Математика

УДК 517.929

О задаче Коши для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками и бесконечным запаздыванием в банаховом пространстве

Г. Г. Петросян

Кафедра высшей математики
Воронежский государственный педагогический университет
ул. Ленина, д. 86, Воронеж, Россия, 394043

В настоящей работе, применяя теорию топологической степени уплотняющих многозначных отображений, доказывается существование решения и компактность множества всех решений задачи Коши для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с бесконечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

Статья состоит из введения и трёх параграфов. Во введении обосновывается актуальность данной проблематики, излагается история вопроса и приводятся ссылки на статьи и монографии, в которых читатель может найти приложения теории функционально-дифференциальных включений и уравнений дробного порядка. Во втором параграфе описывается постановка задачи, вводится пространство, в котором рассматривается данная задача и даётся критерий относительной компактности множества во введённом пространстве. Третий параграф состоит из четырёх подпунктов, в которых приводятся предварительные сведения. В первом подпункте даются понятия дробной производной и дробной первообразной. Во втором подпункте приводятся необходимые сведения из теории многозначных отображений. Третий подпункт посвящён сведениям из теории измеримых мультифункций. В четвёртом подпункте приводится формулировка модифицированного фазового пространства введённого Хейлом и Като. В последнем параграфе формулируются условия, которые мы накладываем на элементы, входящие в состав исходного включения, и на основе вспомогательных утверждений доказывается основной результат работы.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение, дробная производная, задача Коши, бесконечное запаздывание, импульсная характеристика, мера некомпактности, неподвижная точка, уплотняющее мультиотображение.

1. Введение

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет своё начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь в последнее время интерес к этой тематике значительно усилился, благодаря интересным приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см., например, монографии [1–9], статьи [10–12] и др.).

В настоящей работе мы рассматриваем полулинейные функционально-дифференциальные включения дробного порядка с бесконечным запаздыванием в банаховом пространстве.

Мы предполагаем также, что изучаемая в данной работе система содержит импульсные характеристики. Отметим, что импульсные дифференциальные уравнения и включения являются удобной моделью для описания динамических систем, подверженным скачкообразным изменениям своего состояния (см. монографии [13–15]).

В данной работе, применяя теорию топологической степени уплотняющих многозначных отображений (см. [16]), докажем (см. теорему 2) существование

Статья поступила в редакцию 29 сентября 2013 г.
Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00328 и 12-01-00392.

решения и компактность множества решений задачи Коши для полулинейных функционально-дифференциальных включений указанного класса.

2. Постановка задачи

Пусть E — банахово пространство. Для разбиения отрезка $[0,T]$ точками $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$, $m \geqslant 1$ и функции $c : [0,T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{h \to 0+} c(t_k + h), \quad c(t_k^-) = \lim_{h \to 0-} c(t_k + h), \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Будем рассматривать существование решения для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной в банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^\alpha u(t) \in Au(t) + F(t, u_t, u(t)), \quad t \in [0,T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}, \tag{1}$$

с начальным условием:

$$u(s) = \vartheta(s), \quad s \in (-\infty, 0], \tag{2}$$

где D^α, $0 < \alpha < 1$, — дробная производная Римана–Лиувилля, $A : D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, $t \geqslant 0$, $F : [0,T] \times \mathcal{B} \times E \multimap E$ — мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $\mathcal{B}$ обозначает фазовое пространство бесконечных запаздываний (см. п. 3), и $u_t \in \mathcal{B}$ характеризует предысторию функции до момента $t \in [0,T]$, т.е. $u_t(\vartheta) = u(t + \vartheta)$, $\vartheta \in (-\infty, 0]$. Начальная функция $\vartheta \in \mathcal{B}$.

Предполагается, что сужение искомой функции $u : (-\infty, T] \to E$ на $[0,T]$ принадлежит пространству $\mathcal{PC}([0,T]; E)$ функций $z : [0,T] \to E$, непрерывных на $[0,T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $z(t_k^-)$ и $z(t_k^+)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, существуют и $z(t_k^-) = z(t_k)$. Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{PC}([0,T]; E)$, снабжённое нормой

$$\|z\|_{\mathcal{PC}} = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_E,$$

является банаховым пространством и что классическое пространство $C([0,T]; E)$ является его замкнутым подпространством.

Для удобства обозначим $t_0 = 0$, $t_{m+1} = T$. Тогда для $z \in \mathcal{PC}([0,T]; E)$ обозначим $\widehat{z}_k \in C([t_k, t_{k+1}]; E)$, $k = 0, \ldots, m$, — функции, заданные соотношениями: $\widehat{z}_k(t) = z_k(t)$, $t \in (t_k, t_{k+1}]$; $\widehat{z}_k(t_k) = z_k(t_k^+)$. Более того, для множества $D \subset \mathcal{PC}([0,T]; E)$ обозначим $\widehat{D}_k$, $k = 0, \ldots, m$, множества $\widehat{D}_k = \{\widehat{z}_k : z \in D\}$.

Нетрудно проверить следующее утверждение.

Лемма 1. *Множество $D \subset \mathcal{PC}([0,T]; E)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}([0,T]; E)$ тогда и только тогда, когда каждое множество $\widehat{D}_k$, $k = 0, \ldots, m$, относительно компактно в $C([t_k, t_{k+1}]; E)$.*

Из данного предложения и классической теоремы Арцела–Асколи вытекает следующий критерий относительной компактности множества в пространстве $\mathcal{PC}([0,T]; E)$.

Лемма 2. *Множество $D \subset \mathcal{PC}([0,T]; E)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}([0,T]; E)$ тогда и только тогда, когда D равностепенно непрерывно на каждом промежутке (t_k, t_{k+1}), $k = 0, \ldots, m$, и множество $D(t) = \{z(t) : z \in D\}$ относительно компактно в E для $t \in [0,T]$.*

Наконец, будем полагать, что искомая функция удовлетворяет в моменты $t_1, \ldots, t_m$ условиям импульсных воздействий:

$$u(t_k^+) = u(t_k) + \mathcal{I}_k(u(t_k)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где $\mathcal{I}_k : E \to E$ — непрерывные импульсные функции.

3. Предварительные сведения

3.1. Дробные первообразная и производная

Определение 1 (см. например [7, 8]). Дробной первообразной порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $g \in L^1([0,T];E)$, называется функция $I_0^\alpha g$ следующего вида:

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\,\mathrm{d}s,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \mathrm{d}x$.

Определение 2. Дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $g \in L^1([0,T];E)$, называется функция $D_0^\alpha g$ следующего вида:

$$D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

3.2. Многозначные отображения

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство. Введём следующие обозначения:

$P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \varnothing\}$ — множество всех непустых подмножеств $\mathcal{E}$;

$Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ выпукло}\}$;

$K(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ компактно}\}$;

$Kv(\mathcal{E}) = \{Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})\}$ — множество всех непустых компактных и выпуклых подмножеств $\mathcal{E}$.

