УДК 517.977.56:519.7

Оптимальное управление процессом электронагрева

В. В. Дикусар*, **М. Вуйтович**†
* *ВЦ им. А.А. Дородницына РАН*
119333, Москва, ул. Вавилова, 40
† *Радомский политехнический институт, г. Радом, Польша*

Для класса сложных нелинейных многомерных краевых задач оптимального управления взаимосвязанными электромагнитными и тепловыми полями предложен эффективный численно-аналитический метод (ЧАМ) решения параболического уравнения теплопроводности. ЧАМ применим также для эллиптических уравнений электромагнитного поля. Идея метода основана на аппроксимации нелинейного решения собственными функциями специально построенного простого линейного оператора с использованием сглаживающих свойств обратного оператора краевой задачи. Для поиска оптимального управления применяются прямые методы спуска в пространстве управлений с использованием метода продолжений решений по параметру, методов аппроксимации и случайного поиска.

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи, уравнение теплопроводности, уравнение Максвелла, оптимальное управление, численно-аналитический метод, метод введения и возмущения параметров, продолжение решений по параметру.

1. Предпосылки разработки численно-аналитического метода

С точки зрения синтеза оптимального управления можно выделить два больших класса задач. В первом из них важен учёт тонкой структуры поля в области локальных возмущений (например, процессы с подвижной границей с фазовыми превращениями). Здесь при использовании численных методов требуется введение неравномерных мелких сеток или сгущение узлов конечных элементов, что может создать предпосылки неустойчивости вычислительной схемы.

В другом классе задач вычисление функционалов цели оптимального управления не требует знания тонкой структуры поля в области локальных возмущений. Примером могут служить задачи нагрева токопроводящих тел (металлов, порошков, композитов) в электромагнитном поле. Для этого класса допустимо и целесообразно сглаживание по объёму локальных возмущений поля в вычислительных схемах. Сказанное относится в равной степени и к численным и к аналитическим методам решения краевых задач оптимизации. В принципе возможны следующие подходы к сглаживанию:

- полное осреднение нелинейных коэффициентов в расчётной области интегрирования, т.е. замена нелинейных функций константами;
- кусочно-постоянная аппроксимация указанных нелинейных функций;
- приближённый учёт нелинейных коэффициентов (их аппроксимация функциями координат и времени), т.е. сведение к линейным задачам.

Авторы предлагают использование третьего принципа сглаживания с применением методов продолжения решений по параметру и прогнозом последующих приближений.

2. Модели тепловых и электромагнитных полей

Основные предложения в отношении построения модели теплового состояния объекта связаны с интегральной формой представления нелинейного решения

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №09-01-90425,08-01-90101.

начально-краевой задачи в виде рядов по собственным функциям эллиптического оператора, где коэффициенты разложения выражаются через интегралы по объёму нагреваемого тела Ω. Для этого исходное описание теплового состояния формулируется в виде нелинейного параболического уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(C_p\left(Q\right)\cdot\rho_T\left(Q\right)\cdot Q\right)=\operatorname{div}\left[\lambda\left(Q\right)\nabla Q\right]+F\left(\vec{x},t\right);\\ \vec{x}\in\Omega,\quad t\geqslant 0,\quad s=1,2,3,\ldots,M;\\ \vec{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right),\quad t\in\left[0,t^*\right],\quad \Omega'=\bar{\Omega}\times\left[0,t^*\right]\in E^4,\end{gathered}\tag{1}$$

где Q — скалярная функция теплового состояния объекта (температура); ρ_T — плотность тела; C_p — теплоёмкость при постоянном давлении; λ — коэффициент теплопроводности; $F\left(\vec{x},t\right)$ — удельная объёмная мощность тепла (управляющее воздействие по отношению к нагреваемому объекту); t^* — время наблюдения теплового процесса, $t^*<\infty$; E^4 — четырёхмерное евклидово пространство.

