УДК 532.5

Исследование устойчивости потенциального течения жидкости в пористой среде с учётом переменного коэффициента поперечной диффузии

Ю. П. Рыбаков, О. Д. Свиридова, Г. Н. Шикин

Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Исследуется устойчивость потенциального течения жидкости в пористой среде с учётом переменного коэффициента поперечной диффузии. Рассматривается течение в трубе радиуса a, при этом считается, что в силу аксиальности течения существуют две компоненты скорости: $\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$. Уравнение Эйлера содержит в правой части член, определяющий силу Дарси: $\vec{f_D} = -\alpha\vec{v}$, где α — обратный коэффициент проницаемости Дарси. Уравнение непрерывности содержит член, описывающий поперечную диффузию текущей жидкости. Показано, что для системы уравнений Эйлера тождественно выполняется равенство $\partial^2 P/\partial r\partial z \equiv \partial^2 P/\partial z\partial r$, что означает их совместность и вполне интегрируемость. Для компоненты $v_r(r,z)$ получено уравнение Бесселя, для $v_z(r,z)$ получено уравнение, содержащее коэффициент диффузии $D(z)$. Исследована устойчивость решений уравнения для $v_z(r,z)$ для трёх коэффициентов диффузии $D(z)$. Установлено, что во всех случаях решения неустойчивы относительно малых возмущений продольной компоненты скорости $v_z(r,z)$.

Ключевые слова: потенциальное течение, пористая среда, закон Дарси, устойчивость, диффузия.

Основная система уравнений гидродинамики для стационарного течения жидкости в пористой среде в поле тяжести имеет вид:

$$\rho\left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \vec{f_D}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0, \tag{2}$$

где $\vec{v}$ — скорость течения жидкости, P — давление, $\vec{g}$ — ускорение силы тяжести, $\vec{f_D}$ — сила Дарси, имеющая вид $\vec{f_D} = -\alpha\vec{v}$. Здесь α — обратный коэффициент проницаемости Дарси, который считается положительным [1]. В уравнении (2) вектор плотности потока жидкости $\vec{j}$ имеет следующие компоненты в цилиндрических координатах [2]: $j_r = \rho(v_r - D(z)\partial_r v_z)$, $j_z = \rho v_z$.

Запишем систему уравнений (1)–(2) [3]:

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \alpha v_r, \tag{3}$$

$$v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - \alpha v_z + g, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} = D(z)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}\right). \tag{5}$$

При потенциальном течении

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi, \vec{v} = (v_r, 0, v_z) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}, 0, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \tag{6}$$

Статья поступила в редакцию 19 июня 2014 г.

Поскольку $\dfrac{\partial^2 P}{\partial r \partial z} = \dfrac{\partial^2 P}{\partial z \partial r}$, то из (3) и (4) следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \alpha v_r\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \alpha v_z\right). \tag{7}$$

Для потенциального течения равенство (7) выполняется тождественно. Поэтому система уравнений Эйлера (3)–(4) является вполне интегрируемой и при заданных скоростях определяет давление $P(r, z)$.

Запишем уравнение непрерывности (5) для потенциала $\varphi(r, z)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = D(z)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial r^2}\right). \tag{8}$$

Уравнение (8) при различных $D(z)$ исследовано в [4].

Рассмотрим возмущённое течение жидкости, возникшее в результате самопроизвольного изменения давления. При этом возмущённый потенциал скорости принимает вид:

$$\widetilde{\varphi}(r, z) = \varphi(r, z) + \varphi_0(r, z), \tag{9}$$

где $|\varphi_0(r, z)| \ll |\varphi(r, z)|$ описывает возмущение течения жидкости. При подстановке $\widetilde{\varphi}(r, z)$ из (9) в (8) получаем уравнение для $\varphi_0(r, z)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = D(z)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial z \partial r^2}\right). \tag{10}$$

Решение линейного уравнения (10) ищем в разделённых переменных: $\varphi_0(r, z) = R(r)S(z)$. При подстановке $\varphi_0(r, z)$ в (10) получаем уравнение

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{S_{zz}}{S} = D(z)\frac{S_z}{S}\left(\frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{R''}{R}\right). \tag{11}$$

Уравнение (11) можно представить в виде

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = \frac{\frac{S_{zz}}{S}}{1 - D(z)\frac{S_z}{S}} = -k^2, \quad k = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Из (12) получаем уравнение для $R(r)$ и $S(z)$:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + k^2 R(r) = 0, \tag{13}$$

$$S_{zz} + D(z)k^2 S_z - k^2 S = 0. \tag{14}$$

Устойчивость системы определяется свойствами $S(z)$.

Уравнение (13) является уравнением Бесселя нулевого порядка и имеет решение вида:

$$R(r) = -R_0 J_0(kr), \quad R_0 = \mathrm{const}. \tag{15}$$

Поскольку $v_r = \partial\varphi_0/\partial r$, то из (15) получаем $v_r = R_0 k J_1(kr) S(z)$. Функция $v_r(r, z)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям на оси цилиндра $r = 0$ и на поверхности $r = a$: $v_r(0, z) = v_r(a, z) = 0$. Первый нуль функции $J_1(kr)$ соответствует значению $r = 0$, второй нуль значению $ka = 3,83$. При этом получаем единственное значение k: $k = 3,83/a$.

Для определения $S(z)$ имеем уравнение (14). Рассмотрим некоторые простые виды $D(z)$, исследованные в [4]:

1. $D(z) = D_0 = \text{const}$.