Определение 3 (см. например [16, 17]). Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ — некоторое частично упорядоченное множество. Функция $\beta : \mathrm{P}(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (МНК) в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ выполняется:

$$\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$;
2) *несингулярной*, если для любого $a \in E$ и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется:

1) *правильной*, если для любого относительно компактного множества $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$, $\beta(\Omega) = 0$;
2) *вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.

Примером вещественной меры некомпактности, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является мера некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{при которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\}.$$

Отметим, что мера некомпактности Хаусдорфа удовлетворяет условию полуоднородности, т. е.:

$$\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega),$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$.

Нам понадобятся следующие меры некомпактности в пространстве $\mathcal{PC}([0,T];E)$:

(1) модуль послойной некомпактности:

$$\psi : P(\mathcal{PC}([0,T];E)) \to \mathbb{R}_+, \quad \psi(D) = \sup_{t\in[0,T]} \chi(D(t)),$$

где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в E и $D(t) = \{u(t),\, u \in D\}$,

(2) модуль равностепенной непрерывности:

$$\mathrm{mod}_C : P(\mathcal{PC}([0,T];E)) \to \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{mod}_C(D) = \max_{0\leqslant k\leqslant m+1} \mathrm{mod}_C(\widehat{D}_k),$$

где $\mathrm{mod}_C(\widehat{D}_k) = \lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{u\in\widehat{D}_k} \max\limits_{|t_1-t_2|\leqslant\delta} \|u(t_1) - u(t_2)\|$.

Нетрудно видеть, что обе меры некомпактности удовлетворяют всем вышеперечисленным свойствам, кроме свойства правильности.

Пусть $L : E \to E$ — ограниченный линейный оператор, тогда χ-норма L определяется как $\|L\|^{(\chi)} = \chi\left(L(B)\right)$, где $B \subset E$ — единичный шар E. Нетрудно видеть, что $\|L\|^{(\chi)} \leqslant \|L\|$.

Определение 4 (см. например [16, 18]). Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется:

(i) полунепрерывным сверху (п.н.с.), если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$;
(ii) замкнутым, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x,y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$;
(iii) компактным, если $\mathcal{F}(X)$ относительно компактно в $\mathcal{E}$;
(iv) квазикомпактным, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Нам понадобится в дальнейшем следующее утверждение (см. [16]).

Лемма 3. *Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ — замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathcal{F}$ — п.н.с.*

Определение 5 (см. [16, 17]). Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно МНК β (β-уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено $\beta(F(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega)$.

Пусть $D \subset \mathcal{E}$ — непустое замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{E}$, а $\mathcal{U}_D$ — непустое открытое подмножество D. Обозначим через $\overline{\mathcal{U}_D}$ и $\partial\mathcal{U}_D$ замыкание и границу $\mathcal{U}_D$ соответственно. Из теории топологической степени для уплотняющих мультиотображений вытекает следующая теорема (см. [16]).

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{U}_D$ — открытая окрестность точки $a \in D$ и $\mathcal{F} : \overline{\mathcal{U}_D} \to Kv(D)$ — п.н.с. β-уплотняющее мультиотображение, удовлетворяющее граничному условию $x - a \notin \lambda(\mathcal{F}(x) - a)$ для всех $x \in \partial\mathcal{U}_D$ и $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда множество* *неподвижных точек $\mathcal{F}$:* $\operatorname{Fix}\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ *— непустое компактное множество.*

3.3. Измеримые мультифункции

Напомним некоторые понятия (см., например, [16, 18]). Пусть E — банахово пространство.

Определение 6. Мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$, для $p \geqslant 1$, называется:

а) L^p-интегрируемой, если она допускает L^p-интегрируемое сечение по Бохнеру, т. е. существует функция $g \in L^p\left([0,T]; E\right)$, такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$;

б) L^p-интегрально ограниченной, если существует функция $\xi \in L^p([0,T])$ такая, что: $\|G(t)\| := \sup\left\{\|g\|_E : g \in G(t)\right\} \leqslant \xi(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$.

Множество всех L^p-интегрируемых сечений мультифункции $G : [0,T] \to K(E)$ обозначается $\mathcal{S}^p_G$.

Мультифункция G называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0,T]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$. Мультифункция G называется сильно измеримой, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n : [0,T] \to K(E)$ такая, что:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(G_n(t), G(t)) = 0$$

для п. в. $t \in [0,T]$, где $\mathcal{H}$ — хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства E, понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если G сильно измерима и L^p-интегрально ограничена, то она L^p-интегрируема. Для L^p-интегрируемой мультифункции G определён многозначный интеграл

$$\int\limits_0^t G(s)\mathrm{d}s := \left\{\int\limits_0^t g(s)\mathrm{d}s : \; g \in \mathcal{S}^p_G\right\}$$

для любого $t \in [0,T]$.

Лемма 4 (см. [16], Теорема 4.2.3). *Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G : [0,T] \to P(E)$ L^p-интегрируемая и L^p-интегрально ограниченная мультифункция такая, что $\chi(G(t)) \leqslant q(t)$, для п. в. $t \in [0,T]$, где $q \in L^p_+([0,T])$. Тогда*

$$\chi\left(\int\limits_0^t G(s)\mathrm{d}s\right) \leqslant \int\limits_0^t q(s)\mathrm{d}s,$$

для всех $t \in [0,T]$. В частности, если мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$ измерима и L^p-интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причём:

$$\chi\left(\int\limits_0^t G(s)\mathrm{d}s\right) \leqslant \int\limits_0^t \chi(G(s))\mathrm{d}s$$

для всех $t \in [0,T]$.

3.4. Фазовое пространство

Мы будем использовать слегка модифицированное понятие фазового пространства $\mathcal{B}$, введённое Хейлом и Като (см. [19, 20]). Полагаем, что $\mathcal{B}$ — линейное пространство с полунормой $|\cdot|_{\mathcal{B}}$, состоящее из функций, отображающих $(-\infty;0]$ в E и удовлетворяющих нижеследующим аксиомам.

Если функция $v:(-\infty;T]\to E$ такова, что $v|_{[0,T]}\in\mathcal{PC}([0,T];E)$ и $v_0\in\mathcal{B}$, то

$(\mathcal{B}_1)$ $v_t\in\mathcal{B}$ для всех $t\in[0,T]$;

$(\mathcal{B}_2)$ функция $t\mapsto v_t$ непрерывна на $[0,T]\setminus\{t_1,\ldots,t_m\}$;

$(\mathcal{B}_3)$ $|v_t|_{\mathcal{B}}\leqslant K(t)\sup\{\|v(s)\|_E : 0\leqslant s\leqslant t\}+M(t)\,|v_0|_{\mathcal{B}}$, где $M,K:[0,T]\to[0,\infty)$, $K(\cdot)$ непрерывно, $M(\cdot)$ ограничено и эти функции не зависят от v.

