УДК 513.831

Паракомпактность экстремально несвязных пространств

В. Л. Клюшин, Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейн

Кафедра высшей математики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В данной работе рассматриваются ω-отображения, определяемые с помощью полуоткрытых множеств, т.е. множеств, являющихся объединениями открытых множеств и подмножеств их границ. Это квазинепрерывные ω-отображения. Характеризация паракомпактности, основанная на непрерывных ω-отображениях, давно и хорошо известна. Интересно выяснить, в какой мере можно отказаться от требования непрерывности ω-отображения в характеризации паракомпактности топологических пространств, обладающих теми или иными дополнительными свойствами. Одним из таких свойств является экстремальная несвязность. Основная цель нашей работы — дать характеристику экстремально несвязного паракомпактного пространства с помощью ω-отображения на метрическое пространство, ослабив требование непрерывности. Нами доказано, что экстремально несвязное пространство паракомпактно тогда и только тогда, когда для всякого его покрытия ω, состоящего из открытых множеств. существует квазинепрерывное ω-отображение на некоторое метрическое.

Ключевые слова: полуоткрытое множество, квазинепрерывное отображение, ω-отображение, s-локально конечная система, паракомпактность, экстремально несвязное пространство.

В наших предыдущих работах [1, 2] рассматривались пространства и отображения, основанные на просто-открытых множествах, или so-множествах. Интересным частным случаем so-множества является полуоткрытое множество, то-есть множество, содержащее открытое множество и содержащееся в замыкании этого открытого множества. С понятием полуоткрытого множества связано, в частности, понятие квазинепрерывного отображения. Здесь мы дадим характеристику экстремально несвязных пространств, основанную на квазинепрерывных ω-отображениях.

Определение 1. Отображение $f : X \to Y$ называется ω-отображением для покрытия ω пространства X, если для всякой точки $y \in Y$ существует такая её окрестность $O(y)$ и такое $U \in \omega$, что $f^{-1}(O(y)) \subset U$.

Хорошо известна характеристика паракомпактных пространств, основанная на непрерывных ω-отображениях:

Теорема 1. *Для того, чтобы хаусдорфово пространство X было паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого покрытия ω этого пространства существовало метрическое пространство Y и ω-отображение $f : X \to Y$ пространства X на Y.*

Это утверждение было сформулировано и доказано в работе М. Катетова [3] и несколько позднее — В. И. Пономарева [4], доказавшего при этом дополнительно, что, предполагая в приведённой выше формулировке метрическое пространство Y имеющим счётную базу, получаем характеристику финально-компактных (линделефовых) пространств. Следует заметить, что значительно раньше это утверждение доказал (но не сформулировал в явном виде) Даукер.

В 1963 г. В. В. Федорчук [5] получил аналогичные характеристики для сильно паракомпактных и локально компактных паракомпактных пространств.

Напомним необходимые определения.

Определение 2. Множество S называется полуоткрытым, если существует такое открытое множество O, что $O \subset S \subset [O]$ (квадратными скобками мы обозначаем замыкание). Дополнение к полуоткрытому множеству называется полузамкнутым множеством. Полузамыканием множества A называется наименьшее полузамкнутое множество, содержащее A и обозначается через $\mathrm{scl}(A)$.

Определение 3. Отображение $f : X \to Y$ называется квазинепрерывным, если прообраз всякого открытого множества в Y есть полуоткрытое множество в X.

Предложение 1. Если для всякого покрытия ω пространства X полуоткрытыми множествами существует квазинепрерывное ω-отображение $f : X \to Y$ на бикомпактное пространство Y, то всякое покрытие пространства X полуоткрытыми множествами содержит конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть дано пространство X и его полуоткрытое покрытие ω. Для каждой точки $y \in Y$ возьмём такую окрестность $O\,(y)$, что $f^{-1}\,(O\,(y))$ содержится в некотором элементе покрытия ω.

Рассмотрим покрытие $\lambda = \{O\,(y) : y \in Y\}$ пространства Y. Так как Y бикомпактно, то существует конечное подпокрытие $\mu = \{O\,(y_i) : i = 1, ..., n\}$ покрытия λ. Тогда $f^{-1}\mu$ есть конечное покрытие, вписанное в ω.

