

## Исследование надёжности однородной системы облегчённого резервирования в случайной среде

А. Н. Чан

*Кафедра теории вероятностей и математической статистики  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В работе исследуется влияние случайности внешней среды на надёжность работы технических систем и обобщает предыдущие результаты на случай системы тёплого резервирования. Приведён краткий обзор работ по исследованию функционирования систем массового обслуживания в случайной среде. Предложена общая марковская модель надёжности системы, функционирующей в случайной марковской среде. Приведены дифференциальные уравнения для вероятностей состояний такой системы и соотношения для вычисления стационарных и нестационарных характеристик надёжности её работы. Получено выражение для производящей функции моментов времени безотказной работы системы. С целью исследования влияния случайности внешней среды и её изменчивости на характеристики надёжности системы вводится параметр изменчивости среды  $s$ , характеризующий её влияние на интенсивности отказов и восстановлений элементов в различных состояниях среды.

С помощью специально разработанного программного модуля в среде MATLAB проведено численное исследование и сравнение характеристик надёжности для системы облегчённого дублирования, работающей в стабильной и случайной средах с двумя состояниями. Результаты численного исследования, представленные в виде таблиц и графиков, показали как общие черты, так и различия в работе систем в случайной и стабильной средах.

**Ключевые слова:** надёжность систем, случайная среда, стационарные и нестационарные характеристики надёжности системы.

### 1. Введение

Большинство технических систем и биологических объектов подвержены изменениям внешней среды, которые носят как регулярный (смены времён года), так и случайный характер. Влияние этих факторов на надёжность системы представляет значительный интерес в условиях быстро развивающихся технических возможностей современного мира. В настоящей работе исследуется влияние изменчивости внешней среды как на стационарные характеристики надёжности системы, так и на распределение времени её безотказной работы.

Существует ряд работ, посвящённых исследованию поведения систем массового обслуживания, работающих в случайной среде. Классические марковские модели рассматривались в работах [1–6]. Развитие этой проблематики связано с обобщением моделей входящего потока, механизма обслуживания и структуры случайной внешней среды. Достаточно подробный обзор современных работ на эту тему можно найти, например, в [7] и [8]. Однако вопросам исследования надёжности систем, функционирующих в случайной среде, до настоящего времени уделялось недостаточно внимания.

В докладе [9] была предложена марковская модель надёжности системы холодного резервирования, функционирующей в случайной марковской среде. В настоящей работе это исследование распространяется на случай облегчённого резервирования. Целью исследования является изучение влияния случайности внешней среды и её изменчивости на характеристики надёжности системы. С этой целью вводится параметр изменчивости среды  $s$ , указывающий её влияние на интенсивности отказов и восстановлений элементов в различных состояниях среды.

Работа организована следующим образом. В следующем разделе приводится описание модели исследуемой системы и случайного процесса её функционирования. Затем приводятся уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы и процедура вычисления стационарных вероятностей. Следующий раздел посвящён вычислению функции надёжности. Наконец, в последнем разделе 6 содержится пример численного анализа модели в случае системы из двух элементов  $n = 2$ , работающей в случайной среде, принимающей два возможных состояния  $m = 2$ .

## 2. Модель

Рассмотрим систему облегчённого резервирования из  $n$  однородных элементов, которая функционирует в случайной среде, принимающей  $m$  значений. Состояния такой системы могут быть описаны двумерными векторами  $x = (k, j)$ , первая компонента  $k$  которых описывает состояния внешней среды и принимает  $m$  значений ( $k = \overline{1, m}$ ), а вторая компонента показывает число отказавших элементов и принимает  $n + 1$  значение  $j = \overline{0, n}$ . Множество состояний такой системы обозначим через

$$E = \{x = (k, j) : (k = \overline{1, m}), (j = \overline{0, n})\},$$

с конечным общим числом состояний  $N = m \times (n + 1)$  состояний. Множество работоспособных и отказовых состояний обозначим  $E_0$  и  $E_1$  соответственно.

Предположим, что все элементы имеют показательно распределённые длительности безотказной работы и восстановления. Обозначим через  $\alpha, \gamma, \beta$  параметры распределений длительностей безотказной работы в рабочем и резервном состояниях и восстановления в условиях стабильной внешней среды, и через  $\alpha_k, \gamma_k, \beta_k$  соответствующие параметры, когда внешняя среда находится в состоянии  $k$ . При этом предполагается, что при смене состояния внешней среды элементы системы *мгновенно* меняют интенсивности отказов и восстановления. Предположим далее, что изменения внешней среды описываются *однородным марковским процессом* с конечным  $m$  числом состояний и матрицей интенсивностей переходов (МИП)  $\Lambda = [\lambda_{k,l}]$ . Поведение такой системы описывается *двумерным марковским процессом*

$$X(t) = (K(t), J(t)),$$

с пространством состояний  $E$ , при этом первая компонента принимает  $m$  значений и описывает состояния внешней среды, а вторая  $J(t)$  указывают число отказавших элементов системы в момент времени  $t$  и принимает  $n + 1$  значение.