Мы можем рассмотреть следующие примеры фазовых пространств, удовлетворяющих всем вышеперечисленным свойствам.

Для $r>0$ обозначим через $\mathcal{C}([-r,0];E)$ пространство всех кусочно-непрерывных функций $\psi:[-r,0]\to E$ с конечным набором точек разрыва $\{t_*\}$ на интервале $[-r,0]$, таких что все значения $\psi(t_*^-)$ и $\psi(t_*^+)$ конечны. Рассматривая $\mathcal{C}([-r,0];E)$ как подпространство пространства всех измеримых функций, мы можем рассматривать его как нормированное пространство с нормой:

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}([-r,0];E)}=\int\limits_{-r}^{0}\|\psi(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau.$$

Пример 1. Для некоторого $\nu>0$, пусть $\mathcal{B}=PC_\nu$ — пространство функций $\psi:(-\infty,0]\to E$ таких, что:

(i) $\psi|_{[-r,0]}\in\mathcal{C}([-r,0];E)$ для всех $r>0$;

(ii) интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\nu\vartheta}\,\|\psi(\vartheta)\|\,\mathrm{d}\vartheta$ конечен.

Тогда можем положить:

$$|\psi|_{\mathcal{B}}=\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\nu\vartheta}\,\|\psi(\vartheta)\|\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Пример 2 (Пространство с «затухающей памятью»). Пусть $\mathcal{B}=PC_\rho$ — пространство функций $\psi:\,(-\infty,0]\to E$ таких, что:

(i) $\psi\in\mathcal{C}([-r,0];E)$ для некоторого $r>0$;

(ii) ψ интегрируема по Лебегу на $(-r,0]$,

и существует положительная измеримая по Лебегу функция $\rho:(-\infty,-r)\to\mathbb{R}_+$, такая, что $\rho\psi$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty,-r)$; более того, существует локально ограниченная функция $P:(-\infty,0]\to\mathbb{R}_+$, такая, что для всех $\xi\leqslant 0$, $\rho(\xi+\vartheta)\leqslant P(\xi)\rho(\vartheta)$ для п. в. $\vartheta\in(-\infty,-r)$. Тогда определим

$$|\psi|_{\mathcal{B}}=\int\limits_{-\infty}^{-r}\rho(\vartheta)\,\|\psi(\vartheta)\|\,\mathrm{d}\vartheta+\int\limits_{-r}^{0}\|\psi(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau.$$

Простой пример такого пространства задаётся функциями $\rho=e^{\mu\vartheta}$, $\mu\in\mathbb{R}$.

4. Теорема существования решений

Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Обозначим $I=[0,T]\setminus\{t_1,\ldots,t_m\}$. Рассмотрим мультиоператор $F:\,I\times\mathcal{B}\times E\to Kv(E)$, удовлетворяющий следующим условиям.

$(F1)$ Мультифункция $F(\cdot,\vartheta,u):[0,T]\to Kv(E)$ допускает измеримое сечение для всех $(\vartheta,u)\in\mathcal{B}\times E$;

$(F2)$ Мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot):\mathcal{B}\times E\to Kv(E)$ — п.н.с. для п. в. $t\in I$;

$(F3)$ Существует функция $w\in L^{\infty}([0,T])$, такая, что

$$\|F(t,\vartheta,u)\|:=\sup\{\|f\|_E : f\in F(t,\vartheta,u)\}\leqslant w(t)(1+|\vartheta|_{\mathcal{B}}+\|u\|_E),\quad \text{п. в. } t\in I,$$

для всех $(\vartheta,u)\in\mathcal{B}\times E$.

Пусть $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ — линейное пространство функций $u:(-\infty;T]\to E$, таких, что $u_0\in\mathcal{B}$ и $\overline{u}=u|_{[0,T]}\in\mathcal{PC}([0,T];E)$, с полунормой $\|u\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]}=|u_0|_{\mathcal{B}}+\|\overline{u}\|_{\mathcal{PC}}$.

Для $u\in\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_F:[0,T]\to Kv(E),\quad \Phi_F(t)=F(t,u_t,u(t)).$$

Ясно, что функции $t\in[0,T]\to u_t\in\mathcal{B}$ и $u:[0,T]\to E$ кусочно-непрерывны. Тогда (см., например, [18, теорема 1.5.22]) мультифункция Φ_F, является L^p-интегрируемой, для любого $p\geqslant 1$.

Пусть $\mathcal{P}_F:\mathcal{C}_E(-\infty;T]\multimap L^p([0,T];E)$ — *суперпозиционный мультиоператор,* заданный следующим образом: $\mathcal{P}_F(u)=\mathcal{S}^p_{\Phi_F}$. Следуя [18, теорема 1.5.30 и замечание 1.5.32], можно установить следующее свойство замкнутости суперпозиционного мультиоператора.

Лемма 5. *Пусть $\{u_n\}$ — последовательность в $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$, сходящаяся к $u^*\in\mathcal{C}_E(-\infty;T]$. Предположим, что существует последовательность $\{\varphi_n\}\subset L^p([0,T];E)$, $\varphi_n\in\mathcal{P}_F(u_n)$, слабо сходящаяся к функции φ^*. Тогда $\varphi^*\in\mathcal{P}_F(u^*)$.*

Наложим на мультифункцию F следующее условие регулярности, выраженное в терминах мер некомпактности:

$(F4)$ Существует функция $\mu\in L^{\infty}([0,T])$, такая, что для любых ограниченных множеств $\Omega\subset\mathcal{B}$ и $Q\subset E$ имеем:

$$\chi\left(F(t,\Omega,Q)\right)\leqslant\mu(t)\left(\psi(\Omega)+\chi(Q)\right),\quad \text{п. в.}\quad t\in I,$$

где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\psi(\Omega)=\sup_{\vartheta\leqslant 0}\chi(\Omega(\vartheta))$; $\Omega(\vartheta)=\{q(\vartheta),\ q\in\Omega\}$, $\vartheta\in(-\infty,0]$.

Нетрудно видеть, что в случае, когда пространство E конечномерно, условие $(F4)$ вытекает из $(F3)$.

Если $\dim(E)=+\infty$, то частным случаем выполнения условия $(F4)$ является ситуация, когда мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot):\mathcal{B}\times E\to Kv(E)$ — вполне полунепрерывно сверху для п. в. $t\in[0,T]$, т. е. оно п.н.с. и преобразует каждое ограниченное множество в относительно компактное.

На оператор A, функцию ϑ и импульсные функции $\mathcal{I}_k$ из задачи (1)–(3) накладываем следующие условия:

(A) $A:D(A)\subset E\to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, где $t\geqslant 0$.