Граничные условия берутся в достаточно общей форме:

$$\begin{gathered}q_T=-\lambda_S\left(Q\right)\left(\partial Q_S/\partial n\right)|_{\partial\Omega_S}=\alpha\left(Q\right)\left(Q_S-Q_C\right)+\varepsilon_{B3}\left(T\right)\sigma\left(Q_S^4-Q_C^4\right),\\ \vec{x}\in\partial\Omega_S,\quad t\in\left[0,t^*\right].\end{gathered}\tag{2}$$

где q_T — тепловой поток; $\alpha(Q)$ — коэффициент теплообмена теплопроводностью и конвекцией; Q_C — температура окружающей среды (К) Q_S — температура поверхности, воспринимающей лучистый поток (К), $\varepsilon_{\text{е3}}\left(Q\right)=\varepsilon_i\left(Q\right)\varepsilon_j\left(Q\right)\varphi_{ij}$ — коэффициент взаимной облучённости; $\sigma=5,76\cdot 10^{-8}$ Вт/м$^2\cdot$К^4, φ_{ij} — локальный угловой геометрический коэффициент взаимного облучения. Начальные условия

$$Q(x,0)=Q_0(x).\tag{3}$$

Замечание. Исходное описание тепловой модели (1)–(3) трансформируется к интегральной форме решения на основе ЧАМ. Пространства всех функций, входящих в (1)–(3), привязаны к методу решения краевой задачи и оговорены в работах [1–4].

Модель электромагнитного поля формулируется в форме дифференциальных уравнений Максвелла для ферромагнитных нелинейных сред и в форме интегральных уравнений для парамагнитных сред.

Для нелинейной безгистерезисной среды в диапазоне высоких частот (ВЧ), где можно не учитывать токи смещения, и при отсутствии свободных электрических зарядов получена следующая модель электромагнитного поля

$$\begin{gathered}\nabla^2\vec{A}+\mu_a\gamma\left[-\left(\partial\vec{A}\big/\partial t\right)\right]=\vec{g}\left(\vec{A}\right);\\ \vec{g}\left(\vec{A}\right)=\left[\left(\nabla\mu_a^{-1}\right)\times\operatorname{rot}\vec{A}\right];\quad \vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A};\\ \operatorname{div}\vec{A}=0,\quad x\in\Omega,\quad t>0,\end{gathered}\tag{4}$$

где $\vec{A}$ — векторный магнитный потенциал; $\mu_a=\mu\left(\vec{B}\right)$ — абсолютная магнитная проницаемость, нелинейная функция вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля; $\gamma=\gamma(Q)$ — удельная электропроводность, нелинейная функция температуры Q.

Условия на границах раздела сред и условия затухания поля на бесконечности берутся в классическом виде и поэтому здесь не приводятся. Для неоднородных $(\gamma=\gamma(Q))$ парамагнитных сред $(\mu_a=\text{const}=4\pi\cdot 10^{-7}$ Г/м) модель электромагнитного поля получена в форме интегральных уравнений, где интегрирование проводится по областям, занятым источниками поля.

Одна из модификаций метода интегральных уравнений для осесимметричных систем с полным осреднением ядра разработана в книге Немкова В.С., Демидовича В.Б. [1]

$$2\pi r_p \rho_p \dot{I}_p \Delta S_Q + j\omega \sum_{L\in A} \dot{I}_L \int\limits_{\Delta S_P} \int\limits_{\Delta S_L} M'_{PL} \mathrm{d}S_L \mathrm{d}S_P = \\ = -j\omega \sum_{L\in B} \dot{I}_L \int\limits_{\Delta S_P} \int\limits_{\Delta S_M} M'_{PL} \mathrm{d}S_M, \quad (5)$$

где r_p — радиус кольца P; ρ_{p} — удельное сопротивление кольца P; M_{PL} — коэффициент взаимоиндукции трубок тока с номерами P и L; A — область с известными токами; B — область с неизвестными токами; $\dot{I}_L, \dot{I}_P$ — плотности токов в кольцах L и P; $\Delta S_P, \Delta S_L$ — площади поперечных сечений электродинамической системы, в которых расположены кольца с номерами P и L.

Модель возникающих при нагреве термонапряжений, которые служат фазовыми ограничениями при оптимизации, заимствована из работы Н.Д. Морозкина [4].

В теории индукционного нагрева можно выделить четыре больших класса задач оптимального управления.

Первый класс — это задача быстродействия, когда по условиям производительности оборудования требуется минимальное время нагрева при выполнении определённых ограничений на качество нагрева, а также при дополнительных фазовых ограничениях.

