Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 2 (2). 2010. С. 45–49

Численные методы и их приложения

УДК 519.632.4

Об одном классе конечных элементов с гармоническими базисными функциями

О. И. Юлдашев, М. Б. Юлдашева

Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри д.6, Дубна, Московская область, 141980, Россия

Предложен новый класс конечных элементов высокого порядка аппроксимации с векторными базисными функциями, удовлетворяющими одновременно однородному уравнению с оператором дивергенции и однородному уравнению с оператором ротора. Для построения таких базисных функций используются два алгоритма, ранее разработанные авторами для получения аппроксимаций высокого порядка с помощью гармонических базисных функции. Исследованы основные свойства новых элементов.

Ключевые слова: конечные элементы, векторные базисные функции, гармонические функции, гармонические векторные поля.

1. Введение

В настоящее время можно выделить два успешно развивающихся направления в развитии метода Бубнова–Галёркина для решения эллиптических краевых задач в сложных областях. Во-первых, это исследование и использование новых обобщённых формулировок, основанных на конечных элементах с векторными базисными функциями Уитни, Неделека [1, 2]. Во-вторых, это разработка и применение схем метода с тригонометрическими [3], полиномиальными [4] и Т- полными [5] системами функций, определённых на ячейках расчётной области. В случае, когда эллиптические краевые задачи характеризуются гладкими коэффициентами в уравнениях, гладкими краевыми условиями и границами области, естественным становится использование конечных элементов с гладкими базисными функциями.

Конечный элемент в $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ можно определить [6, 7] как тройку (ω, P, Φ), где $\omega \in \mathbf{R}^n$ — замкнутое подмножество с липшицевой границей и непустым множеством внутренних точек (или ячейка, часто называемая конечным элементом); P — m-мерное пространство функций, определённых на ω (обычно это пространство многочленов); Φ — набор линейно независимых линейных функционалов $F_i : P \to \mathbf{R}^1$, $i = 1, \ldots, m$. В наиболее распространённых, узловых, конечных элементах значение функционала $F_i(v)$ является значением функции v в узле $x_i \in \omega$. Если для набора функций $\{N_j\}_{j=1,\ldots,m} \in P$ при каждом j система

$$F_i(N_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

является разрешимой, то любая функция $v \in P$ представима в виде

$$v(x) = \sum_{i=1}^{m} F_i(v) N_i(x).$$

В этом случае N_i называются базисными функциями.

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2009 г.
Работа выполнена при поддержке РФФИ по гранту N 10-01-00467-а.

2. Конечные элементы с гармоническими базисными функциями

В работах [8, 9] авторами предложены два алгоритма построения трёхмерных гармонических базисных функций для аппроксимаций высокого порядка. Они точны на гармонических многочленах определённого порядка и не содержат сингулярные точки вне ω. При этом могут использоваться обычные ячейки метода конечных элементов: тетраэдры, гексаэдры, пятигранные призмы и т.д. Пространство P состоит из гармонических многочленов, а в качестве функционалов F_i, $i = 1, \ldots, m$, берутся значения гармонических многочленов в граничных узлах ячейки. И в первом, и во втором алгоритме предполагается, что ячейка ω вписана в сферу радиуса a. В сферической системе координат $x = (r, \vartheta, \varphi)$ решение задачи Дирихле внутри шара радиуса a имеет следующий вид [10]:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \left(A_{nk}\cos(k\varphi) + B_{nk}\sin(k\varphi)\right) P_n^k(\cos\vartheta),$$

где $P_n^k(\cos\vartheta)$ — присоединённые функции Лежандра от аргумента $\cos\vartheta$, а A_{nk}, B_{nk} — известные коэффициенты, зависящие от граничного условия.

Если базисные функции искать в виде $N_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j^{(i)} f_j(x)$, где $b_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — неизвестные коэффициенты, то в качестве функций f_j можно выбрать

$$\begin{aligned} p_{n+1,k+1} &= c_{nk}(r/a)^n \cos(k\varphi) P_n^k(\cos\vartheta), \\ q_{n+1,k+1} &= c_{nk}(r/a)^n \sin(k\varphi) P_n^k(\cos\vartheta), \end{aligned} \tag{2}$$

