

**Численно-аналитическое исследование модели
градиентного оптического волновода для получения
эквидистантности спектра волноводных мод**

Т. П. Пузынина*, **Во Чонг Тхак**[†]

** Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований*

ул. Жолио-Кюри, д. 6, г. Дубна, Московская область, Россия, 141980

† Нячангский институт технологических исследований и применений

Вьетнамская академия наук и технологий

ул. 02 Хунг Вьонг, г. Нячанг, Вьетнам

На основе численного и аналитического подхода к решению обратной параметрической задачи Штурма–Лиувилля исследована модель планарного оптического волновода с линейным, экспоненциальным и модифицированным экспоненциальным профилями показателя преломления волноводного слоя с целью изучить возможность вычисления параметров указанных профилей, обеспечивающих близость спектра волноводных мод к эквидистантному.

Для численного анализа применяется разработанный ранее комплекс программ в системе MAPLE. Для решения прямой спектральной задачи с заданными параметрами предложена схема, использующая аналитическое представление общего решения волнового дифференциального уравнения. Схема используется для дополнительного контроля точности результатов, если замкнутый аналитический вид общего решения может быть найден средствами системы MAPLE.

Для модели линейного профиля определена область изменения параметров, в которой задача Штурма–Лиувилля для описания спектра волноводной моды имеет три решения. Эта область граничит с областью, где эта задача имеет только два решения, и вычислена точка бифуркации по параметрам. В окрестности точки бифуркации определены параметры, обеспечивающие приближённую эквидистантность спектра.

Результаты, полученные ранее для экспоненциального и модифицированного профилей, скорректированы в соответствии с вычисленным в линейном случае значением параметра, соответствующего высоте волноводного слоя. Получено улучшение характеристик эквидистантности спектра.

Ключевые слова: волновое уравнение, модельный потенциал, параметры модели, спектр волноводных мод, эквидистантность спектра, квадратичный функционал, минимизация.

1. Введение

При изучении волноводной интегральной оптики используются устройства вывода сигналов, которые преобразуют координатное представление информации в спектральное. Спектральные линии подаются на регистрирующую линейку ФЭУ или других преобразователей. Чем более равномерно распределены спектральные линии градиентного волновода, тем проще изготовить разрешающую оптическую линейку. Поэтому задача изготовления волновода с эквидистантным спектром является актуальной.

В работе [1] рассмотрен волновод с экспоненциальным профилем показателя преломления, представляющий интерес с точки зрения его технологической реализации. Однако расчёты спектра в этой модели показали, что найденные параметры в физически обоснованных областях их изменения дают весьма приближённую эквидистантность спектра. Там же рассмотрен модифицированный экспоненциальный профиль волноводного слоя, для которого получен более точный результат эквидистантности спектра, однако вопрос технологической реализации такого волновода открыт. Основное отличие профилей состоит в знаках их

Авторы выражают благодарность профессору И.В. Пузынину за постановку задачи, обсуждение результатов и поддержку на всех этапах работы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-01-00595-а.

вторых производных, а именно — у первого он положительный, а у второго — отрицательный.

В данной работе проведены аналогичные исследования для линейного профиля показателя преломления волноводного слоя. Эта модель занимает промежуточное место между двумя ранее рассмотренными моделями.

На рис. 1 схематично изображены три упомянутых профиля $n^2(x)$ показателя преломления рассматриваемой модели.

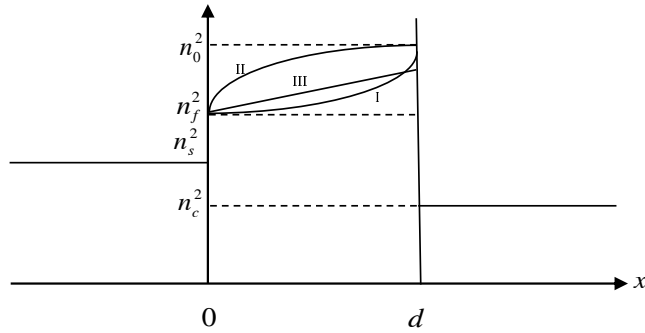


Рис. 1. Асимметричные профили показателя преломления: экспоненциальный (I), модифицированный (II) и линейный (III)

Константы n_s , n_f ($n_f > n_s$) — показатели преломления подложки и нанесённой на неё плёнки соответственно, n_c ($n_f > n_s > n_c$) — показатель преломления воздуха, d — параметр, высота имплантированного слоя, n_0 — значение показателя преломления на поверхности имплантированного слоя ($n_0^2 = n^2(x, \Delta) |_{x=d}$, Δ — параметр).