Пусть $f^{-1}(O\,(y_i)) \subset U_i \in \omega$ для каждого i. Тогда $\{U_i : i = 1, ..., n\}$ — конечное подпокрытие покрытия ω. □

Определение 4. Система множеств называется s-локально конечной, если для каждой точки пространства существует полуоткрытое множество, содержащее эту точку и пересекающееся не более чем с конечным числом элементов этой системы.

Предложение 2. Если для покрытия ω существует квазинепрерывное ω-отображение $f : X \to Y$ пространства X на некоторое метрическое пространство Y, то в ω можно вписать s-локально конечное покрытие.

Доказательство. Пусть ω — открытое покрытие пространства X и $f : X \to Y$ есть ω-отображение на метрическое пространство Y. Для каждой точки $y \in Y$ зафиксируем окрестность $O\,(y)$, полный прообраз которой содержится в некотором элементе покрытия ω. Семейство $\eta = \{O\,(y) : y \in Y\}$ есть открытое покрытие пространства Y. Известно, что метрическое пространство паракомпактно. Поэтому можно вписать в η локально конечное открытое покрытие μ. Тогда $f^{-1}\,(\mu) = \left\{f^{-1}\,(U) : U \in \mu\right\}$ — s-локально конечное покрытие пространства X, вписанное в покрытие ω. □

Определение 5. Пространство называется экстремально несвязным, если замыкание всякого его открытого множества открыто.

Теорема 2. *Экстремально–несвязное регулярное пространство X паракомпактно тогда и только тогда, когда для всякого его открытого покрытия ω существует квазинепрерывное ω-отображение $f : X \to Y$ пространства X на некоторое метрическое пространство Y.*

Доказательство. 1. Необходимость очевидна. Пусть X — паракомпакт. Тогда по теореме 1 для всякого его открытого покрытия ω существует непрерывное (следовательно, и подавно, квазинепрерывное) ω-отображение на некоторое метрическое пространство.

2. Достаточность. Пусть X — регулярное экстремально несвязное пространство. Пусть γ — произвольное открытое покрытие пространства X Для каждой точки $x \in X$ выберем элемент $U\,(x) \in \gamma$, содержащий эту точку. Так как X регулярно, то существует такое открытое множество $V\,(x)$, что $x \in V\,(x) \subset [V\,(x)] \subset U\,(x)$. Рассмотрим открытое покрытие $\omega = \{V\,(x) : x \in X\}$ пространства X. Очевидно, оно вписано с замыканиями в покрытие γ. По предположению существует

ω-отображение пространства X на некоторое метрическое пространство. Следовательно, согласно Предложению 2 в ω можно вписать s-локально конечное покрытие полуоткрытыми множествами: $\lambda = \{W_\alpha : \alpha \in A\}$. Для каждого $\alpha \in A$ выберем такое открытое множество G_α, что $G_\alpha \subset W_\alpha \subset [G_\alpha]$. Убедимся, что покрытие $\mu = \{[G_\alpha] : \alpha \in A\}$ вписано в покрытие γ. Действительно, для каждого $\alpha \in A$ имеем $[G_\alpha] = [W_\alpha] \subset [V(x)]$ для некоторого $V(x) \in \omega$, следовательно, $[G_\alpha] \subset U$ для некоторого $U \in \gamma$. Кроме того, так как X экстремально несвязно, то $[G_\alpha]$ открыто для каждого $\alpha \in A$. Убедимся теперь в том, что покрытие $\mu = \{[G_\alpha] : \alpha \in A\}$ локально конечно. Для этого воспользуемся очевидным замечанием (K. Y. Al-Zoubi [6,7]): система множеств s-локально конечна тогда и только тогда, когда система их полузамыканий s-локально конечна. Известно также, что в экстремально несвязном пространстве полузамыкание всякого полуоткрытого множества совпадает с его замыканием (см. T. Noiri [??]). Пусть $x \in X$. Система $\{scl(W_\alpha) : \alpha \in A\}$является s-локально конечной, поэтому μ является s-локально конечным покрытием ($[G_\alpha] = [W_\alpha] = scl(W_\alpha)$ для всех α). Возьмём такое полуоткрытое множество $O(x)$, что $x \in O(x)$ и $O(x)$ пересекается лишь с конечным числом элементов μ. Существует такое открытое множество $O'(x)$, что $O'(x) \subset O(x) \subset [O'(x)]$. Так как пространство экстремально несвязно, то $[O'(x)]$ — открытая окрестность точки x, а так как в экстремально несвязном пространстве непересекающиеся открытые множества имеют непересекающиеся замыкания, то $[O'(x)] \cap [G_\alpha] \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $O(x) \cap [G_\alpha] = \varnothing$. Итак, μ — локально конечное открытое покрытие, вписанное в исходное открытое покрытие γ. Паракомпактность пространства X доказана. □

