

УДК 517.9:531.31

Численно-аналитические схемы анализа детерминированных систем с последствием

В. В. Маланин*, И. Е. Полосков†

* Кафедра процессов управления и информационной безопасности
Пермский государственный университет
ул. Букирева, д.15, г. Пермь, ГСП, 614990, Россия

† Кафедра высшей математики
Пермский государственный университет
ул. Букирева, д.15, г. Пермь, ГСП, 614990, Россия

Рассматриваются задачи анализа детерминированных процессов в нелинейных динамических системах с различными формами запаздывания. Основная идея всех алгоритмов — использование схемы расширения фазового пространства, что позволяет перейти от уравнений с отклоняющимися аргументами к уравнениям без запаздывания.

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальное уравнение, система с последствием, отклоняющийся аргумент, компьютерная алгебра.

1. Введение

Большой интерес как с теоретической, так и практической точки зрения вызывают дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом (ДУсОА) [1]. Такие уравнения появляются там, где свойства объекта определяются эффектом последствия и служат математическими моделями различных явлений: процедур автоматического регулирования и управления техническими системами, химическими и другими технологическими процессами; динамики экономических и социальных систем; горения в жидкостно-реактивных двигателях; влияния излучений; радиолокации и радионавигации; автономной стабилизации курса судов; колебаний в ламповых генераторах; борьбы видов за существование в биологии; управления запасами и т.д.

Как правило, точные аналитические решения детерминированных ДУсОА могут быть найдены очень редко. Численное же интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с запаздыванием или нейтрального типа с автоматическим выбором шага, не говоря уже об уравнениях в частных производных, требует разработки специальных вариантов методов Рунге–Кутты для обычных и жёстких систем уравнений, часто весьма изоциранных [2].

Однако для решения вышеуказанных задач можно применить несложные приёмы, позволяющие использовать встроенные средства численного интегрирования ОДУ таких систем аналитических вычислений (САВ) интерактивно-программного типа, как *Mathematica* или *Maple*.

В работе, в основном, представляются результаты применения схемы расширения фазового пространства для анализа детерминированных систем. Данная схема была реализована с помощью нескольких процедур, написанных на входном языке пакета *Mathematica*, и позволила с помощью стандартной команды *NDSolve* пакета решать ДУсОА, в частности, дифференциально-разностные уравнения и уравнения нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями, а также уравнения с одиночными переменными лагами. Но подобная схема применима и для анализа стохастических дифференциальных уравнений [3] с отклоняющимися аргументами тех же самых типов и, в частности, для построения уравнений без запаздывания для (переходных) плотностей вероятности и моментных функций фазовых векторов увеличивающейся размерности.

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-01-96023 и 09-01-99006).

2. Метод расширения фазового пространства

2.1. Дифференциально-разностные уравнения с кратными постоянными запаздываниями

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}_\nu(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), \vec{x}(t - 2\tau), \dots, \vec{x}(t - \nu\tau), t), \quad t > t_\nu = t_0 + n \cdot \tau. \quad (1)$$

Здесь ' — производная по времени t , τ — постоянное запаздывание, $\nu > 0$ — целое, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $\vec{f}(\cdot, \cdot) = \{f_i(\cdot, \cdot)\}^T : \mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — детерминированная вектор-функция, T — символ транспонирования.

Предположим, что на полуинтервалах $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, \dots , $(t_{\nu-1}, t_\nu]$ фазовый вектор $\vec{x}(t)$ удовлетворяет системам уравнений вида

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}_0(\vec{x}(t), t), \quad (2)$$

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}_1(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), t), \quad (3)$$

.....

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}_{\nu-1}(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), \vec{x}(t - 2\tau), \dots, \vec{x}(t - (\nu - 1) \cdot \tau), t), \quad (4)$$

где $\vec{f}_q(\cdot, \cdot) = \{f_{qi}(\cdot, \cdot)\}^T$, $q = 1, 2, \dots, \nu - 1$, и пусть $x(t_0) = x_{*0}$.

В связи с отсутствием общепризнанных алгоритмов решения уравнений (2)–(4) естественными выглядят попытки построения на их основе иных математических моделей явлений, описываемых данными уравнениями, моделей, более удобных для дальнейших исследований.

Путь, выбранный в настоящей работе и подобный другим нашим разработкам [3], состоит в следующем. Для того чтобы изучить изменение вектора $\vec{x}(t)$ при значениях времени $t > t_0$ посредством преобразования векторного процесса, удовлетворяющего уравнениям с запаздываниями, расширим фазовое пространство системы. В процессе реализации этой процедуры введём обозначения:

$$\begin{aligned} s \in [0, \tau], t_q = t_0 + q \cdot \tau, q = 0, 1, 2, \dots, \vec{x}_q(s) = \vec{x}(s + t_q), \Delta_q = (t_{q-1}, t_q], \\ \vec{z}_0 = \vec{x}_0, \vec{z}_1 = \text{col}(\vec{x}_0, \vec{x}_1), \quad \vec{z}_2 = \text{col}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2), \dots, \vec{y}_q \equiv \vec{x}_q(0) = \vec{x}_{q-1}(\tau), \\ \text{col}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots) = \{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots\}^T, \end{aligned}$$

а затем рассмотрим последовательность полуотрезков Δ_q .