где $c_{nk} = (2n+1)(n-k)!/(n+k)!$. Эти функции вычисляются по рекуррентным формулам [9]. По первому алгоритму $p_{n,k}, q_{n,k}$ подбираются последовательно, таким образом, чтобы система (1) была разрешима. Во втором алгоритме предполагается, что N_i на границе ячейки $\partial\omega$ с высокой точностью приближается лагранжевой граничной базисной функцией L_i [11]. В этом случае коэффициенты $b_j^{(i)}$ находятся из системы для построения среднеквадратичного приближения

$$\sum_{j=1}^{m} b_j^{(i)} \int\limits_{\partial\omega} f_j f_l \mathrm{d}S = \int\limits_{\partial\omega} L_i f_l \mathrm{d}S, \quad l = 1, 2, \ldots, m.$$

Эта система имеет матрицу Грамма и всегда разрешима, так как функции f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, линейно независимы.

Таблица 1

Свойства конечных элементов с ячейкой в виде стандартного симплекса и пятигранной призмы

	S				T	
m	10	20	34	52	18	38
d	2	3	4	5	2	4

Таблица 2

Свойства конечных элементов с ячейкой в виде стандартного куба

	Алгоритм 1			Алгоритм 2		
m	26	56	98	26	56	98
d	3	5	7	2	3	4

В табл. 1 приведены такие характеристики конечных элементов, как вид ячейки ω, число узлов m и наибольший порядок d гармонических многочленов, которые точно приближаются соответствующими базисными функциями. Для стандартного симплекса $S = \{x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3, x_1+x_2+x_3 \leqslant 1\}$ и пятигранной призмы $T = \{x_1, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 \leqslant 1; -1 \leqslant x_3 \leqslant 1\}$ со стандартным расположением узлов на границах ячеек оба алгоритма дают одинаковые результаты. Однако, как видно из табл. 2, в случае стандартного куба $[-1, 1]^3$ первый алгоритм демонстрирует более высокую точность.

3. Конечные элементы с гармоническими векторными базисными функциями

Как и гармонические функции, их градиенты также обладают хорошими аппроксимационными свойствами и называются гармоническими векторными полями [12]. Отсюда следует возможность построения конечно-элементных векторных базисных функций, удовлетворяющих одновременно однородному уравнению с оператором дивергенции и однородному уравнению с оператором ротора. Как и в предыдущем случае, для их построения можно использовать метод коллокаций и метод среднеквадратичного приближения на границе конечного элемента. Пусть вектор-функция $\mathbf{u}$ представима в виде разложения по базисным функциям $\mathbf{W}_j^{(k)}$:

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{i}_k u_k(x) = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{i}_k \left(\sum_{j=1}^{m} u_{k,j} N_j(x) \right) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{m} u_{k,j} \mathbf{W}_j^{(k)}(x).$$

Базисные функции $\mathbf{W}_i^{(k)}$ будем искать в виде $\mathbf{W}_i^{(k)}(x) = \sum\limits_{j=1}^{3m} b_j^{(k,i)} \nabla f_{g(j)}(x)$, где $b_j^{(k,i)}$ — неизвестные коэффициенты, $f_{g(j)}$ — гармонические функции из (2), а $g(j)$ — индексная функция. Согласно первому методу, неизвестные коэффициенты находятся в результате решения системы

$$\sum_{j=1}^{3m} b_j^{(k,i)} \left(\partial f_{g(j)}/\partial x_k\right)(x_l) = \delta_{il}, \quad \sum_{j=1}^{3m} b_j^{(k,i)} \left(\partial f_{g(j)}/\partial x_{k_1}\right)(x_l) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{3m} b_j^{(k,i)} \left(\partial f_{g(j)}/\partial x_{k_2}\right)(x_l) = 0, \quad x_l \in \partial\omega; \quad l = 1, 2, \ldots, m;$$

$$k \neq k_1, \quad k \neq k_2, \quad k_1 \neq k_2, \quad 1 \leqslant k, k_1, k_2 \leqslant 3.$$

Индексная функция g подбирается так, чтобы система была разрешима. Точность аппроксимаций с такими базисными функциями характеризуется гармоническими многочленами, градиенты которых участвуют в определении коэффициентов $b_j^{(k,i)}$.