Литература

1. *Клюшин В. Л., Аль Баяти Джелал Хатем Хусейн.* О некоторых обобщениях паракомпактности // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». — 2013. — № 3. — С. 5–10.
2. *Al Bajati Jalal Hatem Hussein., Klyushin V. L.* On so-paracompact Spaces and sc-mappings. — 2013. — Pp. 73–74.
3. *Čech E.* Topological Spaces. — Prague, 1959.
4. *Пономарев В. И.* О паракомпактных и финально компактных пространствах // Доклады АН СССР. — 1961. — № 3. — С. 361–363.
5. *Федорчук В. В.* Об ω отображениях паракомпактных пространств // Вестник МГУ. — 1963. — № 2. — С. 20–24.
6. *Al-Zoubi K. Y.* S-expandable Spaces // Acta Math. Hungar. — 2004. — Vol. 102. — Pp. 203–212.
7. *Al-Zoubi K. Y.* S-paracompact Spaces // Acta Math. Hungar. — 2006. — Vol. 110 (1–2). — Pp. 165–174.

UDC 513.831

Paracompactness of Extremally Disconnected Spaces

V. L. Klyushin, Al Bayati Jalal Hatem Hussein

Higher Mathematics Departement
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, Russia, 117198

In this paper we consider the ω-mappings defined by semi-open sets, i.e. sets that are unions of open sets and subsets of their boundaries. This are quasicontinuous ω-mappings. (The mapping $f : X \to Y$ is called quasi-continuous if for any open set $G \subset Y$ the set $f^{-1}(G)$ is a semi-open set). Characterization of paracompactness based on continuous ω-mappings is well known. Of interest is the question of to what extent it is possible to waive the requirement of continuity of ω-mappings in the characterization of paracompactness of topological spaces with those, or other additional properties. One of these properties is extreme disconnectness.

The main goal of our work is to characterize extremely disconnected paracompact space by ω-mapping on the metric space, loosening the requirement of continuity. We have proved that extremely disconnected space X is paracompact if and only if for any open covering ω of X there exists a quasi-continuous ω-mapping on some metric space.

Key words and phrases: semi-open set, quasi-continuous mapping, ω-mapping, s-locally finite system, paracompactness, extremely disconnected space.

References

1. V. L. Klyushin, J. H. H. A. Bayati, Extension of sc-mapping on duplicate of space, Bulletin of PFUR. Series “Mathematics. Information Sciences. Physics” (3) (2013) 5–10, in Russian.
2. Jalal Hatem Hussein. Al Bajati, V. L. Klyushin, On so-paracompact spaces and sc-mappings (2013) 73–74.
3. E. Čech, Topological Spaces, Prague, 1959.
4. V. I. Ponomarev, About paracompact and finally compact spaces, Doklady AN SSSR (3) (1961) 361–363, in Russian.
5. V. V. Fedorchuk, On ω mappings of paracompact spaces, MSU Vestnik (2) (1963) 20–24, in Russian.
6. K. Y. Al-Zoubi, S-expandable spaces, Acta Math. Hungar 102 (2004) 203–212.
7. K. Y. Al-Zoubi, S-paracompact spaces, Acta Math. Hungar 110 (1–2) (2006) 165–174.