

Математика

УДК 519.6

Численно-аналитическое исследование решения типа бризер на границе корректности

С. И. Сердюкова

*Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д.6, Дубна, Московская область, 141980, Россия*

Построены асимптотики при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для уравнения $U_{tt} = U_{xx} + i2U_{ttx} + U_{ttxx}$ с разрывными начальными данными. Полученные асимптотические формулы хорошо согласуются с результатами численных экспериментов. Исследована устойчивость использованных численных методов. В начале работы дан обзор других результатов по исследованию нестандартных линейных уравнений, возникающих при осреднении уравнений, описывающих волновые процессы в периодических слоистых средах.

Ключевые слова: волновые процессы в периодических слоистых средах, нестандартные линейные уравнения в частных производных, задача Коши с разрывными начальными данными, асимптотика при больших t , метод конечных разностей, матричная прогонка, устойчивость, система аналитических вычислений REDUCE.

1. Введение

Исследуются уравнения

$$U_{tt} = U_{xx} + U_{ttxx}, \quad (1)$$

$$U_{tt} = U_{xx} + ibU_{xxx} + U_{ttxx}, \quad (2)$$

$$U_{tt} = U_{xx} + ibU_{ttx} + U_{ttxx}, \quad (3)$$

$$U_{tt} = U_{xx} - U_{xxxx}. \quad (4)$$

Решается задача Коши с разрывными начальными данными:

$$U(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad U_t(x, 0) = 0. \quad (5)$$

Такие уравнения возникают при исследовании движения волн в периодических слоистых средах [1, 2].

Доказано [3], что уравнение (1) имеет решение типа бризер: при $t \rightarrow \infty$, $|x| < ct^{-1/2}$

$$U(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{\text{sign}(x)}{2} \cos(t) + O(\sqrt{x^2 t}).$$

Для уравнения (4) доказано [4] существование обширной зоны медленно затухающих осцилляций: при $t \rightarrow \infty$, $|x| > t^{1+\delta}$

$$U(x, t) = \frac{1 + \text{sign}(x)}{2} + \frac{\text{sign}(x)}{\sqrt{\pi x^2/t}} \sin \left\{ \frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4} \right\} (1 + O(t^{-1}) + O((x/t)^{-4})).$$

Задача Коши для уравнения (2) некорректно поставлена по Адамару [5].

Задача (3), (5) поставлена корректно по Петровскому [6] при $|b| \leq 2$.

2. Численное исследование

Численные эксперименты подтвердили существование решения с экзотической для линейного уравнения асимптотикой — решения типа бризер для линейного уравнения (1). Бризер существует на фоне осцилляций меньшей амплитуды (см. [3], рис. 1). Эти осцилляции зажаты между характеристиками $x \pm t = 0$. Вне зоны между характеристиками решение экспоненциально быстро сходится к предельным значениям 0 при $x \rightarrow -\infty$ и 1 при $x \rightarrow +\infty$.

Проведённые численные эксперименты указывали также на существование решений типа бризер для уравнения (3) и в случае $b \neq 0$. При достаточно больших b, t проявилась разница в поведении решения задачи (1), (5) и вещественной части решения (3), (5) при $b \neq 0$: амплитуда осцилляций уменьшается, в то время как зона осцилляций расширяется. Вне зоны между характеристиками уже нет явного экспоненциального спада к предельным значениям (см. [7, рис. 1–3]). В работе [7] построены асимптотики при больших t для решения задачи (3), (5) в случае $b = 1$, подтверждающие достоверность процессов деформации бризера, выявленных при численном моделировании. В частности доказано, что носитель бризера сокращается до $|x| < c/t$ (против $|x| < c/\sqrt{t}$ в случае $b = 0$) и экспоненциальный переход к предельным значениям происходит при $|x| = 1,215 \dots t$ (против $|x| = t$ в случае $b = 0$). С ростом b зона осцилляций расширяется и в пределе (при $|b| = 2$) занимает всю вещественную ось. Границы зоны осцилляций легко вычисляются через кратные критические точки функции $s/\sqrt{1-bs+s^2}$. При доказательстве использовались методы теории функции комплексного переменного, в частности метод стационарной фазы и метод перевала [8].