Во втором методе предполагается, что $\mathbf{W}_i^{(k)}(x) \approx \mathbf{i}_k L_i(x), \quad x \in \partial\omega$, где $L_i(x)$ — лагранжевая граничная базисная функция. Тогда по правилу построения среднеквадратичного приближения коэффициенты $b_j^{(k,i)}$ находятся из системы

$$\sum_{j=1}^{3m} b_j^{(k,i)} \int\limits_{\partial\omega} \nabla f_{g(j)} \cdot \nabla f_{g(l)} \mathrm{d}S = \int\limits_{\partial\omega} L_i \left(\partial f_{g(l)}/\partial x_k\right) \mathrm{d}S, \quad l = 1, 2, \ldots, 3m.$$

Здесь $g(j) = j + 1$ $(j = 1, 2, \ldots, 3m)$, если $f_1 = 1$. Точность аппроксимаций в этом случае характеризуется точностью аппроксимаций с лагранжевыми граничными базисными функциями L_i, $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Основными свойствами конечных элементов с новыми базисными функциями являются:

1) точная аппроксимация вектор-функций в виде градиентов гармонических многочленов определённой степени;
2) отсутствие внутренних узлов даже при аппроксимации высокого порядка;
3) использование одних и тех же базисных функций для геометрически подобных ячеек.

Отметим особенности схем метода Бубнова–Галёркина, которые получаются в результате использования новых конечных элементов при решении краевых задач относительно вектор-функции $\mathbf{u}$ с уравнениями $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ и $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Вывод схем осуществляется с помощью формулы Грина в области задания уравнений Ω

$$-\int\limits_{\Omega} (\nabla^2 \mathbf{V}) \cdot \mathbf{U} \mathrm{d}\Omega = \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \nabla V_k \cdot \nabla U_k \mathrm{d}\Omega - \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \nabla V_k) W_k \mathrm{d}S,$$

где V_k, W_k — компоненты векторов $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ соответственно. Анализ схем проводится обычным образом с применением непрерывных и дискретных аналогов леммы Лакса–Мильграмма и леммы Cea [1, 2, 6, 7].

4. Заключение

В работе приведены алгоритмы построения конечно-элементных гармонических базисных функций для аппроксимаций высокого порядка, а также конечно-элементных векторных базисных функций, удовлетворяющих одновременно однородному уравнению с оператором дивергенции и однородному уравнению с оператором ротора. Важным свойством новых базисных функций является отсутствие узлов внутри ячейки, что позволяет для повышения точности аппроксимации адаптивно сгущать узлы только на её границе. Конечные элементы с такими базисными функциями могут использоваться при решении линейных краевых задач электро- и магнитостатики, как самостоятельных, так и входящих в формулировки нелинейных задач.

Литература

1. *Monk P.* Finite Element Methods for Maxwell's Equations. — Oxford: Clarendon press, 2003.
2. *Šolin P.* Partial Differential Equations and the Finite Element Method. — Wiley Interscience, 2006.
3. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.
4. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* The Finite Element Method. — Fifth edition. — Butterworth-Heinemann, 2000. — Vol. 3.
5. *Jirousek J., Wroblewski A.* T-elements: State of the Art and Future Trends // Archives of Computational Methods in Engineering. — 1996. — Vol. 3, No 4. — Pp. 323–434.
6. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.
7. *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. — М.: Наука, 1989.
8. *Юлдашев О. И., Юлдашева М. Б.* Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации // JINR LIT Scientific report 2006-2007. — Дубна: ОИЯИ, 2007. — С. 317–320.
9. *Yuldashev O. I., Yuldasheva M. B.* 3D Finite Elements with Harmonic Basis Functions for Approximations of High Order. — Preprint JINR. E11-2008-104. — 2008. — `http://www1.jinr.ru/Preprints/2008/104(E11-2008-104).pdf`.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
11. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. — М.: Мир, 1987.

12. *Havin V. P., Sagué A. P.* Approximation Properties of Harmonic Vector Fields and Differential Forms // Methods of Approximation Theory in Complex Analysis and Mathematical Physics. — 1993. — Vol. 1550. — Pp. 149–156.

UDC 519.632.4

About One Class of Finite Elements with Harmonic Basis Functions

O. I. Yuldashev, M. B. Yuldasheva

Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia

A new class of finite elements of high order approximation with vector basis functions is suggested. They satisfy both homogeneous equation with the div operator and homogeneous equation with the curl operator. To construct the finite elements two algorithms, developed by the authors before to obtain approximations of high order with the help of harmonic functions, are used. The main properties of the elements have been investigated.

Key words and phrases: finite elements, vector basis functions, harmonic functions, harmonic vector fields.