

## Интерференция двух противоположно закрученных световых волн

Ю. А. Портнов

*Кафедра физики*

*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет  
(МАДИ)*

*Ленинградский пр., д. 64, Москва, Россия, 125319*

Последние исследования в области классической и квантовой оптики, позволили установить, что электромагнитная волна способна не только нести энергию и импульс, но и угловой момент. Для доказательства этого были проведены эксперименты по созданию и детектированию закрученности электромагнитных волн (twisted light). В настоящей работе теория электромагнетизма Максвелла обобщается на пространство с вращением. Для этого используется разработанная автором модель семимерного пространства-времени, в которой наряду с поступательными координатами и временем используются вращательные координаты. На основе обобщенных уравнений электромагнитного поля получены решения, описывающие закрученную электромагнитную волну. Таким образом, в статье предлагается неклассический подход для описания закрученной электромагнитной волны без использования понятия спина. Также в работе рассматривается суперпозиция двух разнозакрученных электромагнитных волн. Как показано, результатом такого сложения становится волна с необычным профилем амплитуды, зависящим от направления. Автор предполагает, что подобный подход для описания закрученных волн может помочь по-новому взглянуть на некоторые вопросы классической и квантовой оптики.

**Ключевые слова:** теория электромагнетизма Максвелла, семимерное пространство-время, закрученный свет.

### 1. Введение

Впервые теория закрученного света (twisted light) была рассмотрена в работе, опубликованной в 1992 году [1]. В этой работе были предложены схемы создания и детектирования закрученности и впервые была высказана мысль, что световая волна способна не только нести энергию и импульс, но и угловой момент. Для правильной визуализации идеи закрученного света рассмотрим следующую модель. Свет является электромагнитной волной, у которой есть волновой фронт — поверхность в каждой точке которой световое колебание находится в определенной фазе. В плоской световой волне все волновые фронты следуют друг за другом, а в закрученной световой волне фронт напоминает спираль с направлением в сторону распространения волны. Для математического описания движения закрученной световой волны большинство авторов использует модель с элементами квантовой оптики.

В 1995 г. [2] узконаправленные закрученные световые пучки были получены экспериментально. Технически получение закрученных электромагнитных волн было реализовано при помощи специальной призмы переменной толщины. Разность в толщине призмы позволяет части волны, прошедшей через более толстый слой призмы, отстать от части волны, прошедшей через менее толстый слой призмы. Таким образом, на выходе разные части волны имеют различную фазу. Современные методики позволяют получить закрученный свет с помощью дифракционных решеток с дислокацией [3].

Интерес к технологии получения, детектирования и управления закрученным светом позволили усовершенствовать методику получения закрученного света. Так, например, в работе [4] сообщается уже об успешном получении закрученных рентгеновских волн с энергией фотонов 99 эВ. Одновременно с фундаментальными исследованиями широко развивались методы применения закрученного света:

в квантовой теории информации, в управлении микромашинами, в астрофизике и микроскопии [5].

Обладание световой волной не только импульсом, но и моментом импульса нашло свое подтверждение в эксперименте [6]: в фокусе лазерного луча удалось подвесить микрочастицу, которая, поглощая свет, начинала вращаться, и направление этого вращения зависело от направления закрученности света.

Таким образом, закрученная электромагнитная волна обладает не тремя степенями свободы, а так же, как и любое твердое тело в механике, — шестью. Это приводит к мысли, что для описания движения закрученных электромагнитных волн необходимо использовать модель не четырехмерного пространства-времени, а модель семимерного пространства-времени.

Как показано в работах [7–9], для объяснения динамики не только поступательного, но и вращательного движения тел в гравитационных полях можно пользоваться семимерным пространством-временем, в котором помимо времени и трех пространственных координат присутствуют три координаты, ориентирующие тело в пространстве  $x^4 = \varphi$ ,  $x^5 = \psi$ ,  $x^6 = \theta$  — углы Эйлера. Уравнения геодезических семимерного пространства-времени позволяют получить не только уравнения поступательного движения, но и уравнения, описывающие вращательное движение гироскопов [9].

Для пустого, плоского, семимерного пространства-времени [7–9] метрика имеет вид:

$$g_{00} = -g_{\alpha\alpha} = 1, \quad g_{45} = g_{54} = -\frac{J_\omega \cos \theta}{m}, \quad g_{44} = g_{55} = g_{66} = -\frac{J_\omega}{m}, \quad (1)$$

где  $J_\omega$  — момент инерции пробного тела относительно осей вращения, прецессии и нутации,  $m$  — масса пробного тела,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Парадоксальность записи метрического тензора [10, 11], который, вопреки четырехмерным метрическим тензорам общей теории относительности, зависит от параметров пробного тела (отношение момента инерции к массе), позволяет предположить, что пространство не абсолютно и гравитационное поле зависит от помещенного в него пробного тела. Однако на сегодняшний день единственно доступный нам способ обнаружения гравитации — это искривление геодезических линий, по которым двигаются пробные тела. Поэтому даже говорить о наличии или отсутствии гравитации мы можем только с позиции движущегося пробного тела. Подобная концепция приводит к переосмыслению понятия относительности: не только движение становится относительным, но и само пространство-время зависит от взятого пробного тела.

## 2. Вывод уравнений закрученных волн

Для описания закрученных электромагнитных волн обобщим четырехмерную теорию электромагнетизма Максвелла на пространство-время семи измерений. Взаимодействие частиц друг с другом описывается с помощью силового поля, свойства которого в отличие от классической теории будут характеризоваться 7-вектором  $A_i$ . Он будет называться впоследствии 7-потенциалом, компоненты которого являются функциями координат, времени и углов ориентации [7]. Три пространственных компоненты 7-потенциала  $A^k$  образуют трехмерный вектор — называемый векторным потенциалом поля, временную компоненту будем называть скалярным потенциалом  $A^0 = \Phi$ , а три ориентирующих компоненты 7-потенциала будут образовывать вращательный потенциал поля. Опускание индекса 7-потенциала  $A^k$  будем осуществлять с помощью метрики (1):  $A_i = g_{ik}A^k$ .

Функция Лагранжа для заряженного тела в электромагнитном поле, для семимерного пространства-времени, имеет вид:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{J_\omega \omega^2}{mc^2}} - q\Phi + \frac{q}{c}(A_i V^i) + \frac{q}{c}(A_j \omega^j). \quad (2)$$

При этом необходимо заметить, что ввиду однородности и изотропности пространства можно предположить, что вращательная часть потенциала электромагнитного поля зависит только от угловых координат, а пространственная часть от линейных координат.

Уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле задаются уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad (3)$$

где  $L$  определяется формулой (2). Производная по скорости есть обобщенный импульс тела  $p_i = \partial L / \partial u^i$ . Тогда уравнения движения запишем в виде:

$$\frac{d}{dt} \left( p_k + \frac{q}{c} A_k \right) = \frac{q}{c} \partial_k (-c\Phi + (A_n u^n)), \quad (4)$$

где  $k, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Расписывая полный дифференциал 7-потенциала по времени и преобразовывая, получим:

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{q}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} - q \partial_k \Phi + \frac{q}{c} (u^n \varepsilon_{knl} \varepsilon_{sdh} g^{ls} g^{dm} g^{kf} \partial_m A_f), \quad (5)$$

где  $\varepsilon_{knl}$  — символы, подобные символам Леви-Чивиты [12], коэффициенты в которых пробегают значения от 1 до 6. Так как в рассматриваемом пространстве нельзя перемножать пространственные координаты и угловые, то структура символов Леви-Чивиты будет иметь вид:

$$\varepsilon_{ikl} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \quad (1, 2, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (4, 5, 6); (5, 6, 4); (6, 4, 5) \\ +1 \quad (3, 2, 1); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (6, 5, 4); (4, 6, 5); (5, 4, 6) \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (6)$$

В левых частях уравнений (5) стоит производная от импульса тела по времени. Следовательно, в правых частях уравнений находится сила, действующая на тело. По аналогии с теорией электромагнетизма разделим действующую на тело силу на две части — зависящую от скорости и не зависящую.

Сила первого рода — напряженность электрического поля:

$$E_k = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} - \partial_k \Phi. \quad (7)$$

Сила второго рода — напряженность магнитного поля:

$$H_r = \varepsilon_{rdh} g^{dm} g^{hf} \partial_m A_f. \quad (8)$$

Объединяя параметрические уравнения (7) и (8), можем получить первое модифицированное для семимерного случая уравнение Максвелла:

$$\varepsilon_{rdh} g^{dm} g^{hf} \partial_m E_f = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} H_r. \quad (9)$$

Если скалярно умножить (8) на семимерный набла оператор  $\nabla = \partial_k dx^k$ , то можно получить второе модифицированное уравнение Максвелла:

$$g^{kh} \partial_k H_h = 0. \quad (10)$$

Произведение плотности заряда тела  $\varepsilon$  на семимерный вектор скорости  $u^k$  [7] будем называть 7-вектор плотности тока:

$$j^k = \varepsilon u^k. \quad (11)$$

Его три пространственные компоненты образуют трехмерную плотность тока, а вращательные компоненты образуют зарядовую плотность вращения.

Введем семимерный тензор электромагнитного поля:

$$F_{hk} = \partial_h A_k - \partial_k A_h. \quad (12)$$

При нахождении уравнений поля из принципа наименьшего действия можно получить уравнение вида:

$$\partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i, \quad (13)$$

которое является второй парой уравнений Максвелла, записанной в семимерной форме. Подставляя различные значения  $i$  и компоненты тензора (12), приходим к уравнениям:

$$g^{km} \partial_k E_m = 4\pi \varepsilon, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{klm} g^{lh} g^{mf} \partial_h H_f = \frac{1}{c} \frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_k. \quad (15)$$

Уравнения (10), (9) вместе с уравнениями (14), (15) определяют электромагнитное поле в семимерном пространстве. В дальнейшем эти уравнения будем называть семимерными уравнениями Максвелла.

Для получения уравнений электромагнитной волны рассмотрим семимерные уравнения Максвелла в пустом пространстве-времени, то есть  $\varepsilon = 0$  и  $j_k = 0$ . Возьмем 7-мерный ротор от уравнения (9):

$$\varepsilon_{eru} g^{rb} g^{us} \partial_b \varepsilon_{sdh} g^{dm} g^{hf} \partial_m E_f = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{eru} g^{rb} g^{us} \partial_b H_s.$$

Используя уравнение (15), можно записать волновое уравнение вида:

$$\varepsilon_{eru} \varepsilon_{sdh} g^{rb} g^{us} g^{dm} g^{hf} \partial_b \partial_m E_f = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2}. \quad (16)$$

Произведение  $\varepsilon_{eru} \varepsilon^{mfu}$  составляет истинный тензор 6-го ранга [13], который может быть выражен в виде комбинации произведений компонент единичного тензора. Предположение, что компонентами вектора электрической индукции является функция времени, пространственных и вращательных координат  $E = E^2(t, x, \varphi)$ , позволяет значительно упростить уравнение (16) до вида:

$$\left( \partial_1^2 + \frac{1}{R_{in}^2} \partial_4^2 \right) E + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0. \quad (17)$$

где  $R_{in}$  — радиус инерции. Решение уравнения (17), в случае движения волны вдоль оси  $x$ , и вращения вокруг этой оси с поворотом фазы на угол  $\varphi$ , будет иметь вид:

$$E = A \cdot \exp \left( -i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{\mu} \varphi + \sigma \right) \right), \quad (18)$$

где  $\omega$  — циклическая частота колебаний;  $\lambda = cT$  — длина волны;  $\mu = \Omega t$  назовем углом вращения волны — это угол, на который поворачивается фаза волны за один период времени;  $\Omega$  — угловая скорость поворота фазы волны;  $\sigma$  — начальная фаза колебаний. Полученное решение (18) является уравнением электромагнитной волны с фазой, меняющейся в зависимости от угла поворота, т.е. является закрученной электромагнитной волной.

Рассмотрим две закрученные электромагнитные волны  $E'$  и  $E''$ , распространяющиеся вдоль оси  $x$  и имеющих одинаковую амплитуду  $A$ , одинаковую длину волны  $\lambda$  и одинаковый по модулю угол вращения  $\mu_1 = -\mu_2 = \mu$ :

$$E' = A \cdot \exp \left( -i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{\mu} \varphi + \sigma_1 \right) \right), \quad (19)$$

$$E'' = A \cdot \exp \left( -i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{2\pi}{\mu} \varphi + \sigma_2 \right) \right). \quad (20)$$

При наложении волн (19) и (20) друг на друга, получаем результирующую волну:

$$E = E' + E''.$$

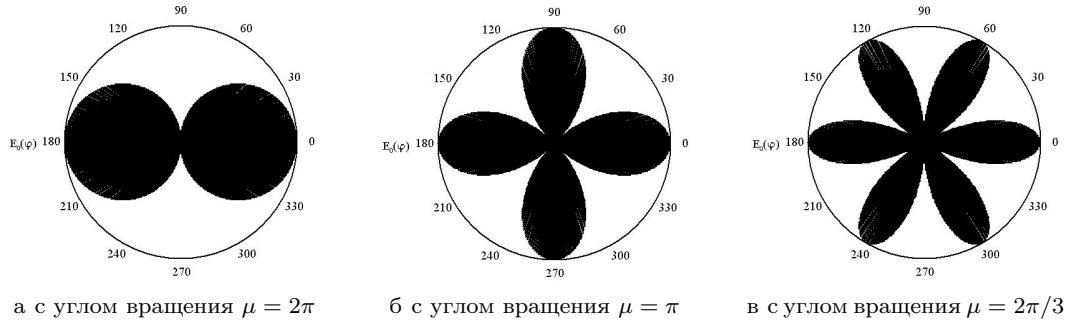
Представим начальные фазы колебаний в виде  $\sigma_1 = \eta + \chi$  и  $\sigma_2 = \eta - \chi$ . Тогда в результате сложения волн получаем интерференционное уравнение:

$$E = 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\mu} \varphi - \chi \right) \exp \left( -i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \eta \right) \right). \quad (21)$$

Из (21) видно, что если принять  $E_0(\varphi) = 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\mu} \varphi - \chi \right)$  за амплитуду результирующей волны, тогда уравнение (21) сводится к уравнению обычной бегущей волны, амплитуда которой зависит от угла поворота  $\varphi$ :

$$E = E_0(\varphi) \exp \left( -i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \eta \right) \right).$$

На рис. 1 приведены профили амплитуд интерференции двух противоположно закрученных световых волн с разными углами вращения.



**Рис. 1. Зависимость амплитуды от направления при интерференции двух противоположно закрученных волн**

### 3. Заключение

Подводя итог, видим, что развитая в статье гипотеза обобщения теории электромагнетизма Максвелла на семимерное пространство-время, позволяет не отказываться от волновой модели при описании закрученных световых волн. В частности, продемонстрированное явление интерференции противоположно закрученных световых волн как и любое явление интерференции обусловлено именно волновой природой света, количественные закономерности которого зависят от длины волны  $\lambda$  и угла вращения  $\mu$ .

Выдвинутая гипотеза описания электромагнитных взаимодействий в семимерном пространстве-времени позволяет упростить процедуру математического описания закрученных световых волн и не выходить за рамки волновой модели.

## Литература

1. Orbital Angular Momentum of Light and the Transformation of Laguerre-Gaussian Laser Modes / L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman // *Phys. Rev. A*. — 1992. — № 45. — С. 8185–8189.
2. Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity / H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — № 75. — С. 826.
3. Electron Vortex Beams with High Quanta of Orbital Angular Momentum / Benjamin J. McMorran, Amit Agrawal, Ian M. Anderson и др. // *Science*. — 2011. — Т. 331, № 6014. — С. 192–195.
4. First Observation of Photons Carrying Orbital Angular Momentum in Undulator Radiation / J. Bahrtdt, K. Holldack, P. Kuske и др. // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — № 111. — С. 034801.
5. *Torres J. P., Torner L.* Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum. — Bristol: Wiley-VCH, 2011.
6. *Arita Y., Mazilu M., Dholakia K.* Laser-Induced Rotation and Cooling of a Trapped Microgyroscope in Vacuum // *Nature Communications*. — 2013. — № 4. — С. 3–11.
7. *Портнов Ю. А.* Уравнения поля в семимерном пространстве-времени. — Москва: МГУП им. Ивана Федорова, 2013.
8. *Portnov Y. A.* Gravitational Interaction in Seven-Dimensional Space-Time // *Gravitation and Cosmology*. — 2011. — Т. 17, № 2. — С. 152–160.
9. *Portnov Y. A.* Gravity Probe B Experiment in 7D Space-and-time Continuum // *Review of Applied Physics*. — 2013. — № 4. — С. 96–98.
10. *Portnov Y. A.* Obtaining Galaxy Rotation Curves Without Dark Matter // *Gravitation and Cosmology*. — 2014. — Т. 20, № 4. — С. 279–281.
11. *Портнов Ю. А.* Динамическая и статическая космологическая постоянная в семимерных гравитационных уравнениях // *Пространство время и фундаментальные взаимодействия*. — 2014. — № 3. — С. 32–37.
12. *Hermann R.* Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Paper. — Brookline: Math Sci Press, 1975.
13. *Димитриенко Ю. И.* Тензорное исчисление. — Москва: Высшая школа, 2001.