0^0 . Начнём с Δ_0 . Определённый на полуотрезке Δ_0 вектор $\vec{x}_0(s)$ удовлетворяет системе ОДУ (штрихом здесь и далее обозначена производная по переменной s):

$$\vec{x}'_0(s) = \vec{f}_0(\vec{x}(s), s + t_0).$$

1^0 . Проанализируем поведение системы на полуинтервалах Δ_0 и Δ_1 . ОДУ для вычисления вектора \vec{z}_1 можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{x}'_0(s) = \vec{f}_0(\vec{x}(s), s + t_0), \\ \vec{x}'_1(s) = \vec{f}_1(\vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), s + t_1). \end{aligned}$$

.....

ν^0 . Рассмотрим полуотрезки $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_\nu$. Построим систему ОДУ для вектора \vec{z}_ν в виде

$$\begin{aligned} \vec{x}'_0(s) &= \vec{f}_0(\vec{x}(s), s + t_0), \\ \vec{x}'_1(s) &= \vec{f}_1(\vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), s + t_1), \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{x}'_\nu(s) &= \vec{f}_\nu(\vec{x}_\nu(s), \vec{x}_{\nu-1}(s), \vec{x}_{\nu-2}(s), \dots, \vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), s). \end{aligned}$$

\mathbf{N}^0 . Для анализа системы на полуинтервалах $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$ воспользуемся системой ОДУ для вектора \vec{z}_N вида

$$\begin{aligned} \vec{x}'_0(s) &= \vec{f}_0(\vec{x}(s), s + t_0), \\ \vec{x}'_1(s) &= \vec{f}_1(\vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), s + t_1), \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{x}'_\nu(s) &= \vec{f}_\nu(\vec{x}_\nu(s), \vec{x}_{\nu-1}(s), \vec{x}_{\nu-2}(s), \dots, \vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), st_\nu), \\ \vec{x}'_{\nu+1}(s) &= \vec{f}_\nu(\vec{x}_{\nu+1}(s), \vec{x}_\nu(s), \vec{x}_{\nu-1}(s), \dots, \vec{x}_2(s), \vec{x}_1(s), st_{\nu+1}), \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{x}'_N(s) &= \vec{f}_\nu(\vec{x}_N(s), \vec{x}_{N-1}(s), \vec{x}_{N-2}(s), \dots, \vec{x}_{N-\nu+1}(s), \vec{x}_{N-\nu}(s), s). \end{aligned}$$

Итак, исходная задача Коши для дифференциально-разностных уравнений сведена к последовательности задач Коши для систем ОДУ без запаздывания для цепочки фазовых векторов увеличивающейся размерности. При этом исследование поведения системы будет состоять в последовательном численном интегрировании уравнений на полуотрезке $(0, \tau]$ (шаги $\mathbf{0}^0, \mathbf{1}^0, \dots, \mathbf{N}^0$), включая смену системы уравнений (увеличение размерности) и доопределение недостающих для очередного шага начальных условий с помощью терминальных для предыдущего.

Изложенная методика была реализована в виде процедуры, написанной на входном языке пакета `Mathematica`. Её заголовок имеет вид

```
AfterEffect[eqs_, vars_, tq_, tauq_, initVal_, t0_, tk_, delta_,
            stepsPr_, maxSt_, meth_]
```

Параметрами процедуры (которые записываются в форме, подобной команде `NDSolve` пакета) являются: `eqs` — вектор систем уравнений на последовательности начальных отрезков оси t ; `vars` — вектор имён неизвестных; `tq` — имя временной переменной; `tauq` — имя переменной, представляющей запаздывание; `initVal` — вектор начальных условий для первой (нулевой) группы уравнений; `t0` и `tk` — начало и конец промежутка интегрирования; `delta` — величина запаздывания; `stepsPr` — значение шага вывода результата; `maxSt` — длина отрезка интегрирования в запаздываниях; `meth` — имя одного из стандартных методов численного интегрирования ОДУ, используемых в команде `NDSolve`.