Согласно предположениям система может переходить только в «соседние» состояния. Далее используются матричные обозначения, при этом вектора, как обычно, понимаются как вектора-столбцы, штрих используется для операции транспонирования, в то время как производные обозначаются верхней точкой. Введём обозначения:

- $\Lambda = [\lambda_{k,l}]$  — МИП внешней среды;
- $\vec{\lambda}'_{k,\cdot} = (\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}, \dots, \lambda_{k,m})$  — вектор строки интенсивностей переходов внешней среды из состояния  $k$  ( $k = \overline{1, m}$ );
- $\lambda_k = \sum_{1 \leq l \leq m} \lambda_{k,l}$  — интенсивность изменения  $k$ -го состояния внешней среды;
- $\text{diag} \vec{\lambda}'_{k,\cdot}$  — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят компоненты вектора  $\vec{\lambda}'_{k,\cdot}$ ;
- $A_k = [a_{i,j}(k)]$  — матрица интенсивностей переходов процесса надёжности системы при её работе в  $k$ -ой среде,

$$a_{i,j}(k) = \begin{cases} \alpha_k + \gamma_k(n - i - 1), & \text{при } j = i + 1, \\ -(\alpha_k + \gamma_k(n - i - 1) + \beta_k), & \text{при } j = i, \\ \beta_k, & \text{при } j = i - 1; \end{cases}$$

–  $x = (k, j)$  – состояния системы, которые расположим состояния системы в лексикографическом порядке:

$$E = \{(1, 0), (1, 1), \dots (1, n), \dots (m, 0), (m, 1), \dots (m, n)\}.$$

Обозначим далее через  $k(x)$  и  $j(x)$  компоненты вектора  $x = (k, j)$ .

При сделанных предположениях процесс  $X(t) = (K(t), J(t))$  является двумерным марковским процессом с пространством состояний  $E$  и блочной МИП  $Q = [Q_{x,y}]$ , диагональные блоки  $Q_{x,x}$  которой при  $i(y) = i(x)$  имеют вид трёхдиагональных матриц  $Q_{x,x} = A_{i(x)} - \lambda_{i(x)}I$ , а внедиагональные блоки  $Q_{x,y}$  имеют вид  $Q_{x,y} = \lambda_{j(x),j(y)}I$ , где  $I$  – единичная матрица,

$$Q = [q_{x,y}] = \begin{bmatrix} A_1 - \lambda_1 I & \lambda_{1,2} I & \dots & \lambda_{1,m} I \\ \lambda_{2,1} I & A_2 - \lambda_2 I & \dots & \lambda_{2,m} I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m,1} I & \lambda_{m,2} I & \dots & A_m - \lambda_m I \end{bmatrix}. \quad (1)$$

**Замечания. 1.** В случае неизменной (стабильной) внешней среды соответствующий процесс превращается в обычный процесс рождения и гибели, описывающий работу однородной системы облегчённого резервирования.

**2.** В случае системы из неоднородных элементов с различными интенсивностями отказов и восстановления для разных элементов пространство состояний системы приходится расширять, однако структура МИП остаётся неизменной.

### 3. Уравнения Колмогорова

Обозначим через:

$$\pi_{k,j}(t) = \mathbf{P}\{X(t) = x = (k, j)\}, \quad \pi_{k,j}(0) = a_k \delta_{j,0}$$

вероятности состояний процесса  $X(t)$  и его начальное распределение, а через  $\vec{\pi}(t)$  вектор вероятностей состояний,  $\vec{\pi}'(t) = (\pi'_1(t), \dots, \pi'_m(t))$  где подвектора  $\vec{\pi}'_k(t)$  описывают вероятности состояний системы, когда она работает в  $k$ -ой среде. Обозначим, кроме того, через  $\vec{a}' = (a_1, \dots, a_m)$  начальное распределение внешней среды, и через  $\vec{e}'_0 = (1, 0, \dots, 0)$  – вектор размерности  $n + 1$ , первая (нулевая) компонента которого равна 1, а остальные – 0. Этот вектор соответствует полностью исправному состоянию системы.

В этих обозначениях система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний процесса  $X(t)$  с начальным условием  $\vec{\pi}'(0)$

$$\dot{\vec{\pi}}'(t) = \vec{\pi}'(t)Q, \quad \vec{\pi}'(0) = (a_1 \vec{e}'_0, \dots, a_m \vec{e}'_0) \quad (2)$$

с учётом структуры матрицы  $Q$  может быть представлена в виде системы уравнений, соответствующих работе системы в различных средах:

$$\dot{\vec{\pi}}'_k(t) = \vec{\pi}'_k(t)(A_k - \lambda_k I) + \sum_{i \neq k} \vec{\pi}'_i(t) \lambda_{i,k} I, \quad \vec{\pi}'_k(0) = a_k \vec{e}'_0, \quad (k = \overline{1, m}). \quad (3)$$

Домножая теперь векторные уравнения этой системы на вектор-столбец из единиц  $\vec{1} = (1, \dots, 1)'$  справа, используя обозначение  $\vec{\pi}'_k(t) \vec{1} = p_k(t)$  и замечая, что  $A_k \vec{1} = \vec{0}$ , получим систему уравнений изменения внешней среды,

$$\dot{p}_k(t) = -\lambda_k p_k(t) + \sum_{i \neq k} p_i(t) \lambda_{i,k}, \quad p_k(0) = a_k, \quad (k = \overline{1, m}). \quad (4)$$

Переходя в системе (2) к преобразованиям Лапласа (ПЛ)  $\tilde{\pi}_x(s) = \int e^{-st} \pi_x(t) dt$ , получим с учётом начального условия систему алгебраических уравнений

$$s\tilde{\pi}'(s) - \tilde{\pi}'(0) = \tilde{\pi}'(s)Q, \quad (5)$$

решение которой имеет вид

$$\tilde{\pi}'(s) = \tilde{\pi}'(0)(sI - Q)^{-1}. \quad (6)$$

Последнее выражение имеет вид дробно-рациональной вектор-функции относительно переменной  $s$ , и её обращение позволяет найти нестационарное распределение вероятностей состояний, которое, как, впрочем, и исходную систему уравнений (3), можно использовать для численного анализа.

