis Framework. — <http://fairroot.gsi.de/>.
14. The FAIR Simulation and Analysis Framework / D. Bertini, M. Al-Turany, I. Koenig, F. Uhlig // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2008. — Vol. 119. — In CHEP'07. IOP Publishing 032011.

UDC 519.254

Methods for Estimation of the Cherenkov RING Parameters in the RICH Detector for the CBM Experiment at Fair

A. S. Ayriyan*, V. V. Ivanov*, S. A. Lebedev[†], G. A. Ososkov*,
N. I. Chernov[‡]

* *Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

[†] *GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH
Darmstadt, Germany 64291*

[‡] *Department of Mathematics
University of Alabama at Birmingham
1300 University Blvd., Birmingham, AL 35294-1170, Alabama, USA*

Two methods for the estimation of the cherenkov ring parameters in the RICH detector of the CBM experiment are presented. Simulation study have been done to compare developed methods.

Key words and phrases: ellipse parameters estimation, cherenkov rings, RICH detector, CBM experiment.