Предварительно результаты работы [7] обсуждались на семинаре в отделении механики Математического института им. В.А. Стеклова. Был поставлен вопрос о поведении решения при больших t для $b = 2$. Проведено дополнительное исследование, результаты которого докладываются на этой конференции. При $b = 2$ решение задачи (3), (5) имеет следующее интегральное представление

$$U(x, t) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \left(\exp\left(-\frac{ist}{1-s} - ixs\right) + \exp\left(\frac{ist}{1-s} - ixs\right) \right) \frac{ds}{s} = I_1 + I_2.$$

Контур Γ идёт по вещественной оси, исключая окрестность нуля: полюс обходится в верхней полуплоскости по дуге σ — полуокружности малого радиуса. Пропадают радикалы в интегральном представлении решения (см. (3), [7]), что несомненно упрощает задачу построения асимптотик, но все приходится доказывать заново. В случае $b = 2$ получены асимптотики решения задачи (3), (5) при различных значениях $x > 0$. Доказано 4 теоремы.

Теорема 1. При $b = 2, t \rightarrow \infty, |x| < ct^{-1}$

$$\operatorname{Re}(U(x, t)) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sign}(x)}{2} \cos t + O(xt).$$

Тем самым установлено существование решения типа «бризер» в малой окрестности нуля. Для остальных $x > 0$ асимптотическое поведение рассматриваемой задачи при больших t определяется вторым интегралом I_2 .

Теорема 2. При $b = 2, t \rightarrow \infty, x > ct^{-1}$ справедливо соотношение

$$I_1 = 1/2 + O\left(\exp\left(-\sqrt{xt}/2\right)\right).$$

Следующая теорема описывает поведение решения рассматриваемой задачи вблизи характеристики.

Теорема 3. При $b = 2$, $t \rightarrow \infty$ $|x - t| < c\sqrt{t}$

$$U(x, t) = \frac{3}{4} + \frac{e^{-i\pi/4}}{8\sqrt{\pi t}} + O(t^{-3/2}) + \frac{(x-t)}{4\sqrt{\pi t}} e^{i\pi/4} (1 + O(t^{-1})) + \\ + \frac{1}{8\sqrt{\pi t}} \exp\left(-i(x+t+2\sqrt{xt}-\pi/4)\right) \left(1 + O\left(\frac{x-t}{t}\right)\right).$$

Для оставшихся $x > 0$ справедлива следующая теорема.

Теорема 4. При $b = 2$, $t \rightarrow \infty$, $x > ct^{-1}$, $|x - t| > c\sqrt{t}$

$$U(x, t) = d + \frac{ie^{-i(t+x)}(xt)^{1/4} (1 + O(1/\sqrt{xt}))}{2\sqrt{\pi}(x-t)} \times \\ \times \left(\cos\left(2\sqrt{xt} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{\frac{t}{x}} \sin\left(2\sqrt{xt} + \frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Здесь $d = 1/2$ в случае $x < t$ и $d = 1$ в случае $x > t$.

Полученные асимптотики согласуются с численными результатами.

На рис. 1 представлены графики вещественной части решения $U(x, 50)$ при $b = 2$, $-100 \leq x \leq 0$.

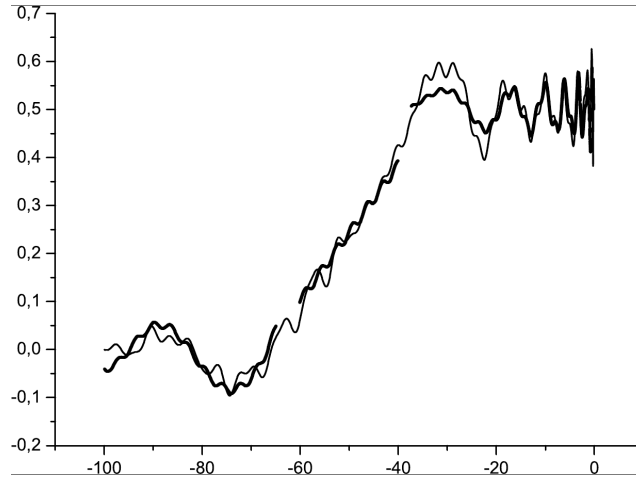


Рис. 1. Вещественная часть решения $U(x, 50)$ при $b = 2$, $-100 \leq x \leq 0$. Тонкая линия соответствует численному решению, жирные линии — асимптотикам

При численном решении уравнение (3) аппроксимировалось неявной разностной схемой второго порядка точности

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \\ + bi \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n+1} + 2u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1}}{2h\tau^2} + \\ + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n-1} - 2(u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^{n+1} - 2u_{j-1}^n + u_{j-1}^{n-1}}{h^2\tau^2}.$$

Корни характеристического многочлена $\lambda^2 - (2 - c)\lambda + 1$,

$$c = 4\alpha^2 \sin^2(\varphi/2)h^2 / (h^2 + bh \sin \varphi + 4 \sin^2(\varphi/2)),$$

лежат на единичной окружности, если $c \leq 4$, что эквивалентно неравенству

$$(1 - \alpha^2) h^2 \sin^2(\varphi/2) + (b \sin(\varphi/2) + h \cos(\varphi/2))^2 + (4 - b^2) \sin^2(\varphi/2) \geq 0.$$