Пример 1. Рассмотрим уравнения модели иммунной реакции

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= c_1 - c_2 u_1(t) - c_3 u_2(t) u_1(t), & u'_2(t) &= c_4 u_2(t) - c_5 u_2(t) u_3(t), \\ u'_3(t) &= c_6 u_1(t - \tau) u_2(t - \tau) \mathbf{1}(t - \tau) - c_7 u_3(t) - c_8 u_2(t) u_3(t), \end{aligned}$$

где c_k — постоянные задачи. На рис. 1 ($\tau = 10$) и рис. 2 ($\tau = 15$) изображено поведение численности В-лимфоцитов u_1 , антигена u_2 и антител u_3 при различных значениях параметров задачи.

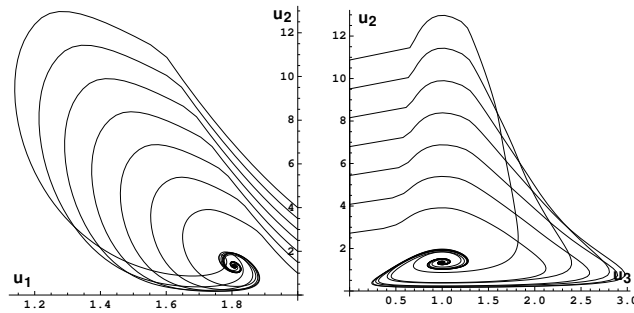


Рис. 1. Поведение численности В-лимфоцитов u_1 , антигена u_2 и антител u_3 при различных значениях параметров задачи, $\tau = 10$

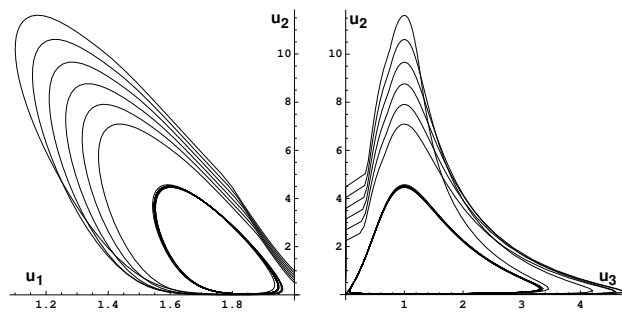


Рис. 2. Изменение численности В-лимфоцитов u_1 , антигена u_2 и антител u_3 при различных значениях параметров задачи, $\tau = 15$

2.2. Уравнения нейтрального типа

Рассмотрим теперь систему вида

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}_\nu(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), \dots, \vec{x}(t - \nu\tau), \vec{x}'(t - \tau), \dots, \vec{x}'(t - \nu\tau), t). \tag{5}$$

Трактовка обозначений соответствует приведённой для уравнений (1). Так же, как и выше, предполагается, что дополнительно вектор $\vec{x}(t)$ на полуинтервалах $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, \dots , $(t_{\nu-1}, t_\nu]$ удовлетворяет системам уравнений вида

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}_0(\vec{x}(t), t), \tag{6}$$

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}_1(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), \vec{x}'(t - \tau), t), \tag{7}$$

.....

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}_{\nu-1}(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), \vec{x}(t - 2\tau), \dots, \vec{x}(t - (\nu - 1) \cdot \tau), \vec{x}'(t - \tau), \vec{x}'(t - 2\tau), \dots, \vec{x}'(t - (\nu - 1) \cdot \tau), t). \tag{8}$$

Используя методику, изложенную в подразделе 2.1, можно определить цепочку систем ОДУ без запаздывания увеличивающейся размерности и в рассматриваемом случае.

Заметим, что в отличие от большинства известных численных интеграторов команда NDSolve пакета Mathematica не требует того, чтобы решаемая система ОДУ была приведена к нормальной форме Коши. Поэтому построенные уравнения в процессе подготовки расчётов преобразовывать не требуется.

Изложенная методика была реализована в виде процедуры, написанной на входном языке пакета `Mathematica`. Заголовок процедуры, реализующей представленную схему, имеет вид

```
NeitrDEq[eqs_, vars_, tq_, tauq_, initEqs_, initVal_, t0_, tk_,
         delta_, stepsPr_, maxSt_, meth_]
```

Параметр `initEqs` задаёт уравнения системы на начальном множестве. Остальные параметры те же, что и у процедуры `AfterEffect`.

Пример 2. С помощью процедуры `NeitrDEq` был проинтегрирован ряд систем уравнений, среди которых и следующая простая модельная:

$$u'(t) + u'(t - \tau) + u(t - \tau) = -u(t) - u^3(t), \quad t > 0, u'(t) = 0, \quad t < 0, \quad u(0) = 5.$$

Интегральная кривая для рассматриваемой системы приведена на рис. 3.

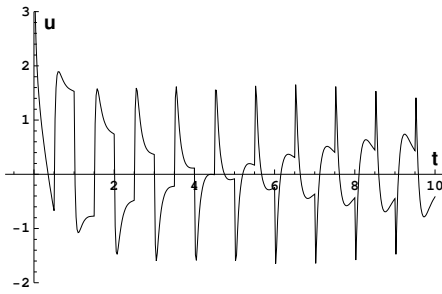


Рис. 3. Интегральная кривая для системы (примера 2)

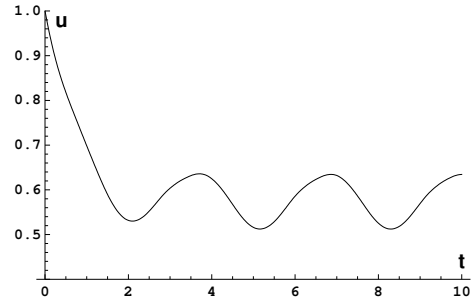


Рис. 4. Результат интегрирования модельной системы (пример 3)

2.3. Уравнения с одиночными переменными запаздываниями

Следующий объект исследования — система дифференциальных уравнений с непрерывным переменным запаздыванием $\tau(t) \geq 0$ вида

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau(t)), t), \quad t > t_0, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}^0. \quad (9)$$

Будем считать, что на интервале (\tilde{t}_0, t_0) , где $\tilde{t}_0 = \min_{t \geq t_0} (t - \tau)$, фазовый вектор $\vec{x}(t)$ совпадает с вектором $\vec{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет системе ОДУ без запаздывания:

$$\vec{y}'(t) = \vec{f}_0(\vec{y}(t), t), \quad \vec{y}(\tilde{t}_0) = \vec{y}^0. \quad (10)$$

Задачей исследования является вычисление вектора \vec{x} при любом $t > t_0$.

При этом схема расширения фазового пространства может быть применена и для решения поставленной задачи, но, конечно, при некоторой модификации.

Действительно, приближённо заменим переменное запаздывание $\tau(t)$ кусочно-постоянным $\tilde{\tau}(t)$ со «ступеньками», длина которых кратна величине τ^* (выбор τ^* определяется необходимой точностью аппроксимации $\tau(t)$ и всегда может быть произведён так, чтобы абсолютная погрешность $|\tau(t) - \tilde{\tau}(t)|$ не превышала наперёд заданного значения, а поведение полученной системы ДУ соответствовало исходной) и рассмотрим равномерную временную сетку $t_q = t_0 + q \cdot \tau^*$, $q = -N_0, -N_0 + 1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N, \dots$, причём без потери общности можно считать, что $t_{-N_0} = \tilde{t}_0$ (значения вектора \vec{y} при $t = t_{-N_0}$, если $t_{-N_0} < \tilde{t}_0$, можно получить интегрированием в обратном времени).

Используя введённые выше обозначения и последовательно рассматривая полуинтервалы $(t_{-N_0}, t_{-N_0+1}]$, $(t_{-N_0+1}, t_{-N_0+2}]$, \dots , $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, \dots , $(t_{N-1}, t_N]$, \dots ,

можно записать (для $t > \tilde{t}_0$ аппроксимирующие исходные уравнения) системы ДУ без запаздывания. Заметим, что в отличие от уравнений с постоянными запаздываниями выписать явную форму формируемой цепочки ОДУ, подобную представленной в подразделе 2.1, в общем случае не представляется возможным, что как раз и является следствием переменности запаздывания. В конкретных же расчётах при автоматическом генерировании указанной цепочки такая проблема не возникает.

Пример 3. Результат интегрирования модельной системы $x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau(t))$, $a, b = \text{const}$, $\tau(t) = \sin^4 t$ представлен на рис. 4.

3. Заключение

В работе представлено применение схемы расширения фазового пространства к изучению трёх классов дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и приведены соответствующие примеры. Заметим, что, несмотря на определённое увеличение времени расчётов, общий выигрыш достигается вследствие простоты алгоритма, а следовательно, и сокращения времени на отладку программы.

Литература

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
2. Kim A. V., Pimenov V. G. Numerical Methods for Delay // Lecture Notes in Mathematics. — 1999. — Vol. 44. — Seoul National University: Research Institute of Mathematics.
3. Полосков И. Е. Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 9. — С. 58–73.

UDC 517.9:531.31

Symbolic and Numeric Schemes for Analysis of Deterministic Systems with Aftereffect

V. V. Malanin*, I. E. Poloskov†

* Department of Control Processes and Information Security
Perm State University

15, Bukireva, 614990, PSU, Perm, Russia

† Department of Higher Mathematics

Perm State University

15, Bukireva, 614990, PSU, Perm, Russia

There are considered problems of analysis for deterministic and stochastic processes in nonlinear dynamic systems with different forms of delay. The main idea of all algorithms is a usage of a scheme of phase space extension. Such the scheme allows to pass on from equations with divergent arguments to equations without delay.

Key words and phrases: mathematical modeling, differential equation, system with aftereffect, divergent argument, computer algebra.