#### 4. Стационарные характеристики

Стационарные вероятности состояний системы (которые существуют благодаря неразложимости процесса и конечности числа его состояний и совпадают с предельными вероятностями)  $\pi_x = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_x(t)$  удовлетворяют системе уравнений равновесия, или глобального баланса, которая для вектора стационарных вероятностей  $\bar{\pi}' = \{\pi_x, x \in E\}$  с дополнительным условием нормировки имеет вид

$$\bar{\pi}'Q = 0, \quad \bar{\pi}'\bar{1} = 1. \quad (7)$$

Представим уравнения для стационарных вероятностей с учётом нормировки аналогично (3) в виде

$$\bar{\pi}'_k(A_k - \lambda_k I) + \sum_{i \neq k} \bar{\pi}'_i \lambda_{i,k} I = 0, \quad (k = \overline{1, m}), \quad \sum_{1 \leq k \leq m} \bar{\pi}'_k \bar{1} = 1. \quad (8)$$

Умножая эти уравнения на вектор-столбцы из единиц справа и обозначая  $\bar{\pi}'_k \bar{1} = p_k$ , получим систему уравнений для стационарных вероятностей состояний среды

$$-\lambda_k p_k + \sum_{i \neq k} p_i \lambda_{i,k} = 0, \quad (9)$$

которая с условием нормировки  $\sum_{1 \leq k \leq m} p_k = 1$  позволяет найти её единственное решение.

Для численного решения систему уравнений (8), в условиях стационарного функционирования внешней среды и с учётом соотношения  $\lambda_k = -\lambda_{k,k}$ , удобно представить в виде

$$\bar{\pi}'_k A_k + \sum_{1 \leq i \leq m} \bar{\pi}'_i \lambda_{i,k} = 0, \quad \bar{\pi}'_k \bar{1} = p_k, \quad (k = \overline{1, m}). \quad (10)$$

С помощью стационарных вероятностей состояний вычисляются различные стационарные характеристики системы, которые представлены в разделе численного анализа,

- стационарная вероятность работы системы в  $k$ -й внешней среде  $p_k = \bar{\pi}'_k \bar{1}$ ,
- вероятность отказа системы при работе в  $k$ -й среде  $\pi_{k,n}$ ,
- вероятность отказа системы  $\pi_{\text{отк.}} = \sum_{1 \leq k \leq m} \pi_{k,n}$ ,
- вероятность безотказной работы системы  $\pi_{\text{б.р.}} = 1 - \pi_{\text{отк.}}$ .

## 5. Распределение времени безотказной работы

Напомним, что отказовое состояние обозначено через  $E_1$ . Предположим для простоты, что оно имеет вид  $E_1 = \bigcup_{1 \leq k \leq m} (k, n)$ . Обозначим далее через  $T$  время безотказной работы (в.б.р.) системы, представляющее собой момент первого достижения компонентой  $J(t)$  процесса  $X(t)$  отказового множества  $E_1$ ,

$$T = \inf\{t : J(t) \in E_1\}.$$

Вычисление его функции распределения (ф.р.)  $F(t) = \mathbf{P}\{T \leq t\}$  достигается путём исследования соответствующего процесса с отказовым множеством  $E_1$  в качестве поглощающего множества состояний. Представляя матрицу интенсивностей переходов  $Q$ , вектор вероятностей состояний  $\vec{\pi}'(t)$  и вектор начальных состояний в блочном виде

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} \end{bmatrix}, \quad \vec{\pi}'(t) = (\vec{\pi}'_{E_0}(t), \vec{\pi}'_{E_1}(t)), \quad \vec{e}'_0 = (\vec{e}'_{0,E_0}, \vec{e}'_{0,E_1}), \quad (11)$$

где блоки матрицы с индексами 0 и 1 соответствуют переходам процесса из множества состояний  $E_0$  в множество  $E_1$  и обратно, и полагая  $Q_{1,0} = \vec{e}'_{0,E_1} = 0$ , приведём систему уравнений (3) к виду

$$\dot{\vec{\pi}}'_{E_0}(t) = \vec{\pi}'_{E_0}(t)Q_{0,0}, \quad \dot{\vec{\pi}}'_{E_1}(t) = \vec{\pi}'_{E_0}(t)Q_{0,1}. \quad (12)$$

В терминах ПЛ с учётом начального условия эта система представима в виде:

$$s\tilde{\vec{\pi}}'_{E_0}(s) - \vec{e}'_{0,E_0} = \tilde{\vec{\pi}}'_{E_0}(s)Q_{0,0}, \quad s\tilde{\vec{\pi}}'_{E_1}(s) - \vec{e}'_{0,E_1} = \tilde{\vec{\pi}}'_{E_0}(s)Q_{0,1}$$

и имеет решение

$$\tilde{\vec{\pi}}'_{E_0}(s) = \vec{e}'_{0,E_0}(Is - Q_{0,0})^{-1}, \quad \tilde{\vec{\pi}}'_{E_1}(s) = \frac{1}{s}\vec{e}'_{0,E_0}(Is - Q_{0,0})^{-1}Q_{0,1}.$$

Откуда так как ф.р. в.б.р. имеет вид:

$$F(t) = \mathbf{P}\{T \leq t\} = \sum_{x \in E_1} \pi_x(t) = \vec{\pi}'_{E_1}(t)\vec{1} \quad (13)$$

и, следовательно, её ПЛ равно  $\tilde{F}(s) = \tilde{\vec{\pi}}'_{E_1}(s)\vec{1}$ , производящую функцию в.б.р.  $\tilde{f}(s) = s\tilde{F}(s)$  можно представить в виде:

$$\tilde{f}(s) = s\tilde{\vec{\pi}}'_{E_1}(s)\vec{1} = \vec{e}'_{0,E_0}(Is - Q_{0,0})^{-1}Q_{0,1}\vec{1}. \quad (14)$$

С учётом структурных свойств матрицы  $Q$  последнее выражение допускает более детальное представление, которое будет дано в разделе численного анализа, и позволяет вычислять моменты в.б.р. Кроме того, так как оно имеет вид дробно-рациональной функции относительно переменной  $s$ , его обращение позволяет найти ф.р. в.б.р.

## 6. Численный анализ

Для численного анализа ограничимся системой из двух элементов ( $n = 2$ ), функционирующей в случайной среде, принимающей два состояния ( $m = 2$ ). В

случае облегчённого резервирования из двух исправных элементов работает только один, а второй находится в резерве и включается в работу при отказе основного. Имеется только одно восстанавливающее устройство, так что если отказали оба элемента, то система находится в состоянии отказа и восстанавливается только один из элементов, а второй ожидает восстановления. Граф переходов процесса  $X(t)$  в этом случае представлен на рис. 1.

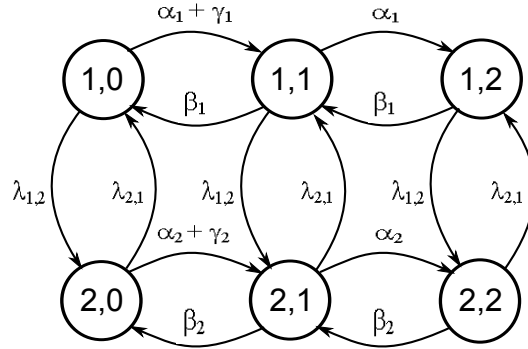


Рис. 1. Граф переходов процесса  $X(t) = (K(t), J(t))$

Отвечающая этому графу переходов ММП  $Q$  имеет блочно-диагональный вид с блоками, отвечающими различным состояниям внешней среды:

$$Q = \begin{bmatrix} -\theta_{1,0} & (\alpha_1 + \gamma_1) & 0 & \lambda_{1,2} & 0 & 0 \\ \beta_1 & -\theta_{1,1} & \alpha_1 & 0 & \lambda_{1,2} & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\theta_{1,2} & 0 & 0 & \lambda_{1,2} \\ \lambda_{2,1} & 0 & 0 & -\theta_{2,0} & (\alpha_2 + \gamma_2) & 0 \\ 0 & \lambda_{2,1} & 0 & \beta_2 & -\theta_{2,1} & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \lambda_{2,1} & 0 & \beta_2 & -\theta_{2,2} \end{bmatrix},$$

где величины  $\theta_{i,j}$  равны сумме всех элементов соответствующей строки матрицы. При этом состояния  $\{1,2\}$  и  $\{2,2\}$  являются состояниями отказа системы, соответственно, при работе системы в первой и второй средах.

Система уравнений (3) позволяет вычислить нестационарные вероятности состояний модели надёжности, функционирующей в случайной среде, а стационарные вероятности её состояний согласно результатам раздела 4 находятся с помощью системы уравнений (10). Формулы (14) позволяют вычислить функцию надёжности системы.

Для сравнения с системой, работающей в неслучайной (стабильной) среде, заметим, что работа системы в этом случае описывается процессом размножения и гибели, уравнения для вероятностей состояний которого имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\pi}_0(t) = -(\alpha + \gamma)\pi_0(t) + \beta\pi_1(t), \\ \dot{\pi}_1(t) = (\alpha + \gamma)\pi_0(t) - (\alpha + \beta)\pi_1(t) + \beta\pi_2(t), \\ \dot{\pi}_2(t) = \alpha\pi_1(t) - \beta\pi_2(t). \end{cases} \quad (15)$$

Решения этих уравнений представляют нестационарное распределение вероятностей состояний, которые при  $t \rightarrow \infty$  сходятся к стационарным вероятностям. Последние находятся из системы уравнений равновесия и хорошо известны (см., например, [10]):

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{\rho_1^2 + \rho_1(1 + \rho_2) + (1 + \rho_2)}, \\ \pi_1 &= \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1^2 + \rho_1(1 + \rho_2) + (1 + \rho_2)}, \\ \pi_2 = \pi_{\text{отк.}} &= \frac{\rho_1(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1^2 + \rho_1(1 + \rho_2) + (1 + \rho_2)},\end{aligned}\tag{16}$$

где  $\rho_1 = \alpha\beta^{-1}$ ,  $\rho_2 = \gamma\beta^{-1}$ .

Функция надёжности  $R(t) = 1 - F(t)$  находится с помощью решения системы (15) с поглощающим состоянием 2 и имеет согласно [10] вид:

$$R(t) = 1 - \pi_2(t) = \frac{\alpha(\alpha + \gamma)}{s_1 r} e^{-s_1 t} \left( 1 - \frac{s_1}{s_2} e^{-rt} \right),\tag{17}$$

где  $s_1, s_2$  — корни характеристического уравнения системы (15), взятые, для наглядности, со знаком «минус»:

$$s_{1,2} = \frac{\beta}{2} (2\rho_1 + \rho_2 + 1 \mp \sqrt{(1 + \rho_2)^2 + 4\rho_1}),\tag{18}$$

и  $r = s_2 - s_1 = \beta\sqrt{(1 + \rho_2)^2 + 4\rho_1}$ ,  $\rho_1 = \alpha\beta^{-1}$ ,  $\rho_2 = \gamma\beta^{-1}$ .

Для сравнения характеристик надёжности системы, работающей в случайной и не случайной (стабильной) средах, необходимо согласовать соответствующие параметры отказов и восстановления элементов системы. Все параметры для случайной среды задавались, а для стабильной среды использовались следующие усреднённые значения:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1}} \alpha_1 + \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1}} \alpha_2, \\ \beta &= \frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1}} \beta_1 + \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1}} \beta_2, \\ \gamma &= \frac{\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1}} \gamma_1 + \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1}} \gamma_2.\end{aligned}\tag{19}$$

С целью выявления влияния случайности среды и её изменчивости на надёжность системы и скорость сходимости к стационарному режиму была проведена серия вычислительных экспериментов, для реализации которых и для графического представления результатов был разработан программный модуль в среде MATLAB. Ниже представлены соответствующие результаты.

В приводимых ниже рисунках использованы следующие обозначения для графиков при различных значениях параметра  $c$ , определяющего соотношение интенсивности отказов элемента, работающего в первом и втором состоянии случайной среды.

**Вариант 1.** Параметры изменения внешней среды:  $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 1$  и интенсивности отказа и восстановления соизмеримы:  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = c\alpha_1$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = c\gamma_1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . Соответствующие стационарные вероятности отказа системы приведены в табл. 1.

Графики нестационарных вероятностей безотказной работы и функции надёжности системы в стабильной и случайной средах приведены на рис. 2–5.

Таблица 1  
 Стационарные вероятности отказа системы для варианта 1

c	В стабильной среде $\pi_2 = \pi_{отк.}$	В случайной среде		
		$\pi_{12}$	$\pi_{22}$	$\pi_{отк.} = \pi_{12} + \pi_{22}$
0,1	0,1991	0,1274	0,0708	0,1982
0,5	0,2842	0,1572	0,1245	0,2817
1,0	0,3750	0,1875	0,1875	0,3750
5,0	0,7105	0,2700	0,3814	0,6514

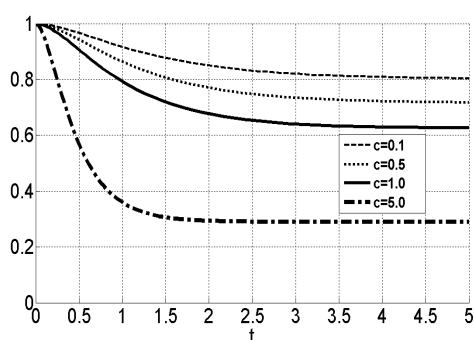


Рис. 2. Нестационарные вероятности работоспособности системы  $(1 - \pi_{отк.}(t))$  в стабильной среде

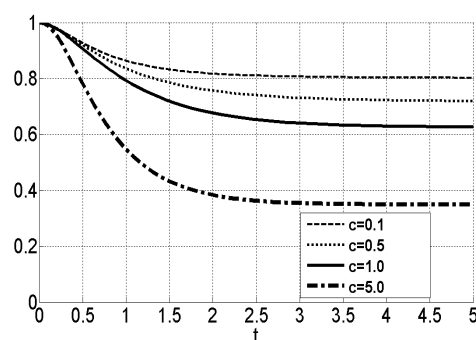


Рис. 3. Нестационарные вероятности работоспособности системы  $(1 - \pi_{отк.}(t))$  в случайной среде

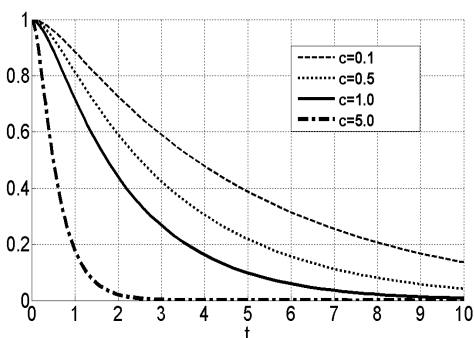


Рис. 4. Функция надёжности системы  $R(t) = 1 - \pi_{отк.}(t)$  в стабильной среде

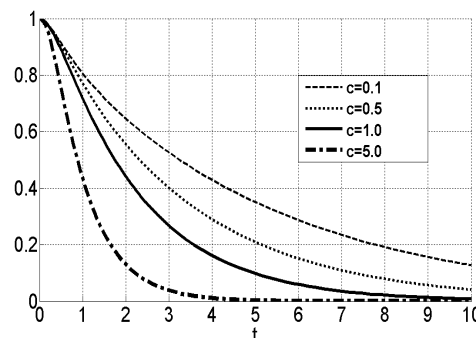


Рис. 5. Функция надёжности системы  $R(t) = 1 - \pi_{отк.}(t)$  в случайной среде

Полученные результаты показывают, что соответствующие характеристики для системы, работающей в стабильной и случайной средах, достаточно близки, а при  $c = 1$ , как и следовало ожидать, просто совпадают. С ростом интенсивности отказов элементов при работе системы в случайной среде увеличивается скорость сходимости нестационарных характеристик к стационарным, как в стабильной, так и в случайной средах.

**Вариант 2.** Параметры изменения внешней среды:  $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 1$ , соизмеримы с интенсивностью отказов:  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = c\alpha_1$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = c\gamma_1$  при «быстром восстановлении»  $\beta_1 = \beta_2 = 100$ .

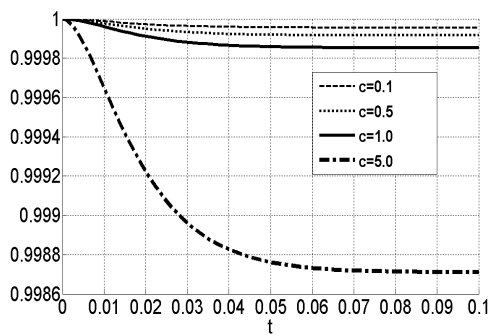
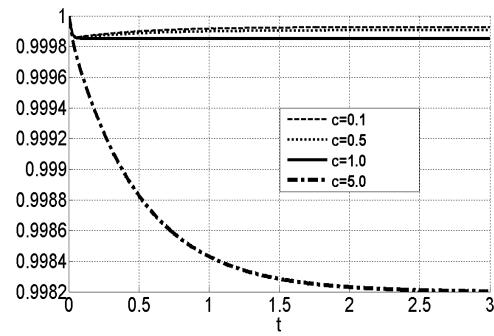
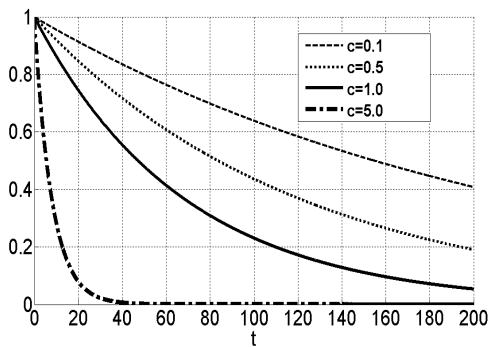
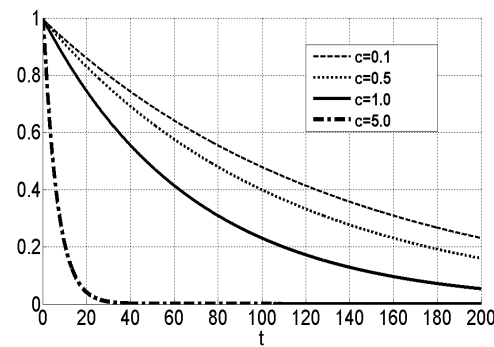
Аналогичные предыдущим результаты приведены в табл. 2 и на рис. 6–9.



Таблица 2

## Стационарные вероятности отказа системы для варианта 2

c	В стабильной среде $\pi_2 = \pi_{\text{отк.}} \cdot 10^{-5}$	В случайной среде		
		$\pi_{12} \cdot 10^{-5}$	$\pi_{22} \cdot 10^{-5}$	$\pi_{\text{отк.}} = (\pi_{12} + \pi_{22}) \cdot 10^{-5}$
0,1	4,5002	7,2523	0,15246	7,40476
0,5	8,3429	7,2985	1,9327	9,2312
1,0	14,776	7,3881	7,3881	14,7762
5,0	130	9,2841	170	179,2841

Рис. 6. Нестационарные вероятности работоспособности системы ( $1 - \pi_{\text{отк.}}(t)$ ) в стабильной средеРис. 7. Нестационарные вероятности работоспособности системы ( $1 - \pi_{\text{отк.}}(t)$ ) в случайной средеРис. 8. Функция надёжности системы  $R(t) = 1 - \pi_{\text{отк.}}(t)$  в стабильной средеРис. 9. Функция надёжности системы  $R(t) = 1 - \pi_{\text{отк.}}(t)$  в случайной среде

Результаты также демонстрируют достаточную близость характеристик работы системы в стабильной и случайной средах, однако «быстрое восстановление» приводит к быстрой сходимости нестационарных вероятностей состояний к стационарным. Как и ранее с ростом переменной  $c$  увеличивается скорость сходимости нестационарных характеристик к стационарным как для стабильной, так и для случайной средах. На это следует обратить особое внимание.

**Вариант 3.** Медленное изменение внешней среды:  $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 0,01$ ; интенсивности отказов и восстановлений соизмеримы между собой:  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = c\alpha_1$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = c\gamma_1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ .

Результаты расчётов для систем, работающих в стабильной и случайной средах, приведены в табл. 3 и на рис. 10–13.

Таблица 3

Стационарные вероятности отказа системы для варианта 3

c	В стабильной среде $\pi_2 = \pi_{отк.}$	В случайной среде		
		$\pi_{12}$	$\pi_{22}$	$\pi_{отк.} = \pi_{12} + \pi_{22}$
0,1	0,1991	0,1856	0,0084	0,1940
0,5	0,2842	0,1866	0,0893	0,2759
1,0	0,3750	0,1875	0,1875	0,3750
5,0	0,7105	0,1891	0,4071	0,5962

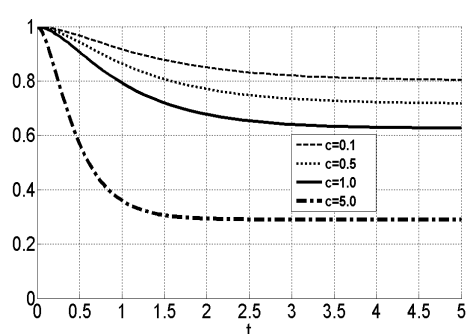


Рис. 10. Нестационарные вероятности работоспособности системы  $(1 - \pi_{отк.}(t))$  в стабильной среде

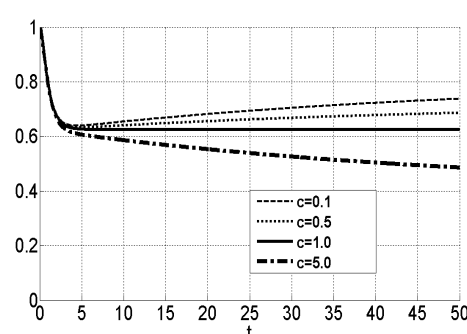


Рис. 11. Нестационарные вероятности работоспособности системы  $(1 - \pi_{отк.}(t))$  в случайной среде

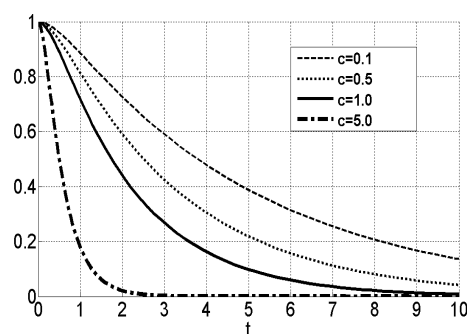


Рис. 12. Функция надёжности системы  $R(t) = 1 - \pi_{отк.}(t)$  в стабильной среде

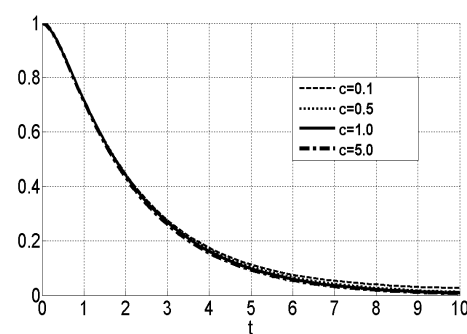


Рис. 13. Функция надёжности системы  $R(t) = 1 - \pi_{отк.}(t)$  в случайной среде

В этом случае поведение системы в стабильной и стационарной средах также оказываются достаточно близкими. Однако, при медленном изменении однородной внешней среды, характер сходимости нестационарных характеристик к стационарным и поведение функции надёжности в случайной среде значительно отличаются от соответствующих характеристик для систем, работающих в среде стабильной.

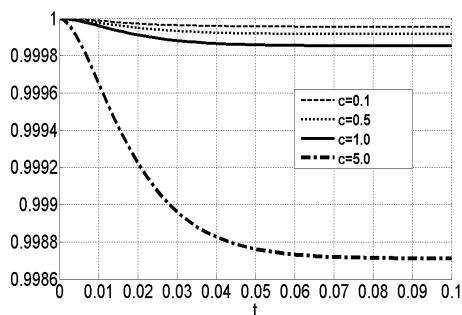
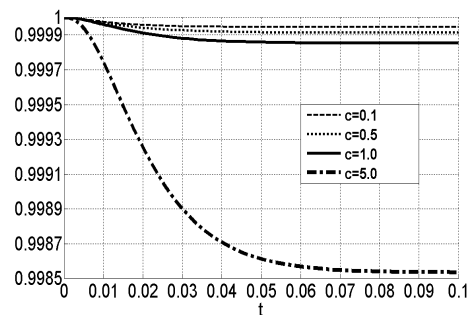
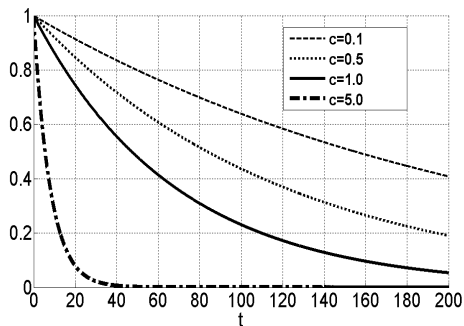
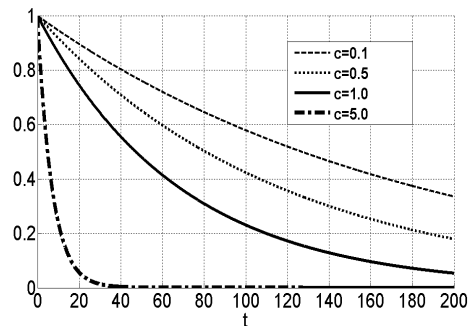
**Вариант 4.** Быстрое изменение внешней среды:  $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 100$ , интенсивности отказов и восстановлений соизмеримы между собой:  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = c\alpha_1$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = c\gamma_1$  при «быстром восстановлении»  $\beta_1 = \beta_2 = 100$ .

Аналогичные предыдущим результаты приведены в табл. 4 и на рис. 14–17.

Таблица 4

Стационарные вероятности отказа системы для варианта 4

c	В стабильной среде $\pi_2 = \pi_{\text{отк.}} \cdot 10^{-5}$	В случайной среде		
		$\pi_{12} \cdot 10^{-5}$	$\pi_{22} \cdot 10^{-5}$	$\pi_{\text{отк.}} = (\pi_{12} + \pi_{22}) \cdot 10^{-5}$
0,1	4,5002	3,5597	1,9287	5,4884
0,5	8,3429	4,9388	3,7064	8,6452
1,0	14,776	7,3881	7,3881	14,7762
5,0	130	54,428	92,076	146,504

Рис. 14. Нестационарные вероятности работоспособности системы  $(1 - \pi_{\text{отк.}}(t))$  в стабильной средеРис. 15. Нестационарные вероятности работоспособности системы  $(1 - \pi_{\text{отк.}}(t))$  в случайной средеРис. 16. Функция надёжности системы  $R(t) = 1 - \pi_{\text{отк.}}(t)$  в стабильной средеРис. 17. Функция надёжности системы  $R(t) = 1 - \pi_{\text{отк.}}(t)$  в случайной среде

Результаты также демонстрируют достаточную близость характеристик работы системы в стабильной и случайной средах, однако «быстрое восстановление» приводит к быстрой сходимости нестационарных вероятностей состояний к стационарным. С ростом интенсивности отказов элементов при работе системы во втором состоянии внешней среды увеличивается скорость сходимости нестационарных характеристик к стационарным как для стабильной, так и для случайной средах.

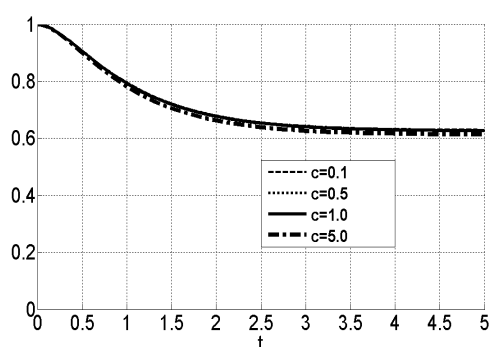
**Вариант 5.** Медленное неоднородное изменение внешней среды:  $\lambda_{1,2} = 0,001$ ,  $\lambda_{2,1} = 0,1$ , интенсивности отказа и восстановления соизмеримы:  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = c\alpha_1$ ,  $\gamma_1 = 0,5$ ,  $\gamma_2 = c\gamma_1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ .

Аналогичные предыдущим результаты приведены в табл. 5 и на рис. 18–21.

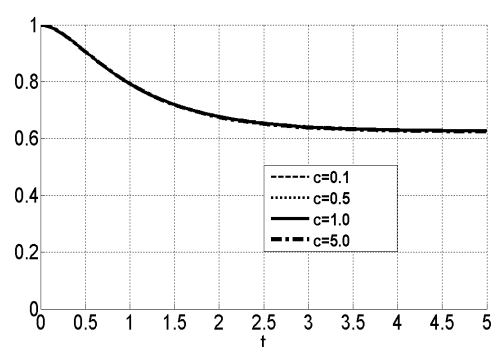
Таблица 5

**Стационарные вероятности отказа системы для варианта 5**

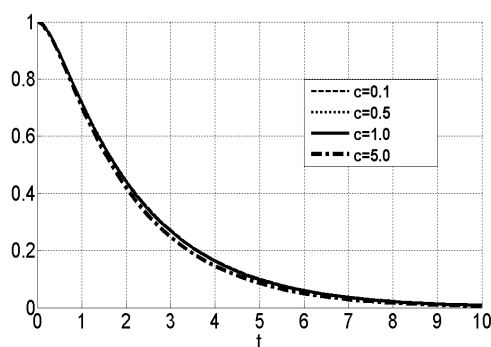
c	В стабильной среде $\pi_2 = \pi_{\text{отк.}}$	В случайной среде		
		$\pi_{12}$	$\pi_{22}$	$\pi_{\text{отк.}} = \pi_{12} + \pi_{22}$
0,1	0,3721	0,3710	$0,5 \cdot 10^{-3}$	0,3715
0,5	0,3734	0,3711	$1,9 \cdot 10^{-3}$	0,3730
1,0	0,3750	0,3713	$3,7 \cdot 10^{-3}$	0,3750
5,0	0,3878	0,3716	$8,0 \cdot 10^{-3}$	0,3796



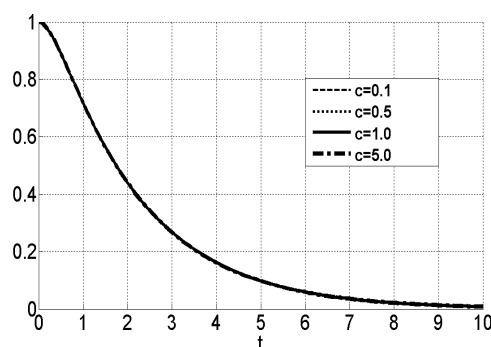
**Рис. 18.** Нестационарные вероятности работоспособности системы  $(1 - \pi_{\text{отк.}}(t))$  в стабильной среде



**Рис. 19.** Нестационарные вероятности работоспособности системы  $(1 - \pi_{\text{отк.}}(t))$  в случайной среде



**Рис. 20.** Функция надёжности системы  $R(t) = 1 - \pi_{\text{отк.}}(t)$  в стабильной среде



**Рис. 21.** Функция надёжности системы  $R(t) = 1 - \pi_{\text{отк.}}(t)$  в случайной среде

## 7. Заключение

Предложена общая марковская модель надёжности системы, функционирующей в случайной марковской среде. Приведены соотношения для вычисления стационарных и нестационарных характеристик надёжности работы такой системы. Проведено численное исследование, и сравнение характеристик надёжности для системы облегчённого дублирования, работающей в стабильной и случайной средах с двумя состояниями. Результаты численного исследования, представленные в виде таблиц и графиков, показали как общие черты, так и различия в работе систем в случайной и стабильной средах.

## Литература

1. Eisen M., Tainiter M. Stochastic Variations in Queueing Processes // Opens. Res. — 1963. — Vol. 11. — Pp. 922–927.
2. Naor P., Yehiali U. Queueing Problems with Heterogeneous Arrivals and Service // Opens. Res. — 1971. — Vol. 19, No 3. — Pp. 722–734.
3. Yehiali U. A Queueing-Type Birth-and-Death Process Defined as a Continuous-Time Markov Chain // Opens. Res. — 1973. — Vol. 21, No 2. — Pp. 604–629.
4. Neuts M. A Queue Subject to Extraneous Phase Changes // Adv. Appl. Prob. — 1971. — Vol. 3. — Pp. 78–119.
5. Purdue P. The  $M/M/1$  Queue in a Markovian Environment // Operations Research. — 1974. — Vol. 22, No 3. — Pp. 562–569.
6. O’Cinneide C. A., Purdue P. The  $M/M/\infty$  Queue in a Random Environment // J. of Applied Probability. — 1986. — Vol. 23, No 1. — Pp. 175–184.
7. The BMAP/PH/N Retrial Queueing System Operating in Markovian Random Environment / C. S. Kim, V. Klimenok, V. Mushko, A. Dudin // Computers & Operations Research. — 2010. — No 37. — Pp. 1228–1237.
8. Erlang Loss Queueing System with Batch Arrivals Operating in a Random Environment / C. S. Kim, A. Dudin, V. Klimenok, V. Khramova // Computers & Operations Research. — 2009. — No 36. — Pp. 674–697.
9. Rykov V., Tran A. N. On Markov reliability model of a system, operating in random environment // XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. — 2013.
10. Рыков В. В. Надёжность технических систем и техногенный риск. — М.: РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2001. — 164 с. [Rykov V. V. The Reliability of Technical Systems and Technogenic Risks. — Moscow: Russian State University of Oil and Gas — Gubkin, 2001. — 164 p. — (in russian). ]

UDC 519.718: 658.652

### Research of the Reliability of a Homogeneous Redundant Warm Standby System in a Random Environment

A. N. Tran

*Probability Theory and Mathematical Statistics Department  
Peoples’ Friendship University of Russia  
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198*

This paper investigates the influence of randomness of the environment on the reliability of work of technical systems and extends research of the previous paper to the case of the warm redundant standby. A short review of the papers devoted to the queueing systems operating in random environments is cited. A general Markov model of the reliability of a system operating in Markov random environment is proposed. Differential equations for the time dependent state probabilities of such a system and appropriate formulas for the stationary and non-stationary its reliability characteristics is given. An expression for the moment generation function and appropriate moments of the system life time are given. For the purpose of influence of environmental variability on the system reliability characteristics some parameter  $c$  is introduced, which indicates the influence of variability on the intensity of failures and recoveries of elements in different states of the environment.

With using a specially developed software module in the environment MATLAB the numerical study and comparison of the reliability characteristics of the warm redundancy two-units system, operating in a stable and random environments with two states are conducted. Results of the numerical investigation, presented in the form of tables and graphs show both similarities and differences in the systems in a random and stable environments.

**Key words and phrases:** reliability systems, random environments, stationary and non-stationary system reliability characteristics.