Последнее неравенство справедливо при $\alpha \leq 1$ для всех $0 < |b| \leq 2$. В проведённых расчётах $h = 0.1$, $\alpha = \tau/h = 1$. Спектр разностной схемы лежит на границе единичного круга, что исключает сильную неустойчивость экспоненциального типа. Но $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 1$, в результате нет устойчивости в L_2 : $\|G^n\| = O(n)$, G — оператор перехода от слоя к слою задачи Коши. Но неустойчивость степенного рода не может существенно исказить результат для ограниченного интервала по t , $t \leq T$. Проведены расчёты для $T = 50$. Вместо задачи Коши решалась краевая задача на отрезке $[-100, 0]$ с такими условиями на границе $U(-100, t) = 0$, $\text{Re}(U(0, t)) = 1/2$. Величина $\text{Im}(U(0, t))$ определяется из разностной аппроксимации уравнения (3) в нуле. При этом используются свойства симметрии решения: $\text{Re}(U(-x, t)) = 1 - \text{Re}(U(x, t))$, $\text{Im}(U(-x, t)) = \text{Im}(U(x, t))$. Остаётся заметить, что при численном моделировании разностное уравнение переписывается в виде системы двух уравнений с вещественными коэффициентами относительно действительной и мнимой частей U . На каждом шаге по времени осуществляется матричная прогонка. Результаты распечатки прогоночных матричных коэффициентов $D(j) = \|d_{i,k}(j)\|$, $1 \leq i, k \leq 2$, $j = 1, \dots, 1000$, указывают на устойчивость матричной прогонки. При $b = 2$

$$D_j = -\vartheta_j A, \quad A = \|a(i, j)\|, \quad a(1, 1) = a(2, 2) = 1, \quad -a(1, 2) = a(2, 1) = h,$$

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_{j+1} = 1/(2 + h^2 - (1 + h^2)\vartheta_j).$$

Вопрос устойчивости прогонки эквивалентен равномерной ограниченности по j элементов матриц $B_j = \vartheta_l \vartheta_{l-1} \dots \vartheta_j A^{l-j+1}$, $2 \leq j \leq l$. В нашем случае, $l = 1000$, максимальное по j значение $\max(|b_{1,1}(j)| + |b_{1,2}(j)| + |b_{2,1}(j)| + |b_{2,2}(j)|)$ равно 1,3605... Расчёты проведены с использованием системы REDUCE [9], хорошо приспособленной для работы с матрицами, в частности — для реализации матричной прогонки.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Эффективные уравнения с дисперсией для распространения волн в периодических средах // ДАН. — 2000. — Т. 370, № 1. — С. 7–11.
2. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Исследование эффективных уравнений с дисперсией, описывающих распространение волн в стратифицированных слоистых средах и тонких пластинах // ДАН. — 2002. — Т. 383, № 6. — С. 742–746.
3. Сердюкова С. И. Экзотическая асимптотика для линейного гиперболического уравнения // ДАН. — 2003. — Т. 389, № 3. — С. 1–5.
4. Сердюкова С. И. Жесткий переход от стационарного состояния к колебаниям для линейного дифференциального уравнения // ДАН. Математика. — 2007. — Т. 415, № 3. — С. 310–314.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — С. 79.
6. Петровский И. Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ, секция А. — 1938. — Т. 1, № 7. — С. 1–72.
7. Сердюкова С. И. Деформация решения типа бризер при добавлении младшего члена с комплексным коэффициентом // ДАН. Математика. — 2009. — Т. 427, № 1. — С. 17–23.
8. Федорок М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — С. 544.
9. Neip W., 2004. — REDUCE User's Guide for Unix Systems. Version 3.8. — Berlin-Dahlem. — ZiB D-14195.

UDC 519.6

Numeric-Analytical Study of the Breather Type Solution on the Correctness Boundary

S. I. Serdyukova

*Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

Asymptotics when $t \rightarrow \infty$ for the Cauchy problem solution of the equation $U_{tt} = U_{xx} + i2U_{ttx} + U_{ttxx}$ with discontinuous initial data are proved. The found asymptotic formulae are in a good agreement with results of numerical experiments. Stability of the numerical methods used is studied as well. At the beginning we review other results in studying nonstandard linear equations arising in averaging equations describing wave propagation in periodic stratified media.

Key words and phrases: wave propagation in periodic stratified media, nonstandard linear differential equations, Cauchy problem with discontinuous initial data, asymptotics at large t , finite difference method, the matrix stepwise pursuit method, stability, system of analytical computations REDUCE.