

Принцип максимума в задаче максимизации дохода для модели газового месторождения (продолжение)

А. К. Скиба

*Вычислительный центр имени А. А. Дородницына Российской академии наук
ул. Вавилова, д. 40, