

УДК 517.958, 519.62/.642

Устойчивость и бифуркации магнитного потока в джозефсоновских контактах, описываемых двойным уравнением Sine-Gordon

П. Х. Атанасова*, Е. В. Земляная*,
Т. Л. Бояджиев†, Ю. М. Шукринов†

* Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д.6, Дубна, Московская область, 141980, Россия

† Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д.6, Дубна, Московская область, 141980, Россия

Целью работы является математическое моделирование статических распределений магнитного потока в длинных джозефсоновских контактах с учётом второй гармоники в разложении джозефсоновского тока в ряд Фурье. Найдены основные распределения магнитного потока и исследована их устойчивость при изменении параметров модели. Проведено сравнение полученных результатов с результатами традиционной модели для джозефсоновских контактов типа SIS.

Ключевые слова: длинный джозефсоновский контакт, флюксонные решения, устойчивость, ньютонская схема, сплайн-коллокация.

1. Постановка задачи

Многообразие физических свойств джозефсоновских контактов является основой современной сверхпроводящей электроники. Известно, что для туннельных джозефсоновских контактов типа SIS (сверхпроводник–изолятор–сверхпроводник) зависимость ток–разность фаз является синусоидальной функцией. При уменьшении прозрачности барьера возможно отклонение от этой зависимости, которое в достаточно общем случае выражается нечётной функцией, т.е. может рассматриваться в виде разложения в ряд Фурье [1] по синусам. Учёт высших гармоник в этом разложении существен, например, в контактах типа SNINS и SFIFS, где N — нормальный металл, а F — ферромагнетик [2].

В монографии [3] показано, что для достаточно широкого класса джозефсоновских контактов сверхпроводящий ток Джозефсона как функция магнитного потока φ (разности фаз волновых функций сверхпроводников) может быть представлен в виде ряда по синусам. Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми в этом разложении, нетрудно показать [4], что распределение величины $\varphi(x)$ вдоль оси x контакта в статическом режиме [3] удовлетворяет двойному уравнению sine-Gordon (далее для краткости используем сокращение 2SG)

$$-\varphi'' + a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi - \gamma = 0, \quad x \in (-l; l). \quad (1)$$

Здесь и ниже штрихом обозначено дифференцирование по координате x . Величина γ есть внешний ток, l есть полудлина контакта, а a_1 и a_2 — параметры, зависящие от технологии изготовления контакта [1, 5]. Все величины являются безразмерными.

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2009 г.

Авторы благодарят И.В. Пузынина и Т.П. Пузынину за поддержку данной работы и ценные замечания. Работа П.Х. Атанасовой частично финансировалась Программой сотрудничества ОИЯИ с болгарскими научными центрами «ОИЯИ–Болгария». Работа Т.Л. Бояджиева частично финансировалась грантом № 39/2009 Университета «Св. Кл. Охридски» (Болгария). Е.В. Земляная и Ю.М. Шукринов благодарят РФФИ (гранты соответственно № 09-01-00770а и № 08-02-00520а) за частичную финансовую поддержку.

В случае in-line геометрии контакта граничные условия для уравнения (1) имеют вид

$$\varphi'(\pm l) = h_e, \quad (2)$$

где h_e внешнее магнитное поле.

С математической точки зрения переход контакта в динамический режим [3] рассматривается [6, 7] как потеря устойчивости (бифуркация) некоторого из статических решений $\varphi(x)$ задачи (1), (2) при варьировании одного из параметров γ или h_e . При этом минимальное собственное значение (МСЗ) λ_{\min} , порождённой этим решением задачи Штурма–Лиувилля (ЗШТЛ)

$$-\psi'' + q(x)\psi = \lambda\psi, \quad \psi'(\pm l) = 0 \quad (3)$$

с потенциалом $q(x) = a_1 \cos \varphi + 2a_2 \cos 2\varphi$, обращается в нуль.

2. Численный метод

Численное решение граничной задачи (1), (2) проводилось на основе непрерывного аналога метода Ньютона [7]. На каждом итерационном шаге ньютоновской схемы соответствующая линейаризованная задача решалась с использованием сплайн-коллокационной разностной схемы второго порядка точности [8]. Дискретизация ЗШТЛ (3) осуществлялась с помощью конечно-разностных формул второго порядка. Для вычисления первых нескольких собственных значений полученной алгебраической трёхдиагональной задачи применялась стандартная подпрограмма пакета EISPACK.