Заметим, что из условия (A) следует, что существует константа $J\geqslant 1$, такая что $\|e^{At}\|_{L(E)}\leqslant J$, для любого $t\in[0,T]$.

(ϑ) $\vartheta\in\mathcal{B}$ — заданная функция.

$(\mathcal{I}1)$ функции $\mathcal{I}_k:E\to E$, $1\leqslant k\leqslant m$, являются вполне непрерывными.

$(\mathcal{I}2)$ функции $\mathcal{I}_k$, $1\leqslant k\leqslant m$, являются глобально ограниченными, т. е. существует такое $\mathcal{N}>0$, что $\|\mathcal{I}_k x\|\leqslant\mathcal{N}$ для всех $x\in E$.

Определение 7. Интегральным решением на $(-\infty, T]$ задачи (1)–(3) называется функция $u \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ вида:

$$u(t) = \begin{cases} \vartheta(t), \quad t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\left(\vartheta(0) + \sum\limits_{t_k < t} \mathcal{I}_k(u(t_k))\right) + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [0, T], \end{cases}$$

где $\varphi \in \mathcal{P}_F(u)$.

Для нахождения интегральных решений задачи (1)–(3) рассмотрим отображение

$$S : L^p([0, T]; E) \to C([0, T]; E),$$

$$S(\varphi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

Рассмотрим мультиоператор $\mathcal{G} : \mathcal{C}_E(-\infty, T] \multimap \mathcal{C}_E(-\infty, T]$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{G}(u) = g(u) + S \circ \mathcal{P}_F(u),$$

где

$$g(u)(t) = \begin{cases} \vartheta(t), \quad t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\left(\vartheta(0) + \sum\limits_{t_k < t} \mathcal{I}_k(u(t_k))\right), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

(Мы считаем значения мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F$ естественно продолженным нулём на $(-\infty, 0]$).

Применяя теорему Арцела–Асколи, свойства (A) и $(\mathcal{I}1)$ несложно проверить следующее утверждение.

Лемма 6. *Оператор g вполне непрерывен.*

Нетрудно видеть, что функция $u \in \mathcal{C}_E(-\infty; T]$ — интегральное решение задачи (1)–(3) на интервале $(-\infty; T]$ тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора $\mathcal{G}$. Нашей задачей является показать, что $\mathcal{G}$ имеет неподвижную точку.

С этой целью рассмотрим сужение оператора $\mathcal{G}$ на выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{D} \subset \mathcal{PC}([0, T]; E)$, определённое как

$$\mathcal{D} = \{v \in \mathcal{PC}([0, T]; E), \, u(0) = \vartheta(0)\},$$

полагая $\mathcal{G}(v) = \mathcal{G}(v[\vartheta])$, где

$$v[\vartheta](t) = \begin{cases} \vartheta(t), \quad t \in (-\infty, 0]; \\ v(t), \quad t \in (0, T]. \end{cases}$$

Для функции $v \in \mathcal{D}$ и $t \in [0, T]$ положим $v_t = (v[\vartheta])_t$.

Определение 8 (см. [16]). Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0, T]; E)$ называется полукомпактной, если она L^p-интегрально ограничена, т. е.

$$\|\xi_n(t)\|_E \leqslant \nu(t) \text{ для всех } n = 1, 2, \dots \text{ и п. в. } t \in [0, T],$$

где $\nu \in L^p([0, T])$, и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п. в. $t \in [0, T]$.

Лемма 7. *Оператор S обладает следующими свойствами:*

(S_1) *существует константа $C > 0$ такая, что:*

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E^p \leqslant C^p \int\limits_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, \mathrm{d}s, \quad \xi, \eta \in L^p([0,T]).$$

(S_2) *для каждого компактного множества $K \subset E$ и последовательности $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ такой, что $\{\xi_n(t)\} \subset K$ для п. в. $t \in [0,T]$, слабая сходимость $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, влечёт сходимость $S(\xi_n) \to S(\xi_0)$ в $C([0,T];E)$.*

Доказательство. (S_1) Используя неравенство Гельдера, имеем:

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} \|\xi(s) - \eta(s)\|_E \, \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left[\int\limits_0^t (t-s)^{(\alpha-1)p/p-1} \mathrm{d}s \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int\limits_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, \mathrm{d}s \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E^p \leqslant C^p \int\limits_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, \mathrm{d}s, \quad C = \left[\frac{p-1}{\alpha p - 1} \right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{JT^{\alpha - \frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)}.$$

(S_2) Применяя лемму 4, получим:

$$\chi\left(\{S(\xi_n)(t)\}\right) \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} \chi\left(\{\xi_n(s)\}\right) \mathrm{d}s = 0.$$

Это означает, что последовательность $\{S(\xi_n)(t)\}_{n=1}^\infty \subset E$ относительно компактна для каждого $t \in [0,T]$.

С другой стороны, если мы возьмём t', $t'' \in [0,T]$, такие, что $0 < t' < t'' \leqslant T$ и достаточно малое число $\varepsilon > 0$, то получим следующую оценку:

$$\|S(\xi_n)(t'') - S(\xi_n)(t')\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int\limits_0^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} \xi_n(s) \mathrm{d}s - \int\limits_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)} \xi_n(s) \mathrm{d}s \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int\limits_0^{t'-\varepsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}] \xi_n(s) \mathrm{d}s \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}] \xi_n(s) \mathrm{d}s \right\|_E +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_{t'}^{t''}(t''-s)^{\alpha-1}e^{A(t''-s)}\xi_n(s)\mathrm{d}s\right\|_E\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_0^{t'-\varepsilon}[(t''-s)^{\alpha-1}-(t'-s)^{\alpha-1}]e^{A(t'-s)}\xi_n(s)\mathrm{d}s\right\|_E+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_0^{t'-\varepsilon}(t''-s)^{\alpha-1}e^{A(t'-\varepsilon-s)}[e^{A(t''-t'+\varepsilon)}-e^{A\varepsilon}]\xi_n(s)\mathrm{d}s\right\|_E+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'}[(t''-s)^{\alpha-1}e^{A(t''-s)}-(t'-s)^{\alpha-1}e^{A(t'-s)}]\xi_n(s)\mathrm{d}s\right\|_E+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_{t'}^{t''}(t''-s)^{\alpha-1}e^{A(t''-s)}\xi_n(s)\mathrm{d}s\right\|_E\leqslant$$

$$\leqslant\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\Bigg(\int\limits_0^{t'-\varepsilon}[(t''-s)^{\alpha-1}-(t'-s)^{\alpha-1}]\xi_n(s)\,\mathrm{d}s+$$

$$+\|e^{A(t''-t'+\varepsilon)}-e^{A\varepsilon}\|_{L(E)}\int\limits_0^{t'-\varepsilon}(t''-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,\mathrm{d}s+$$

$$+\int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'}(t''-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,\mathrm{d}s+\int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'}(t'-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,\mathrm{d}s+\int\limits_{t'}^{t''}(t''-s)^{\alpha-1}\xi_n(s)\,\mathrm{d}s\Bigg).$$

Поскольку $\{\xi_n(s)\}\subset K$ для п. в. $s\in[0,T]$, правая часть последнего неравенства, в силу малости ε, равномерно, относительно n, стремится к 0, при $t''\to t'$. Поэтому последовательность $\{S(\xi_n)\}$ равностепенно непрерывна. Из теоремы Арцела–Асколи, получаем, что последовательность $\{S(\xi_n)\}\subset C([0,T];E)$ относительно компактна.

Из свойства (S_1) вытекает, что $S:L^p([0,T];E)\to C([0,T];E)$ — ограниченный линейный оператор. Тогда этот оператор непрерывен относительно топологии слабой секвенциальной сходимости, то есть слабая сходимость $\xi_n\rightharpoonup\xi_0$ влечёт $S(\xi_n)\rightharpoonup S(\xi_0)$. Поскольку последовательность $\{S(\xi_n)\}$ относительно компактна, то приходим к заключению, что $S(\xi_n)\to S(\xi_0)$ в $C([0,T];E)$. □

Нам понадобится следующий технический результат, доказательство которого может быть проведено по схеме теоремы 4.2.1, следствия 4.2.1 и замечаний 4.2.1 и 4.2.2 из [16].

Лемма 8. *Пусть последовательность функций $\{\xi_n\}\subset L^p([0,T];E)$ является L^p-интегрально ограниченной. Предположим, что $\chi(\{\xi_n(t)\})\leqslant q(t)$ для п. в. $t\in[0,T]$, где $q\in L^p([0,T])$. Тогда для любого $\delta>0$ существует компактное множество $K_\delta\subset E$ и множество $m_\delta\subset[0,T]$, с лебеговой мерой $(m_\delta)<\delta$, а также последовательность функций $G_\delta\subset L^p([0,T];E)$ со значениями в K_δ, такие, что для каждого $n\geqslant 1$ существует функция $b_n\in G_\delta$, для которой*

$$\|\xi_n(t)-b_n(t)\|_E\leqslant 2q(t)+\delta,\quad t\in[0,T]\backslash m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ *может быть выбрана так, что* $b_n \equiv 0$ *на* m_δ *и эта последовательность слабо компактна.*

Используя этот результат, докажем следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть последовательность функций* $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ *удовлетворяет условиям леммы 8. Тогда имеем:*

$$\chi\left(\{S(\xi_n)(t)\}\right) \leqslant 2C\left(\int\limits_0^t |q(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$$

для всех $t \in [0,T]$.

Доказательство. Проведём доказательство, следуя теореме 4.2.2 из [16]. Для $\varepsilon > 0$ подберём $\delta \in (0,\varepsilon)$ такое, что для всех $m \subset [0,T]$ с мерой $(m) < \delta$ имеем:

$$\int\limits_m |\nu(s)|^p < \varepsilon.$$

Беря m_δ и b_n, соответствующие $\{\xi_n\}$ из леммы 8, и используя лемму 7, получаем, что последовательность $\{S(b_n)\}$ — относительно компактна в $C([0,T];E)$. Более того,

$$\|S(\xi_n)(t) - S(b_n)(t)\|_E^p \leqslant C^p\int\limits_0^t \|\xi_n(s) - b_n(s)\|_E^p\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant C^p\int\limits_{[0,t]\setminus m_\delta} \|\xi_n(s) - b_n(s)\|_E^p\,\mathrm{d}s + C^p\int\limits_{[0,t]\cap m_\delta} \|\xi_n(s)\|_E^p\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant C^p\int\limits_{[0,t]\setminus m_\delta} [2q(s) - \delta]^p\,\mathrm{d}s + C^p\int\limits_{m_\delta} |\nu(s)|^p\,\mathrm{d}s \leqslant C^p\left(\int\limits_0^t |2q(s)+\varepsilon|^p\,\mathrm{d}s + \varepsilon\right).$$

Поэтому относительно компактное множество $SG_\delta(t)$ является $C\left(\int\limits_0^t |2q(s)+\varepsilon|^p\,\mathrm{d}s + \varepsilon\right)^{1/p}$-сетью для множества $\{S(\xi_n)(t)\}$. Это и доказывает лемму в силу произвольности $\varepsilon > 0$. □

Лемма 10. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *— полукомпактная последовательность в* $L^p([0,T];E)$. *Тогда* $\{\xi_n\}$ *слабо компактна в* $L^p([0,T];E)$ *и множество* $\{S(\xi_n)\}$ *— относительно компактно в* $C([0,T];E)$. *Более того, если* $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, *то* $S(\xi_n) \to S(\xi_0)$.

Доказательство. Слабая компактность $\{\xi_n\}$ в $L^p([0,T];E)$ является следствием результата [21, Следствие 3.4]. Поскольку множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п. в. $t \in [0,T]$, то из леммы 9 следует, что последовательность $\{S(\xi_n)(t)\}$ — относительно компактна в E для п. в. $t \in [0,T]$.

С другой стороны, из определения 8 следует, что существует функция $\nu \in L^p(0,T)$, такая, что $\|\xi_n(t)\| \leqslant \nu(t)$, для всех $n = 1,2,\ldots$ и $t \in [0,T]$.

Благодаря неравенству Гельдера, если мы возьмём t', $t'' \in [0,T]$, такие, что $0 < t' < t'' \leqslant T$, и достаточно малое число $\varepsilon > 0$, то получим следующую оценку:

$$\|S(\xi_n)(t'') - S(\xi_n)(t')\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\| \int\limits_0^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} \xi_n(s)\,\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)} \xi_n(s)\,\mathrm{d}s \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\| \int\limits_0^{t'-\varepsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}] \xi_n(s)\,\mathrm{d}s \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\| \int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}] \xi_n(s)\,\mathrm{d}s \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\| \int\limits_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} \xi_n(s)\,\mathrm{d}s \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\| \int\limits_0^{t'-\varepsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}] e^{A(t'-s)} \xi_n(s)\,\mathrm{d}s \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\| \int\limits_0^{t'-\varepsilon} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-\varepsilon-s)} [e^{A(t''-t'+\varepsilon)} - e^{A\varepsilon}] \xi_n(s)\,\mathrm{d}s \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\| \int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'} [(t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} - (t'-s)^{\alpha-1} e^{A(t'-s)}] \xi_n(s)\,\mathrm{d}s \right\|_E +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\| \int\limits_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} e^{A(t''-s)} \xi_n(s)\,\mathrm{d}s \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{J}{\Gamma(\alpha)}\Bigg(\int\limits_0^{t'-\varepsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}] \xi_n(s)\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \|e^{A(t''-t'+\varepsilon)} - e^{A\varepsilon}\|_{L(E)} \int\limits_0^{t'-\varepsilon} (t''-s)^{\alpha-1} \xi_n(s)\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'} (t''-s)^{\alpha-1} \xi_n(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'} (t'-s)^{\alpha-1} \xi_n(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-1} \xi_n(s)\,\mathrm{d}s \Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left(\int\limits_0^{t'-\varepsilon} [(t''-s)^{\alpha-1} - (t'-s)^{\alpha-1}]^{p'}\,\mathrm{d}s \right)^{1/p'} \left(\int\limits_0^{t'-\varepsilon} |\nu(s)|^p\,\mathrm{d}s \right)^{1/p} +$$

$$+ \|e^{A(t''-t'+\varepsilon)} - e^{A\varepsilon}\|_{L(E)} \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left(\int\limits_0^{t'-\varepsilon} (t''-s)^{(\alpha-1)p'}\,\mathrm{d}s \right)^{1/p'} \left(\int\limits_0^{t'-\varepsilon} |\nu(s)|^p\,\mathrm{d}s \right)^{1/p} +$$

$$+\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'}(t''-s)^{(\alpha-1)p'}\,\mathrm{d}s\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'}|\nu(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}+$$

$$+\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'}(t'-s)^{(\alpha-1)p'}\,\mathrm{d}s\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{t'-\varepsilon}^{t'}|\nu(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}+$$

$$+\frac{J}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_{t'}^{t''}(t''-s)^{(\alpha-1)p'}\,\mathrm{d}s\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{t'}^{t''}|\nu(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p},$$

где p' сопряжено p. Последнее неравенство влечёт равностепенную непрерывность $\{S(\xi_n)\}$ в $C([0,T];E)$, и, следовательно, относительную компактность в $C([0,T];E)$. Окончательное заключение справедливости леммы получается так же, как и в доказательстве леммы 7. □

Лемма 11. *При выполнении условий* $(F1)$–$(F4)$ *и* $(\mathcal{I}1)$–$(\mathcal{I}2)$ *мультиоператор* $\mathcal{G}=g+S\circ\mathcal{P}_F$ *замкнут и имеет компактные значения.*

Доказательство. В силу леммы 6 утверждение теоремы достаточно доказать для мультиоператора $S\circ\mathcal{P}_F$. Пусть $\{v_n\}$ — последовательность в $\mathcal{D}$, такая, что $v_n\to v^*\in\mathcal{D}$. Будем считать, что $\xi_n\in\mathcal{P}_F(v_n[\vartheta])$ и $z_n=S(\xi_n)\in S(\mathcal{P}_F(v_n[\vartheta]))$, $\quad z_n\to z^*$ в $\mathcal{PC}([0,T];E)$. Докажем, что $z^*\in S(\mathcal{P}_F(v^*[\vartheta]))$.

Так как $\{\xi_n(t)\}\in F(t,(v_n[\vartheta])_t,v_n(t))$, для п. в. $t\in[0,T]$, то согласно условию $(F3)$ последовательность $\{\xi_n\}$ — интегрально ограничена, и из $(F4)$ следует, что: $\chi\left(\{\xi_n(t)\}\right)\leqslant\mu(t)\left(\psi(\{(v_n[\vartheta])_t\})+\chi(\{v_n(t)\})\right)$, для п. в. $t\in[0,T]$.

Последовательность $\{v_n\}$ сходится в $\mathcal{PC}([0,T];E)$, поэтому $\chi(\{v_n(t)\})=0$ для $t\in[0,T]$. С другой стороны,

$$\psi(\{(v_n[\vartheta])_t\})=\sup_{\vartheta\leqslant0}\chi(\{(v_n[\vartheta](t+\vartheta))\})\leqslant\sup_{s\in[0,T]}\chi(\{(v_n(s))\})=0.$$

Следовательно, $\chi(\{\xi_n(t)\})=0$ для п. в. $t\in[0,T]$, и последовательность $\{\xi_n\}$ полукомпактна. Из леммы 10 следует, что мы можем предположить, без ограничения общности, существование $\xi^*\in L^p([0,T];E)$, такого, что $\xi_n\rightharpoonup\xi^*$ и $z_n=S(\xi_n)\to S(\xi^*)=z^*$.

По лемме 5 получаем, что $\xi^*\in\mathcal{P}_F(v^*[\vartheta])$, и поэтому $z^*=S(\xi^*)\in S(\mathcal{P}_F(v^*[\vartheta]))$.

Остаётся показать, что для $v\in\mathcal{D}$ и $\{\xi_n\}$, выбранного в $\mathcal{P}_F(v[\vartheta])$, последовательность $\{S(\xi_n)\}$ относительно компактна в $C([0,T];E)$. Свойства $(F3)$–$(F4)$ влекут полукомпактность $\{\xi_n\}$. По лемме 10 имеем, что последовательность $S(\xi_n)$ относительно компактна в $C([0,T];E)$. Значит, последовательность $S(\xi_n)$ относительно компактна в $C([0,T];E)$. □

Лемма 12. *Мультиоператор* $\mathcal{G}$ *— п.н.с.*

Доказательство. Используя лемму 4 и лемму 11, достаточно доказать, что $\mathcal{G}$ — квазикомпактное мультиотображение. Снова используя лемму 6, сведём проверку к мультиоператору $S\circ\mathcal{P}_F$.

Пусть $\mathcal{Y}\subset\mathcal{D}$ — компактное множество, докажем, что $S\circ\mathcal{P}_F(\mathcal{Y})$ — относительно компактное подмножество $C([0,T];E)$. Предположим, что $\{z_n\}\subset S\circ\mathcal{P}_F(\mathcal{Y})$, тогда $z_n=S(\xi_n)$, где $\xi_n\in\mathcal{P}_F(v_n[\vartheta])$ для некоторой последовательности $v_n\subset\mathcal{Y}$. Согласно свойствам $(F3),(F4)$ последовательность ξ_n полукомпактна и, следовательно, слабо компактна в $L^p([0,T];E)$. Согласно лемме 10, последовательность z_n относительно компактна в $C([0,T];E)$. □

Теперь введём векторную меру некомпактности $\nu(\Omega)$:

$$\nu : P(\mathcal{PC}([0,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+,$$

со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, заданную как $\nu(\Omega) = (\psi(\Omega), \mathrm{mod}_C(\Omega))$.

Обозначим $J^{(\chi)} = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|^{(\chi)}$.

Лемма 13. *Для того чтобы оператор $\mathcal{G}$ был уплотняющим относительно меры некомпактности ν, достаточно, чтобы*

$$V := \frac{2T^\alpha \|\mu\|_\infty J^{(\chi)}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1. \tag{4}$$

Доказательство. Из полной непрерывности оператора g и свойств монотонности, алгебраической полуаддитивности и правильности меры некомпактности ν следует, что нам достаточно проверить свойство уплотняемости лишь для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F$. Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ — непустое ограниченное множество и

$$\nu(\mathcal{G}(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega), \tag{5}$$

покажем, что Ω — относительно компактное множество.

