УДК 517.925.54

Автоматизация средствами компьютерной алгебры качественного анализа заданной системы алгебраических дифференциальных уравнений с параметрами

В. С. Рихвицкий

Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри д.6, Дубна, Московская область, 141980, Россия

Решения систем ОДУ с дробно-полиномиальными правыми частями на конечном или бесконечном интервале времени могут достигать бесконечных значений за бесконечное или конечное время. Корректное определение бесконечных значений переменных и их производных достигается вложением в компакт. Преобразование выполняется автоматически в пакете Maple12. Метод использовался при численном интегрировании уравнений Эйнштейна, отличающихся широким диапазоном значений интегрируемых функций в неограниченной области.

Ключевые слова: фазовый портрет, качественный анализ, компактификация, проективный.

1. Качественный анализ

В поисках математических моделей Вселенной, демонстрирующих желательные нетривиальные свойства, качественный анализ дифференциальных уравнений позволяет разобраться в необходимости и достаточности включения различных факторов (скалярного, спинорного, магнитного полей, наличия нелинейности определённого порядка и т.п.) с точки зрения существования определённых режимов эволюции [1].

С качественной точки зрения важно различать режимы с монотонной эволюцией и колебательные, достигающие конечного предельного состояния, и неограниченные, достигающие предела за конечное или бесконечное время.

Хорошим результатом является разбиение пространства параметров на области и предъявление в каждом случае характерного фазового портрета, содержащего интегральные кривые, соответствующие характерным областям фазового пространства.

Пакет компьютерной алгебры Maple позволяет строить программы (worksheets), автоматизирующие преобразования и анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Мы ограничились изучением систем ОДУ с дробно-полиномиальными правыми частями. Трудность заключается в том, что надо охватить бесконечное пространство на конечном или бесконечном интервале времени и при том, что интегрируемые величины и их производные могут достигать в некоторых местах бесконечных значений.

Корректное определение бесконечных значений переменных достигается вложением исходного пространства в компакт. Тогда интегрируемые функции на компакте имеют ограниченную вариацию, а интегрирование ведётся по параметру, отличающемуся от времени (натуральному параметру). С компактностью связана также и устойчивость численного интегрирования.

2. Типовой алгоритм

Сложившийся типовой алгоритм качественного анализа эволюции в задачах исследования эволюции Вселенной путём интегрирования уравнений Эйнштейна имеет вид рабочего листа (worksheet) в пакете Maple.

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2009 г.

Основные части рабочего листа:

– преобразование системы уравнений;
– построение характеристического уравнения для особых точек, разбиение пространства параметров на области нулями характеристического уравнения;
– выбор в каждой области параметров характерной точки для дальнейшего анализа и демонстрации;
– вычисление особых точек и анализ их типа;
– анализ порядка асимптотик (в особенности на гранях, соответствующих бесконечностям исходной системы);
– построение фазовых портретов (в плоскостях и в трёхмерном пространстве).

3. Преобразование системы

Система эволюционных ОДУ расширяется включением уравнения для временной переменной $\dot{t} = 1$. С этого момента независимой переменной становится новый параметр, что в дальнейшем облегчает перепараметризацию.

Для каждой зависимой переменной и соответствующего дифференциального уравнения
$$\dot{x} = F(x), \quad x \in R$$
выполняется замена $x = \frac{s}{c}$, $s^2 + c^2 = 1$ с присоединением бесконечно удалённой точки к пространству $\pm\infty = \frac{1}{0}$.

Таким образом, получаем систему уравнений
$$\dot{s} = c^3 F\left(\frac{s}{c}\right), \quad \dot{c} = -sc^2 F\left(\frac{s}{c}\right). \tag{1}$$

Приведя в окрестности точки $s = 1$, $c = 0$ правые части системы к общему знаменателю и устранив его, мы не изменим поле направлений. Сохраняя именно этот смысл, определим направление и в самой «бесконечной» точке.

Таким образом, численное интегрирование теперь выполняется в компактной области и по натуральному параметру.

Графики эволюции в бесконечном пространстве строятся, откладывая по осям $\arctan(\frac{s}{c})$.

4. Асимптотика: достижение критической точки за конечное время

Рассмотрим проблему достижения предельной точки за конечное время на примере системы ОДУ из двух уравнений
$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \tag{2}$$

Следует получить ответы на два вопроса:

1) при переходе $y(t) \to \infty$ как ведёт себя $x(t)$ — достигает ли некоторого конечного значения x_* или также $x(t) \to \infty$;
2) за какое — конечное или бесконечное — время достигается это значение.

Если $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \sim x^\alpha$, $\alpha < 1$, то на интегральной кривой имеется конечная точка x_*, $y = \infty$. В этом случае для решения второго вопроса достаточно изучить тем же способом уравнение $\frac{\dot{y}}{\dot{t}} = g(x, y)$ при постоянном x.