3. Численные результаты

Учёт второй гармоники $a_2 \sin 2\varphi$ приводит к тому, что для $\gamma = 0$ и $h_e = 0$, кроме известных в традиционном случае ($a_2 = 0$) тривиальных решений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (ниже обозначаются через M_0 и M_π , соответственно), существуют ещё два решения $\varphi = \pm \arccos(-a_1/2a_2)$ (обозначаемые как $M_{\pm ac}$). Соответствующие МСЗ как функции коэффициентов 2SG-уравнения имеют вид $a_1 + 2a_2$, $-a_1 + 2a_2$ и $(a_1^2 - 4a_2^2)/2a_2$ соответственно. Экспоненциальная устойчивость этих константных решений (КР) определяется знаками параметров a_1 и a_2 и отношением параметров a_1/a_2 .

На рис. 1 демонстрируются зависимости величины λ_{\min} от внешнего тока γ для КР при нескольких положительных значениях параметра a_2 . Хорошо просматривается рождение устойчивых состояний $M_{\pm ac}$ внешним током γ при $a_2 > 0, 5$.

Важную роль для физики контакта играют флюксонные решения. Различные распределения магнитного потока в джозефсоновских контактах рассмотрены в обзоре [7]. В малых внешних полях h_e таковыми являются флюксон Φ^1 , антифлюксон Φ^{-1} и связанные состояния $\Phi^1\Phi^{-1}$ и $\Phi^{-1}\Phi^1$. При увеличении внешнего магнитного поля h_e появляются другие, более сложные устойчивые флюксонные состояния — двух-флюксонные $\Phi^{\pm 2}$, трёх-флюксонные $\Phi^{\pm 3}$ и т.д., а также их связанные состояния.

Проведём сравнение некоторых основных физических характеристик однофлюксонного решения Φ^1 в модели (1), (2) с традиционным случаем ($a_1 = 1$, $a_2 = 0$). На рис. 2 демонстрируется деформация производных решений под влиянием параметра a_2 . При $a_2 = 0.5$ кривая внутреннего магнитного поля $\varphi'(x)$ имеет в окрестности центра $x = 0$ плато. Дальнейшее возрастание параметра a_2 приводит к формированию двух максимумов магнитного поля. Тем самым, учёт коэффициента a_2 приводит к качественному изменению вида флюксонного распределения Φ^1 .

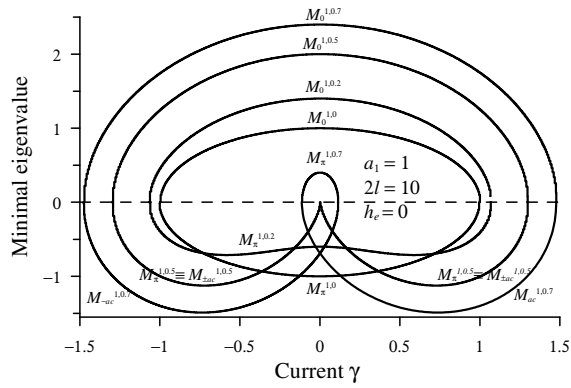


Рис. 1. Зависимость МСЗ λ_{\min} от внешнего тока γ для КР при фиксированных значениях $a_1 = 1$, $h_e = 0$ и $2l = 10$ и при разных значениях параметра a_2

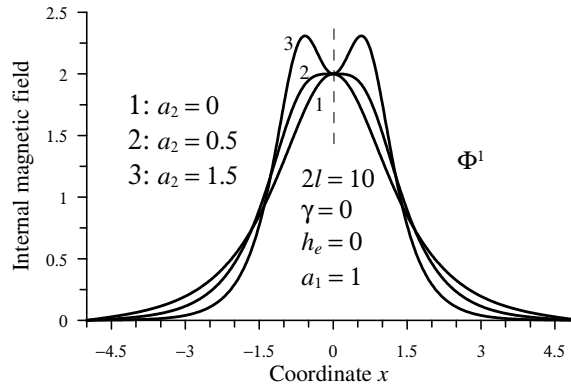


Рис. 2. Флюксон Φ^1 при $\gamma = 0$, $h_e = 0$ и $a_1 = 1$ при изменении параметра a_2

При изменении коэффициента a_2 число флюксонов [7]

$$N(p) = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi(x) dx,$$

соответствующих распределению Φ^1 , сохраняется, т.е.

$$\frac{\partial N}{\partial a_2} = 0.$$

Здесь и ниже через $p = (l, a_1, a_2, h_e, \gamma)$ обозначена совокупность параметров задачи. При этом значение $N[\Phi^1] = 1$.

В свою очередь, при увеличении параметра a_2 полный магнитный поток [7]

$$\Delta\varphi(p) = \varphi(l) - \varphi(-l)$$

для этого же решения стремится к 2π , что соответствует полному магнитному потоку флюксона в бесконечном контакте $\Phi_\infty^1 = 4 \arctan \exp(x)$ при $a_2 = 0$. При этом значение магнитного потока $\varphi(x)$ в середине интервала не меняется, т.е. $\varphi(0) = \pi$.