Пусть $\Omega_t = \{u_t; u \in \Omega\}$. Рассмотрим многозначную функцию $s \in [0,t] \multimap G(s) \subset E$,

$$G(s) = \Big\{(t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)}\varphi(s), \quad \varphi \in \mathcal{P}_F(u), \quad u \in \Omega\Big\}.$$

Она интегрально ограничена функцией: $s \to (t-s)^{\alpha-1} Jw(t)\,(1 + C_1 + C_2)$, где $C_1 = \sup_{s\in[0,t]} \sup_{u\in\Omega} |u_s|_{\mathcal{B}}$, $C_2 = \sup_{s\in[0,t]} \sup_{u\in\Omega} \|u(s)\|_E$.

Оценим $\chi\Big(G(s)\Big)$:

$$\chi\Big(G(s)\Big) \leqslant (t-s)^{\alpha-1} \|e^{A(t-s)}\|^{(\chi)} \chi\Big(\,\{\varphi(s), \quad \varphi \in \mathcal{P}_F(u), \quad u \in \Omega\}\,\Big) \leqslant$$
$$\leqslant (t-s)^{\alpha-1} J^{(\chi)} \mu(s) \Big(\chi(\Omega(s)) + \psi(\Omega_s)\Big) \leqslant 2(t-s)^{\alpha-1} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \psi(\Omega).$$

Оценим теперь $\chi\Big(\mathcal{G}(\Omega)(t)\Big)$, $t \in [0,T]$:

$$\chi\Big(\mathcal{G}(\Omega)(t)\Big) = \chi\Big(\,\{S \circ \mathcal{P}_F(\Omega)(t)\}\,\Big) \leqslant \chi\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t G(s)\mathrm{d}s\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\Gamma(\alpha)} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \psi(\Omega) \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s \leqslant \frac{2}{\Gamma(\alpha)} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \frac{t^\alpha}{\alpha} \psi(\Omega) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J^{(\chi)} \|\mu\|_\infty \psi(\Omega) = V\psi(\Omega).$$

Таким образом получаем $\chi\left(\mathcal{G}(\Omega)(t)\right) \leqslant V\psi(\Omega)$, а следовательно,

$$\psi\left(\mathcal{G}(\Omega)\right) \leqslant V\psi(\Omega). \tag{6}$$

Сравнивая (5) с (6), получаем, что $\psi(\Omega) = 0$. Из доказательства леммы 10 следует, что множество $S \circ \mathcal{P}_F(\Omega)$ равностепенно непрерывно. Теперь, воспользовавшись леммой 6, имеем $\mathrm{mod}_C\left(\mathcal{G}(\Omega)\right) = 0$. Значит, $\nu(\Omega) = (0, 0)$. Тогда заключаем, что Ω — относительно компактное множество, а оператор $\mathcal{G}$ является уплотняющим относительно меры некомпактности ν. □

Замечание 1. Отметим следующие частные случаи выполнения условия (4):
1) $\|\mu\|_\infty = 0$, т. е. F вполне полунепрерывно сверху по второму и третьему аргументам в совокупности;
2) $J^{(\chi)} = 0$, т. е. полугруппа e^{At} компактна.

Нам понадобится следующая модифицированная версия неравенства Беллмана–Гронуолла (см. [22]).

Лемма 14. *Пусть $h(t)$, $q(t)$ и $y(t)$ — неотрицательные, интегрируемые на $[a, b]$ функции, удовлетворяющие неравенству:*

$$y(t) \leqslant q(t) + \int\limits_a^t h(s)y(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b],$$

тогда выполняется следующее неравенство:

$$y(t) \leqslant q(t) + \int\limits_a^t \exp\left\{\int\limits_a^t h(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right\} h(s)q(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b].$$

Мы можем сформулировать теперь основной результат этой работы.

Теорема 2. *При выполнении условий (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$, (ϑ), $(\mathcal{I}1)$ – $(\mathcal{I}2)$, и (4) множество решений задачи (1)–(3) на $\mathcal{C}_E(-\infty; T]$ непусто и компактно.*

Доказательство. Обозначим $u^* \in \mathcal{D}$ функцию $u^*(t) = e^{At}\vartheta(0)$.

Покажем, что множество решений $u \in \mathcal{D}$ семейства включений $u - u^* \in \lambda(\mathcal{G}(u) - u^*)$, $0 < \lambda \leqslant 1$, априори ограничено.

Применяя условие $(F3)$, мы получаем оценку:

$$\|u(t) - u^*(t)\|_E \leqslant \lambda \left\|e^{At}\right\|_E \left\|\sum_{t_k < t} \mathcal{I}_k(u(t_k))\right\|_E + \\ + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\|_E (t-s)^{\alpha-1} \|\varphi(s)\|_E \,\mathrm{d}s,$$

где $\varphi \in \mathcal{P}_F(u[\vartheta])$.

Применяя свойства $(\mathcal{I}2)$ и $(F3)$, получаем оценку

$$\|u(t)\|_E \leqslant J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \\ + \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s)(1 + |(u[\vartheta])_s|_{\mathcal{B}} + \|u(s)\|_E)\mathrm{d}s.$$

Из свойства $(\mathcal{B}_3)$ вытекает, что

$$|(u[\vartheta])_s|_{\mathcal{B}} + \|u(s)\|_E \leqslant M\,|\vartheta|_{\mathcal{B}} + (K+1)\,\|u\|_{\mathcal{PC}([0,s];E)}\,,$$

где $M(t) \leqslant M, \quad K(t) \leqslant K, \quad t \in [0,T]$.

Тогда получаем оценку

$$\|u(t)\|_E \leqslant J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \frac{J\left(M\left|\vartheta\right|_{\mathcal{B}} + 1\right)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s)\mathrm{d}s + \\ + \frac{J\left(K+1\right)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s) \left\|u\right\|_{\mathcal{PC}([0,s];E)} \mathrm{d}s.$$

Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\|u(t)\|_E \leqslant J\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + \\ + \frac{J\left(M\left|\vartheta\right|_{\mathcal{B}} + 1\right)}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{(\alpha-1)p'+1}\right]^{1/p'} T^{\alpha-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^T |w(s)|^p \,\mathrm{d}s\right)^{1/p} + \\ + \frac{J\left(K+1\right)}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{(\alpha-1)p'+1}\right]^{1/p'} T^{\alpha-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^T |w(s)|^p \left\|u\right\|^p_{\mathcal{PC}([0,s];E)} \mathrm{d}s\right)^{1/p}.$$