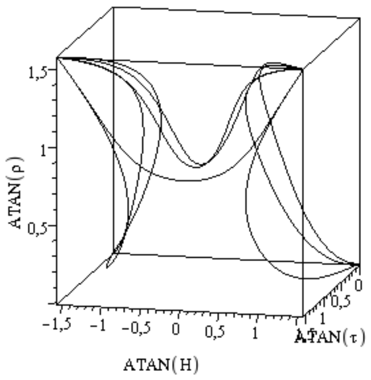

Рис. 1. **3D фазовый портрет**

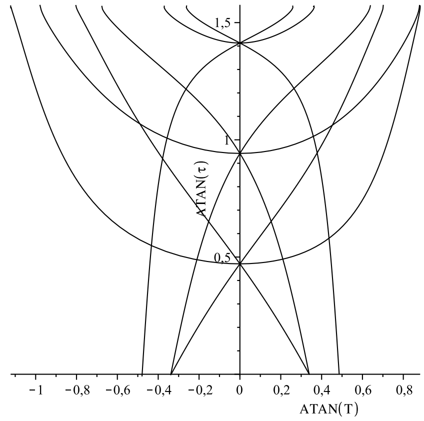

Рис. 2. **Масштаб объёма** $\tau(t)$

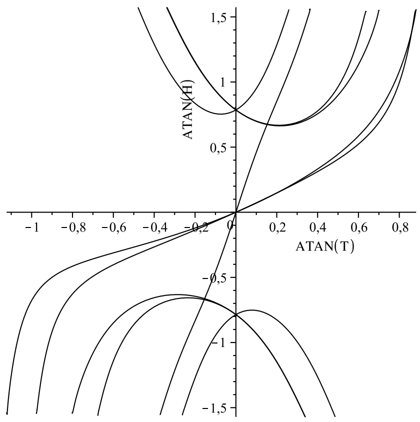

Рис. 3. **Параметр Хаббла** $H(t)$

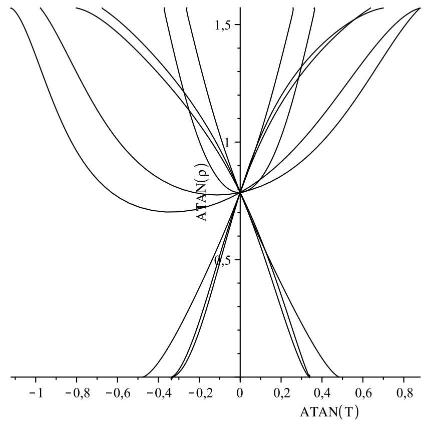

Рис. 4. **Плотность вещества** $\rho(t)$

5. Пример: модель космологической струны в присутствии магнитного поля

Уравнения Эйнштейна (3)–(6), полученные в работе [2], соответствуют фазовому портрету на рис. 1,

$$\dot{\tau} = 3H\tau, \tag{3}$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2}\left(\rho + \frac{\lambda}{3} + \frac{J^2}{3\bar{\mu}}\left(D_0^2 D\right)^{\frac{2}{3}} \tau^{\frac{2R-15}{9}} T^{\frac{2X}{3}}\right) - 3H^2, \tag{4}$$

$$\dot{\rho} = 3H\left(\frac{2R+3}{9}\lambda - \rho\right) + \frac{\lambda X}{3\tau}, \tag{5}$$

$$\dot{T} = \frac{T}{\tau}. \tag{6}$$

В них τ — масштабный параметр, H — параметр Хаббла, ρ — плотность вещества описывают модель космической струны в присутствии магнитного поля. Величина T является вспомогательной и всегда вычисляется при начальном условии $T(0) = 1$. Фазовые кривые на портрете проинтегрированы вперёд и назад при различных начальных условиях (заданных примерно в середине каждой кривой).

На рис. 2–4 приведены графики эволюции отдельных компонент в зависимости от времени. На графиках хорошо видно, что величины достигают бесконечных значений за конечное время.

Литература

1. *Saha B., Rikhvitsky V.* Anisotropic Cosmological Models with Spinor Field and Viscous Fluid in Presence of a Λ Term: Qualitative Solutions // Journal Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2007. — Vol. 40. — Pp. 14011–14027.
2. *Saha B., Rikhvitsky V., Visinescu M.* Bianchi Type-I String Cosmological Model in the Presence of a Magnetic Flux: Exact and Qualitative Solutions. — arXiv: 0812.1443[gr-qc]. ArXiv: 0812.1443[gr-qc].

UDC 517.925.54

Computer Algebra Automation of the Qualitative Analysis of a Parametric System of Algebraic-Differential Equations

V. S. Rikhvitsky

Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia

Solutions of systems the ODE with fractional polynomial right parts in finite or infinite range of time can reach infinite values at finite or infinite time. Correct definition of infinite values of variables and derivatives made by enclosure into compact. Transformation is fulfilled automatically by Maple12 package. The offered method used in numerical integration of the equations of Einstein with extremely wide range of values of variables and in unlimited area.

Key words and phrases: phase portrait, qualitative analysis, compactification, projective.