Второй класс задач — это так называемые задачи финитного управления с фиксированным временем нагрева. Эти задачи также решаются с рядом специфических фазовых ограничений, например, с ограничением на скорость нагрева.

Третий класс задач — это задачи слежения. В таких задачах функционал максимизируется по фазовой переменной и по времени, а среди всех значений выбирается минимальное.

Четвёртый класс задач — это задачи простого синтеза. Здесь за решение задачи принимается любое допустимое управление, не обязательно оптимальное.

3. Сущность численно-аналитического метода (ЧАМ)

В основу ЧАМ (численно-аналитического метода-ЧАМ [2–4]) положены следующие математические идеи, допускающие наглядное физическое толкование: 1) аппроксимация решения нелинейного уравнения с нелинейными граничными условиями собственными функциями простого линейного оператора; 2) использование в алгоритме решения прямой краевой задачи сглаживающих (интегральных) свойств обратного параболического или эллиптического оператора (вполне непрерывного оператора) по отношению к приближаемым нелинейностям; 3) насыщение алгоритма аналитическими операциями, совершаемыми без накопления ошибок в итерационном цикле.

Первая идея с физической точки зрения соответствует выделению в исходном нелинейном операторе линейной части, несущей основные черты процесса переноса в сплошной среде, и нелинейной поправки к ней, которая, собственно, и подвергается итерационному приближению. С математической точки зрения идея использует факт простоты геометрической формы области интегрирования с привлечением аппарата спектральной теории операторов.

Вторая идея физически отражает свойство релаксации возмущений, внесённых в процесс переноса в сплошной среде. Математический смысл заключается в следующем. Пусть, например, требуется решить нелинейное операторное уравнение

$$AQ = F(x,t), \quad (6)$$

где A — нелинейный оператор начально-краевой задачи (1)–(3).

Пусть оператор A допускает расщепление на линейную и нелинейную части за счёт введения параметра. Например, для задачи теплопроводности [3]:

$$\begin{gathered} A = B + R; \\ b_0 Q_t - AQ = -R\left[Q, a(Q)\right] + F(x,t), \quad x \in \Omega, \\ t \in [0, t^*], \quad \Omega' = \Omega \times [0, t^*]. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $b_0 > 0$, $B = b_0 \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) - L(\cdot)$ — линейный параболический оператор; t — время; L — линейный дифференциальный оператор Лапласа по x; R — нелинейный оператор ($R = A - B$); $a(Q)$ — нелинейный коэффициент теплопроводности.

Литература

1. *Немков В. С., Демидович В. Б.* Теория и расчет устройств индукционного нагрева. — Л.: Энергоатомиздат, 1988.
2. *Дикусар В. В., Гживачевский М., Петрасик Л.* Моделирование трехмерных тепловых полей на основе аппроксимативного метода итерационной линеаризации. — М.: МИФИ, 2002. — 211 с.
3. *Петрасик Л., Вуйтович М., Горбатков С. А.* Математическое обоснование существования обобщенного решения нелинейного параболического уравнения, получаемого с помощью ИАМ // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ. — 1999. — Т. 7, № 4. — С. 32–41.
4. *Морозкин Н. Д.* Оптимальное управление процессом нагрева с учетом фазовых ограничений. — Уфа: Башк. гос. ун., 1997.

UDC 517.977.56:519.7

Optimal Control in Electrical Heating Processes

V. V. Dikusar*, M. Wojtowicz†

* *Institution of Russian Academy of Sciences*
Dorodnicyn Computing Centre of RAS
Vavilov st. 40, 119333 Moscow, Russia
† *Polytechnical Institute, Radom, Poland*

It is suggested an effective numerical and analytical method (NAM) for solving complicated nonlinear multidimensial boundary-value problem of optimal control at interaction of electromagnetic field and heat one. NAM is applied for solution parabolic heat equation and also for electromagnetic field (elliptical equation). The idea of method is based on approximation nonlinear solution by eigen-function of specially constructed simple linear operator with using smooth properties of inverce one for boundary value problem. The direct methods in space of control are used for solution optimal problem with help of homotopy chain, approximation, forecast and random search. Work was supported by RFBR Grant №09-01-90425,08-01-90101.

Key words and phrases: nonlinear multidimensial boundary-value problem, Maxwell equation, numerical and analytical method, optimal control, parabolic heat equation.