UDC 531-4:537.877

## The Interference of Two Oppositely Twisted Light Waves

Yu. A. Portnov

*The Moscow State Automobile & Road Technical University  
64, Leningradskii pr., Moscow, Russia, 125319*

Recent researches in the field of classical and quantum optics, have established the fact that the light can carry not only energy and linear momentum, but also angular momentum. To prove this, experiments were carried out on the creation and detection of twisted light. In the present work, the Maxwell theory of electromagnetism is generalized to the space with rotation. For this purpose the seven-dimensional model of space-time developed by the author is used. In this model the translational coordinates and time as well as the rotational coordinates are used. On the basis of generalized equations of electromagnetic field, solutions describing the twisted light are obtained. Thus, the article proposes non-quantum approach to describe the twisted light, without using the concept of spin. We also consider the superposition of two differently twisted light waves. It is shown that the result this superposition is a wave with an unusual profile of the amplitude that depends on the

direction. The author suggests that such approach to describe the twisted waves can help to look differently at some of the issues of classical and quantum optics.

**Key words and phrases:** the theory of electromagnetism Maxwell, a seven-dimensional space-time, twisted light.

## References

1. L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman, Orbital Angular Momentum of Light and the Transformation of Laguerre-Gaussian Laser Modes, *Phys. Rev. A* (45) (1992) 8185–8189.
2. H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity, *Phys. Rev. Lett.* (75) (1995) 826.
3. B. J. McMorran, A. Agrawal, I. M. Anderson, A. A. Herzing, H. J. Lezec, J. J. McClell, J. Unguris, Electron Vortex Beams with High Quanta of Orbital Angular Momentum, *Science* 331 (6014) (2011) 192–195.
4. J. Bahrtdt, K. Holldack, P. Kuske, R. Muller, M. Scheer, P. Schmid, First Observation of Photons Carrying Orbital Angular Momentum in Undulator Radiation, *Phys. Rev. Lett.* (111) (2013) 034801.
5. J. P. Torres, L. Torner, *Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum*, Wiley-VCH, Bristol, 2011.
6. Y. Arita, M. Mazilu, K. Dholakia, Laser-Induced Rotation and Cooling of a Trapped Microgyroscope in Vacuum, *Nature Communications* (4) (2013) 3–11.
7. Y. A. Portnov, *The Field Equations in Seven-Dimensional Space-Time*, Moscow State University of Printing Arts, Moscow, 2013, in Russian.
8. Y. A. Portnov, Gravitational Interaction in Seven-Dimensional Space-Time, *Gravitation and Cosmology* 17 (2) (2011) 152–160.
9. Y. A. Portnov, Gravity Probe B Experiment in 7D Space-and-time Continuum, *Review of Applied Physics* (4) (2013) 96–98.
10. Y. A. Portnov, Obtaining Galaxy Rotation Curves Without Dark Matter, *Gravitation and Cosmology* 20 (4) (2014) 279–281.
11. Y. A. Portnov, Dynamic and Static Cosmological Constant in a Seven-Dimensional Gravitational Equations, Space, time and fundamental interactions (3) (2014) 32–37, in Russian.
12. R. Hermann, *Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Paper*, Math Sci Press, Brookline, 1975.
13. Y. I. Dimitrienko, *Tensor Calculus*, Higher school, Moscow, 2001, in Russian.