Введём следующие обозначения:

$$B = \frac{J}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{(\alpha-1)p'+1}\right]^{1/p'} T^{\alpha-\frac{1}{p}},$$

$$q_0 = NJ\left(\|\vartheta(0)\|_E + m\mathcal{N}\right) + NB(M\left|\vartheta\right|_{\mathcal{B}} + 1) \left(\int\limits_0^T |w(s)|^p \,\mathrm{d}s\right)^{1/p},$$

$$h(s) = \left[NB(K+1)\right]^{1/p} w(s), \quad s \in [0,T].$$

Тогда получаем:

$$\|u\|_{\mathcal{PC}([0,t];E)} \leqslant q_0 + \left(\int\limits_0^t |h(s)|^p \left\|u\right\|^p_{\mathcal{PC}([0,s];E)} \mathrm{d}s\right)^{1/p}.$$

Пусть $y(t) = \|u\|^p_{\mathcal{PC}([0,t];E)}$. Тогда из последнего неравенства получаем следующую оценку:

$$y(t) \leqslant 2^p q_0^p + 2^p \int\limits_0^t |h(s)|^p \, y(s)\mathrm{d}s$$

для всех $t \in [0,T]$. Теперь, применяя лемму 14 к последнему неравенству, получаем:

$$y(t) = \|u\|^p_{\mathcal{PC}([0,t];E)} \leqslant 2^p q_0^p \left(1 + \int\limits_0^T \exp\left\{2^p \int\limits_s^T |h(\vartheta)|^p \,\mathrm{d}\vartheta\right\} |h(s)|^p \,\mathrm{d}s\right)$$

для всех $t \in [0,T]$. Пусть

$$R_0 = 2q_0 \sqrt[p]{1 + \int\limits_0^T \exp\left\{2^p \int\limits_s^T |h(\vartheta)|^p \, \mathrm{d}\vartheta\right\} |h(s)|^p \, \mathrm{d}s}.$$

Тогда получаем окончательную оценку:

$$\|u\|_{\mathcal{PC}([0,T];E)} \leqslant R_0.$$

Применим теперь теорему 1, полагая $a = u^*$, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ и

$$\overline{\mathcal{U}_\mathcal{D}} = \left\{v \in \mathcal{D}, \quad \|v\|_{\mathcal{PC}([0,T];E)} \leqslant R\right\},$$

где $R \geqslant R_0$. Мы получаем, что множество неподвижных точек Fix $\mathcal{G}$ непусто и компактно. □

Литература

1. *Abbas S., Benchohra M., N'Guerekata G. M.* Topics in Fractional Differential Equations. — New York.USA: Springer, 2012. — 202 p.
2. Fractional Calculus Models and Numerical Methods / D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo. — World Scientific Publishing, 2012.
3. *Diethelm K.* Analysis of Fractional Differential Equations. — Berlin. Germany: Springer, 2010. — 262 p.
4. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics. — Singapore: World Scientific, 2000. — 302 p.
5. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam. Holland: Elsevier Science B.V., 2006. — 204 p.
6. *Miller K. S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. — New York. USA: John Wiley, 1993. — 260 p.
7. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — San Diego. USA: Academic Press, 1999. — 340 p.
8. *Samko S., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. — Yverdon: Gordon and Breach Sci. Publishers, 1993. — 740 p.
9. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. — Beijing: Springer, 2010. — 560 p.
10. *Lakshmikantham V.* Theory of Fractional Functional Differential Equations // Nonlinear Anal. — 2008. — Vol. 8. — P. 2677–2682.
11. *Lakshmikantham V., Vatsala A. S.* Basic Theory of Fractional Differential Equations // Nonlinear Anal. — 2008. — No 8.
12. *Obukhovskii V., Yao J.-C.* Some Existence Results for Fractional Functional Differential Equations // Fixed Point Theory. — 2010. — Vol. 11. — Pp. 85–96.
13. *Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.* Impulsive Differential Equations and Inclusions // Contemporary Mathematics and Its Applications. — 2006. — Vol. 2.
14. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of Impulsive Differential Equations. — Teaneck. NJ: World Scientific Publishing Co., 1989. — 124 p.
15. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M.* Differential Equations with Impulse Effects. — Berlin. Germany: Walter de Gruyter Co., 2011. — 280 p.
16. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. — Berlin. Germany: Walter de Gruyter, 2001. — 232 p.

17. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов и др. — Новосибирск: Наука, 1986. — 266 с. [Measures of Non-Compactness and Condensing Operators / R. R. Ahmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov et al. — Novosibirsk: Nauka, 1986. — 266 p. — (in russian).]
18. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — Издание 2-е, испр. и доп. / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: Книжный дом «Либроком», 2011. — 224 с. [Introduction to the Theory of Multi-Valued Maps and Differential Inclusions / Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii. — Moscow: Moscow Book House "Librokom", 2011. — 224 p. — (in russian).]
19. *Hale J. K., Kato J.* Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay // Funkcialaj Ekvacioj. — 1978. — Vol. 21. — Pp. 11–41.
20. *Hino Y., Murakami S., Naito T.* Functional Differential Equations with Infiniti Delay // Lecture Notes in Mathematics. — 1991. — No 1.
21. *Diestel J., Ruess W. M., Schachermayer W.* Weak Compactness in $L^1(\mu, X)$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 118, No 2. — Pp. 447–453.
22. *Qin Y.* Nonlinear Parabolic-Hyperbolic Coupled Systems and Their Attractors // Operator Theory: Advances and Applications. — 2008. — Vol. 184.

UDC 517.929

On the Cauchy Problem for a Semilinear Functional Differential Inclusion of the Fractional Order with Impulse Response and Infinite Delay in a Banach Space

G. G. Petrosyan

Department of Higher Mathematics
Voronezh State Pedagogical University
86, Lenina str., Voronezh, Russia, 394043

In this paper, applying the theory of topological degree of condensing multi-valued mappings, we prove the existence of solution and the compactness of the set of solutions of the Cauchy problem for a semilinear functional differential inclusion of fractional order with infinite delay and impulse responses in a Banach space.

The article consists of an introduction and three sections. In the introduction the urgency of this problem, outlines the background and provides links to articles and monographs in which the reader can find the applications of the theory of functional differential equations and inclusions of fractional order. In the second section we describe the formulation of the problem, we introduce the space, which addresses this problem and give a criterion for the relative compactness of the set in the input space. The third section consists of four sub-items, which provide preliminary information. In the first subparagraph the concept of fractional derivative and fractional primitive is given. Second paragraph provides the necessary information from the theory of multi-valued mappings. The third sub-paragraph is devoted to information from the theory of measurable multifunctions. In the fourth paragraph we formulate a modified phase space entered by Hale and Kato. In the last section we formulate conditions that we impose on the elements included in the original inclusion and on the basis of auxiliary statements prove our main result.

Key words and phrases: fractional derivative, differential inclusions, Cauchy problem, measure of noncompactness, fixed point, condensing multimap, the impulsive characteristics.