Из (14) получаем уравнение

$$S_{zz} + D_0 k^2 S_z - k^2 S = 0. \tag{16}$$

Решение уравнения (16) ищем в виде

$$S(z) = S_0 e^{\alpha z}, \quad S_0 = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}. \tag{17}$$

При подстановке (17) в (16) получаем уравнение для α и его решение

$$\alpha^2 + D_0 k^2 \alpha - k^2 = 0, \quad \alpha_{1,2} = -\frac{D_0 k^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{D_0 k^2}{2}\right)^2 + k^2}. \tag{18}$$

Решение уравнения (16) имеет вид: $S(z) = C_1 e^{\alpha_1 z} + C_2 e^{\alpha_2 z}$, $C_1, C_2 = \text{const}$. Поскольку $\alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0$, то при возрастании z $S(z)$ возрастает экспоненциально, что означает неустойчивость.

2. $D(z) = D_0/(1 + \xi z)$, $\xi = \text{const}$.

Из (14) получаем уравнение

$$S_{zz} + \frac{D_0 k^2}{1 + \xi z} S_z - k^2 S = 0. \tag{19}$$

В уравнении (19) перейдём к новой функции нового аргумента:

$$S(z) = \Psi(x), \quad x = 1 + \xi z, \quad 1 \leqslant x < \infty. \tag{20}$$

Для $\Psi(x)$ из (20) получаем уравнение:

$$\Psi'' + \frac{D_0 k^2}{\xi} \frac{\Psi'}{x} - \frac{k^2}{\xi^2} \Psi = 0. \tag{21}$$

Общее решение уравнения (21) имеет вид:

$$\Psi(x) = \Psi_0 x^{\frac{1-b}{2}} \left[I_\nu \left(\frac{k}{\xi} x \right) + K_\nu \left(\frac{k}{\xi} x \right) \right], \quad b = \frac{D_0 k^2}{\xi}, \quad \nu = \frac{1}{2}(1 - b), \tag{22}$$

где $I_\nu \left(\frac{k}{\xi} x \right)$ и $K_\nu \left(\frac{k}{\xi} x \right)$ — функции Бесселя мнимого аргумента. С возрастанием x функция $I_\nu \left(\frac{k}{\xi} x \right)$ — экспоненциально растущая, т.е. мы имеем неустойчивость.

3. $D(z) = D_0 e^{-\xi z}$.

Из (14) получаем уравнение

$$S_{zz} + D_0 k^2 e^{-\xi z} S_z - k^2 S = 0. \tag{23}$$

В уравнении (23) рассмотрим случай $\xi z \ll 1$. При этом уравнение (23) можно записать в виде

$$S_{zz} + D_0 k^2 (1 - \xi z) S_z - k^2 S \approx S_{zz} + \frac{D_0 k^2}{1 + \xi z} S_z - k^2 S = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) при $0 \leqslant z \ll \dfrac{1}{\xi}$ совпадает с точностью до величин 1-го порядка малости с уравнением (19). Поскольку уравнение (19) с возрастанием z имеет возрастающее решение, то таким свойством обладает уравнение (24), т.е. мы имеем неустойчивое решение.

Таким образом, три возможных выбора $D(z)$ приводят к неустойчивым решениям.

Литература

1. *Шейдеггер А. Э.* Физика течения жидкостей через пористые среды. — Москва: Институт компьютерных исследований. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.
2. *Рыбаков Ю. П., Шикин Г. Н.* Течение в трубе с зернистой загрузкой: пристеночный эффект // XVI Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях». — 2003. — С. 138–139.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — Москва: Наука, 1988.
4. *Рыбаков Ю. П., Свиридова О. Д., Шикин Г. Н.* Исследование потенциального течения жидкости в пористой среде с учетом закона Дарси и переменного коэффициента диффузии. — 2014. — № 1. — С. 148–152.

UDC 532.5

Investigation of the Stability of the Potential Fluid Flow in a Porous Medium with Variable Transverse Diffusion Coefficient

Yu. P. Rybakov, O. D. Sviridova, G. N. Shikin

Department of Theoretical Physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russian Federation, 117198

We have considered the potential fluid flow in porous medium taking into account variable diffusion coefficient in the tube of radius a. The flow is supposed to be cylindrically-symmetric. The velocity has two components: $\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$. The Euler equation has in the right hand side the term which determines Darcy force: $\vec{f_D} = -\alpha\vec{v}$, where α — inverse Darcy coefficient. Continuity equation has the term which describes transverse diffusion of flowing fluid. We have established that for Euler equations system the equality $\partial^2 P/\partial r\partial z \equiv \partial^2 P/\partial z\partial r$ is fulfilled identically. It means that Euler equations system is compatible and integrable. For $v_r(r, z)$ we have obtained Bessel equation, for $v_z(r, z)$ — the equation with diffusion coefficient $D(z)$. We have investigated the solution of the equation for $v_z(r, z)$ with three types of diffusion coefficient $D(z)$. We have established that in all cases the equation has unstable solution.

Key words and phrases: potential flow, porous medium, Darcy law, stability, diffusion.

References

1. A. E. Sheydegger, Physics of Fluid Flow in Porous Medium, Institute of Computer Investigation. NIC "Regular and Chaotic Dynamics", Moscow, 2008, in Russian.
2. Y. P. Rybakov, G. N. Shikin, Flow in a Tube with Granular Loading: Near Wall Effect, in: XVI International Scientific Conference "Mathematical Methods in Technics and Technology", 2003, pp. 138–139, in Russian.
3. L. D. Landau, E. M. Liphshyz, Hydrodynamics, Nauka, Moscow, 1988, in Russian.
4. Y. P. Rybakov, O. D. Sviridova, G. N. Shikin, Investigation of Potential Flow of Fluid in Porous Medium Taking Account of Darcy Law and Variable Diffusion Coefficient (1) (2014) 148–152, in Russian.