Выполнены сравнения результатов работы [1] с полученными для линейного профиля показателя преломления. Кроме того, численные результаты подтверждены, если возможно, аналитическими исследованиями модели с помощью средств системы MAPLE.

2. Постановка задачи и метод решения

Уравнение, определяющее спектр для компоненты E_y волноводных ТЕ — мод, в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + (n^2(x) - \beta^2) E_y(x) = 0, \quad (1)$$

где профиль показателя преломления $n^2(x)$ (потенциал) задан как

$$n^2(x) = \begin{cases} n_s^2, & x < 0; \\ n_c^2, & x > d, \\ n_f^2 \left(1 - \Delta \left(1 - \exp\left(\frac{x}{d}\right)^\alpha \right) \right), & 0 \leq x \leq d. \end{cases} \quad (2)$$

Второе уравнение в (2) имеет вид классического определения ($\alpha = 1$) экспоненциального профиля показателя преломления [2], [3] (I на рис. 1), а модифицированный профиль рассмотрен в [1] при $0 < \alpha \leq 0,5$; $0 \leq x \leq d$ (II на рис.1).

Рассмотрим линейную модификацию профиля показателя преломления в виде

$$n^2(x) = ax + n_f^2; \quad 0 \leq x \leq d, \quad (2a)$$

где $a = \frac{\Delta}{d}$, (III на рис. 1).

Граничные условия

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dx} E_y(x) - \sqrt{\beta^2 - n_s^2} E_y(x) \right]_{x=0} = 0, \\ \left[\frac{d}{dx} E_y(x) + \sqrt{\beta^2 - n_c^2} E_y(x) \right]_{x=d} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

являются следствием условий равенства логарифмических производных при $x = 0$ и $x = d$ для $E_y(x)$ и экспоненциально убывающих асимптотик ($x < 0, x > d$) решений уравнения (1), (2). Граничная задача (1)–(3) является задачей Штурма–Лиувилля на отрезке $0 \leq x \leq d$.

Величины d и Δ определяют вектор параметров модели

$$\bar{p} = (d, \Delta), \quad d > 0, \quad \Delta > 0,$$

от которого зависит спектр решений задачи (1)–(3)

$$\{\beta_j^2(\bar{p}), E_y^{(j)}(\bar{p}, x)\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N(\bar{p}),$$

где $\beta_j^2(\bar{p})$ — собственное значение, $E_y^{(j)}(\bar{p}, x)$ — соответствующая собственная функция. Собственные значения упорядочены

$$\beta_0^2(\bar{p}) > \beta_1^2(\bar{p}) > \beta_2^2(\bar{p}) > \dots > \beta_N^2(\bar{p}) > 0.$$

Введём обозначение $\rho_j(\bar{p}) = \beta_{j-1}^2(\bar{p}) - \beta_j^2(\bar{p})$, $j = 1, 2, \dots, N(\bar{p})$. Тогда для эквидистантности спектра собственных значений требуется выполнение системы равенств

$$\rho_1(\bar{p}) = \rho_2(\bar{p}) = \dots = \rho_N(\bar{p}). \quad (4)$$

Следовательно, для исследуемой модели возникает обратная задача, в которой по заданной характеристике спектра собственных значений (4) требуется восстановить в параметрическом семействе $n^2(\bar{p}, x)$ (2) конкретный потенциал (то есть найти вектор параметров \bar{p}^*), с помощью которого можно наилучшим образом воспроизвести систему равенств (4). Приближенное решение этой задачи можно свести к минимизации функционала

$$\Phi(\bar{p}) = \sum_{j=2}^{N(\bar{p})} (\rho_1(\bar{p}) - \rho_j(\bar{p}))^2. \quad (5)$$

Дефект эквидистантности спектра определяется по формуле

$$D_\rho = \sqrt{\min_{\bar{p}} \Phi(\bar{p})}. \quad (6)$$

3. Численно-аналитический анализ модели

Значения физических параметров (показателей преломления) заданы [4]:

$$n_s^2 = (1, 47)^2, \quad n_f^2 = (1, 565)^2, \quad n_c^2 = (1, 0)^2.$$

Ожидаемое реалистическое значение показателя преломления $n_0^2 = (2, 1)^2$ [4], при этом $\Delta \approx 0, 46$.

Для вычисления значения функционала $\Phi(\bar{p})$ (5) при заданном векторе параметров \bar{p} используется программа SLIP4M [5], решающая разностную задачу Штурма–Лиувилля, аппроксимирующую задачу (1)–(3).

Численное решение задачи минимизации функционала $\Phi(\bar{p})$ (5) в заданной области G ($\bar{p} \in G$) реализуется с помощью известной процедуры покоординатного спуска, поскольку вектор \bar{p} содержит только две компоненты. Одномерная минимизация функционала при фиксированном значении одной из компонент вектора \bar{p} осуществляется с использованием процедуры, реализующей модификацию метода парабол. Соответствующие программы: CDMIN — процедура покоординатного спуска и PARMIN — процедура одномерной минимизации с помощью модификации метода парабол, составлены в системе MAPLE [6, 7]. Точность результатов оценивается численно, а также сравнением с аналитическими результатами, полученными в системе MAPLE в случаях, когда это возможно.

Аналитическое решение задачи Штурма–Лиувилля (1)–(3) находится при вычисленном значении вектора параметров \bar{p}^* . Обращение к процедуре dsolve даёт выражение для общего решения уравнения (1),

$$y(x, \bar{p}^*, \beta^2, C_1, C_2) = C_1 y_1(x, \bar{p}^*, \beta^2) + C_2 y_2(x, \bar{p}^*, \beta^2), \quad (7)$$

где C_1, C_2 — произвольные константы, а y_1, y_2 — линейно независимые решения уравнения (1), выражающиеся через специальные функции и зависящие от собственного вектора β^2 . Для контроля необходимо проверить правильность полученного с помощью процедуры dsolve выражения (7) путём его подстановки в уравнение (1) и получения в результате 0. Для вычисления собственных значений β^2 используется подстановка выражения (7) в граничные условия (3). В результате получаем однородную линейную систему уравнений относительно констант C_1 и C_2 , ненулевые решения которой существуют, если определитель системы равен 0. Выражение для определителя представляет собой функцию относительно β^2 , а нули этой функции, определяемые с помощью процедуры fsolve, являются искомыми собственными значениями задачи (1)–(3).

Численный анализ модели с линейным профилем показателя преломления (2а) включает определение области изменения параметров, в которой задача (1)–(3) имеет как минимум три решения. Как и в работе [1], была выбрана окрестность ожидаемого значения параметра $\Delta \approx 0,46$ ($0,4 \leq \Delta \leq 0,7$) при фиксированном значении параметра $d = 3\pi$. Расчёты в этой окрестности с шагом $h_\Delta = 0,1$ показали, что задача (1)–(3) имеет только два решения. Дальнейший двумерный (Δ, d) поиск нужных значений параметров осуществлялся при $0,4 \leq \Delta \leq 0,7$ с шагами $h_\Delta = 0,1; 0,01; 0,001$ и $d > 3\pi$ ($d_n = (3 + h_d n)\pi$, $n = 1, 2, \dots$) с шагами $h_d = 0,01; 0,001$. Минимальные значения шагов h_Δ и h_d задавались для уточнения результатов поиска. Была определена точка $\bar{p}(\Delta, d) = (\Delta = 0,565, d = 3,097\pi)$, в которой задача (1)–(3) имеет три решения. Эта точка находится в близкой окрестности точки бифуркации по параметрам, при переходе через которую задача (1)–(3) меняет число решений с двух до трёх. Далее значение параметра $d = 3,097\pi$ фиксировалось, а минимизация функционала (5) выполнялась в области $0,565 \leq \Delta \leq 0,7$. Результаты представлены в таблице 1 (колонка III).

Из таблицы 1 (III) видно, что в процессе минимизации функционала (5) в точке $\bar{p}^*(\Delta, d) = (\Delta = 0,59285, d = 3,097\pi)$ достигнут дефект эквидистантности спектра $D_\rho \approx 0,01$, то есть $\rho_1 \approx \rho_2 \approx 0,278 \pm 0,005$. Эти результаты подтверждаются сравнением с результатами, полученными аналитически в системе MAPLE. Подставляя в потенциал (2а) вычисленные значения компонент \bar{p}^* , находим с помощью процедуры dsolve аналитический вид общего решения уравнения (1) (digits=7)

$$y(x) = C_1 \cdot \text{AiryAi} \left(\frac{1}{6093300} (-2449225 + 1000000\beta^2 - 60933x) \cdot 60933^{1/3} \right) +$$

$$+ C_2 \cdot \text{AiryBi} \left(\frac{1}{6093300} (-2449225 + 1000000\beta^2 - 60933x) \cdot 60933^{1/3} \right), \quad (8)$$

которое выражается через функции Эйри Ai и Bi. Далее сводим решение задачи (1)–(3) относительно собственных значений β^2 к поиску нулей определителя однородной системы относительно независимых констант C_1 и C_2 , получающейся из граничных условий (3). Приведённые в таблице 1 (III) для сравнения результаты, использующие аналитическое решение (8), демонстрируют хорошее совпадение с численными результатами до шестого знака после запятой.

Отметим, что для экспоненциального (рис. 1, область I) профиля (2) при $\alpha = 1$ также можно с помощью процедуры `dsolve` получить аналитический вид общего решения уравнения (1). Например, для заданных значений $\Delta = 0,1810$; $d = 3,097\pi$ аналитическое решение имеет вид (`digits=7`)

$$y(x) = C_1 \cdot \text{BesselJ} \left(\frac{20000}{1027801} \sqrt{-2005915 + 1000000\beta^2}, \right. \\ \left. \frac{2000}{45929343287} \sqrt{88525753885899930} \cdot \exp \left(\frac{102781}{2000000} x \right) \right) + \\ + C_2 \cdot \text{BesselY} \left(\frac{20000}{1027801} \sqrt{-2005915 + 1000000\beta^2}, \right. \\ \left. \frac{2000}{45929343287} \sqrt{88525753885899930} \cdot \exp \left(\frac{102781}{2000000} x \right) \right). \quad (9)$$

Оно содержит независимые константы C_1 и C_2 и выражается через функции Бесселя J и Y . Однако для модифицированного (рис. 1, область II) при $\alpha = 1/3$ профиля (2) общее решение уравнения (1) получить не удалось.

Таблица 1

Характеристики спектров компоненты E_y волноводных ТЕ-мод для экспоненциального (I), модифицированного (II) и линейного (III) профилей показателя преломления

Профиль	I		II ($\alpha = 1/3$)	III	
d	3,097 π				
$\Delta \in$			[0, 4; 0, 5]	[0, 565; 0, 7]	
Δ^*	0,1810 [1]		0,45108	0,59285	
Φ_{\min}	1,73E-03	Аналит.	1,87E-12	1,13E-04	Аналит.
β_0^2	2,7661417	2,7661417	3,8697591	2,7234843	2,7234844
β_1^2	2,4497469	2,4497470	3,4138084	2,4394938	2,4394940
β_2^2	2,1748934	2,1748938	2,9578591	2,1661191	2,1661194
ρ_1	0,3163948	0,3163947	0,4559507	0,2839905	0,2839904
ρ_2	0,2748534	0,2748532	0,4559493	0,2733747	0,2733745
D_ρ	4,15E-02		1,37E-06	1,06E-02	

Таблица 1 содержит также данные анализа результатов [1] для экспоненциального (I) и модифицированного (II) профилей. Для сравнимости результатов с полученными для профиля (III) задано значение $d = 3,097\pi$.

Для профиля (I) задано значение $\Delta = 0,1810$, обеспечивающее в [1] при $d = 3\pi$ лучшее значение минимума функционала (5) $\Phi_{\min} = 0,0025$ (дефект эквидистантности (6) $D_\rho = 0,05$). Сравнение этих результатов с данными таблицы 1 (I) показывает, что увеличение значения d до $d = 3,097\pi$ приводит к улучшению характеристик эквидистантности

$$\begin{aligned}\Phi_{\min}^I &= 1,73 \cdot 10^{-3} < 2,5 \cdot 10^{-3}[1], \\ D_\rho^I &= 4,15 \cdot 10^{-2} < 5,10^{-2}[1].\end{aligned}$$

Результаты подтверждаются данными, полученными с помощью аналитического решения (9).

Из таблицы 1 (II) видно, что процесс минимизации функционала (5) в области $\bar{p} = (d, \Delta) \in \{3,097\pi, 0,4 \leq \Delta \leq 0,5\}$ для профиля (III) ($\alpha = 1/3$) также приводит к улучшению характеристик эквидистантности по сравнению с работой [1]

$$\begin{aligned}\Phi_{\min}^{II} &= 1,87 \cdot 10^{-12} < 9,4 \cdot 10^{-12}[1], \\ D_\rho^{II} &= 1,37 \cdot 10^{-6} < 3 \cdot 10^{-6}[1].\end{aligned}$$

Найденное значение $\Delta^* = 0,4511$ ближе к прогнозируемому значению $\Delta = 0,46$, чем вычисленное в работе [1] $\Delta_{\min} = 0,4773$.