Полная энергия, связанная с распределением $\varphi(x)$, вычисляется по формуле [7]

$$F(p) = \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} \varphi'^2 + 1 - q(x) - \gamma \varphi \right] dx - h_e \Delta \varphi.$$

Численный эксперимент показывает, что для однофлюксонного распределения Φ^1 функция $F(a_2)$ убывает примерно по линейному закону при возрастании a_2 , что демонстрируется на рис. 3а. При этом в нулевом внешнем поле ($h_e = 0$) и при нулевом токе ($\gamma = 0$) энергия $F(a_2 \rightarrow 0) \rightarrow 1$, что соответствует энергии единичного флюксона Φ_∞^1 в традиционной модели «бесконечного» контакта при $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

На рис. 3б показана зависимость МСЗ λ_{\min} от внешнего тока γ для флюксонных решений вида Φ^1 при фиксированном значении параметра $a_1 = 1$ и при разных положительных значениях параметра a_2 . Указанная зависимость качественно аналогична той, что имеет место в традиционной модели с $a_2 = 0$, но величина максимального критического тока этого распределения в рассматриваемом случае меньше. При достаточно малых по модулю h_e флюксонные решения Φ^1 являются неустойчивыми. С увеличением значений параметра a_2 (учёт второй гармоники в токе Джозефсона) граница области устойчивости сдвигается в сторону меньших значений магнитного поля.

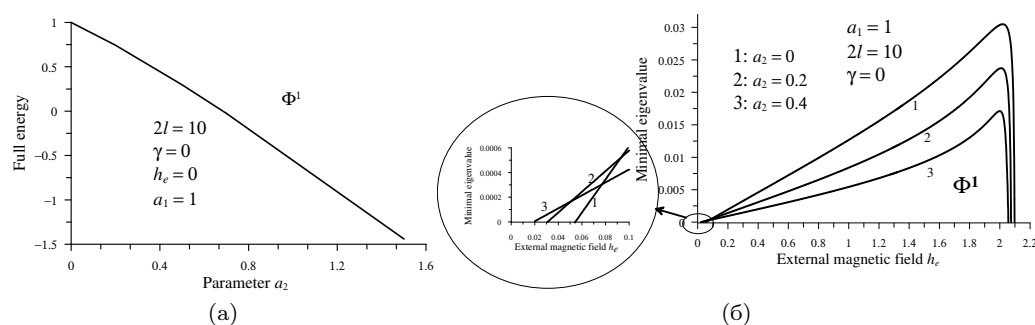


Рис. 3. а) зависимость полной энергии от параметра a_2 для флюксонного решения Φ^1 при фиксированных значениях $a_1 = 1$, $h_e = 0$ и $2l = 10$; б) зависимость МСЗ от внешнего поля h_e для флюксонных решений Φ^1 при $\gamma = 0$, $a_1 = 1$ и нескольких значениях параметра a_2

Литература

1. Golubov A. A., Kypriyanov M. Y., Il'ichev E. The Current-Phase Relation in Josephson Junctions // Rev. Mod. Phys. — 2004. — Vol. 76. — P. 411.
2. Coupling of two Superconductors Through a Ferromagnet: Evidence for a π -Junction / V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Y. Rusanov et al. // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 36. — P. 2427.
3. Лухарев К. К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1985.
4. Double Sine-Gordon Fluxons in Isolated Long Josephson Junction / N. Hatakenaka, H. Takayanag, Y. Kasai, S. Tanda // Physica B. — 2000. — Vol. 284-288. — Pp. 563–564.
5. Buzdin A., Koshelev A. E. Periodic Alternating 0- and π -junction Structures as Realization of φ -Josephson Junctions // PRB. — 2003. — Vol. 67. — P. 220504(R).

6. Гальперин Ю. С., Филиппов А. Т. Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах // Журн. exper. и теор. физ. — 1984. — Т. 86, № 4. — С. 1527.
7. Methods of Computational Physics for Investigation of Models of Complex Physical Systems / I. V. Puzynin, T. L. Boyadzhiev, S. I. Vinitiskii et al. // Physics of Particles and Nuclei. — 2007. — Vol. 38, No 1. — Pp. 70–116.
8. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1980.

UDC 517.958, 519.62/.642

Stability and Bifurcations of Magnetic Flux Distributions in Josephson Junctions Described by Double Sine-Gordon Equation

P. Kh. Atanasova*, E. V. Zemlyanaya*, T. L. Boyadzhiev[†],
Yu. M. Shukrinov[†]

** Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

*† Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

Aim of the work is mathematical modeling of static magnetic flux distributions in long Josephson junctions taking into account the higher harmonics in the Fourier-decomposition of the Josephson current. Basic magnetic flux distributions have been found; their stability in dependence on parameters of model has been investigated. Numerical results have been compared with results of numerical study of traditional model.

Key words and phrases: long Josephson junctions, fluxon solutions, stability, newtonian scheme, spline collocation.