Для линейного профиля (III) $\Delta^* = 0,59285$ также более близко к значению $\Delta = 0,46$, чем $\Delta = 0,1810$ [1].

4. Заключение

Проведён сравнительный анализ модели оптического волновода с экспоненциальным, модифицированным и линейным профилями показателя преломления. Показана возможность улучшения характеристик эквидистантности спектра волноводной моды в модели с экспоненциальным профилем показателя преломления [1] путём увеличения высоты d имплантированного слоя. Точность вычисления спектральных характеристик задачи Штурма–Лиувилля (1)–(3) эффективно контролируется аналитическим решением этой задачи в системе MAPLE.

Литература

1. Пузынина Т. П., Тхак В. Ч. Численное исследование параметров модели градиентного оптического волновода с эквидистантным спектром волноводных мод // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2012. — Т. 3, № 8. — С. 79–86.
2. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984. — 512 с.
3. Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974. — 574 с.
4. Refractive Index Info. — <http://refractiveindex.info/>.
5. Тхак В. Ч., Пузынина Т. П. SLIPH4M – программа для численного решения частичной проблемы Штурма–Лиувилля // Программные продукты и системы. — 2011. — Т. 3, № 6. — С. 75–80. — <http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/slip4m/index.html>.
6. Пузынина Т. П., Тхак В. Ч. Комплекс программ для решения обратной параметрической задачи уравнения Шредингера // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2012. — Т. 2, № 8. — С. 46–53. — <http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/paper1.pdf>.
7. PIPES. — <http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/pipes/index.html>.

UDC 535.8 517.984.54 519.6

Numerical-Analytical Investigation of the Model of Gradient Optical Waveguide for Obtaining Equidistant Spectrum of Waveguide Modes

T. P. Puzynina*, Vo Trong Thach[†]

* *Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research*

Joliot-Curie, 6, Dubna, Moscow region, Russia, 141980

[†] *Nhatrang Institute of Technology Research and Application
Vietnam Academy of Science and Technology
02 Hung Vuong, Nhatrang city, Vietnam*

A model of the planar optical waveguide with linear, exponential and modified exponential profiles of the refractive index has been studied on the basis of numerical and analytical approaches to solving a parametric inverse Sturm–Liouville problem. The goal of the investigation is to determine the profile parameters which provide proximity of the waveguide modes spectrum to an equidistant one.

A software complex which we have developed in the MAPLE system is used for a numerical analysis. For solving a direct spectral problem with predetermined parameters of the model, a scheme has been proposed which uses an analytical representation of the general solution to the wave differential equation. The scheme is used for a supplementary accuracy control of the results, if a correct analytical general solution can be obtained by MAPLE tools.

For the linear profile model, a parameter domain has been defined in which the Sturm–Liouville problem for description of the waveguide mode spectrum has three solutions. This domain borders on the domain where the Sturm–Liouville problem has two solutions only, and a bifurcation point is calculated over parameters. In a vicinity of this point we have calculated parameters that provide approximate equidistance of the waveguide mode spectrum.

The results for exponential and modified exponential profiles have been recalculated in view of the calculated value of the parameter obtained for a linear profile model. This parameter corresponds to the height of the waveguide layer. The characteristics of spectrum equidistance have been improved.

Key words and phrases: wave equation, model potential, model parameters, waveguide modes spectrum, spectrum equidistance, quadratic functional, minimization.

References

1. T. P. Puzynina, V. T. Thach, Numerical Investigation of Parameters in the Model of Gradient Optical Waveguide with Equidistant Spectrum of Waveguide Modes, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia (Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"), number = 3, year = 2012, pages = 79-86, note = In Russian, language = english.
2. M. Adams, Introduction to the Theory of Optical Waveguides, Mir Publisher, Moscow, 1984, in Russian.
3. D. Marcuse, Theory of Dielectric Optical Waveguides, Mir Publisher, Moscow, 1974, in Russian.
4. Refractive Index Database.
URL {<http://refractiveindex.info/>}
5. V. T. Thach, T. P. Puzynina, SLIPH4M — a Program for Numerical Solution of the Sturm–Liouville Problem, Programmnye produkty i sistemy (3) (2011) 75–80, in Russian.
URL {<http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/sliph4m/index.html>}
6. T. P. Puzynina, V. T. Thach, The Application Package to Solve a Parametric Inverse Problem for the Schrödinger Equation, Information Technology and Computer Systems (2) (2012) 46–53, in Russian.
URL {<http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/paper1.pdf>}
7. PIPES.
URL {<http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/pipes/index.html>}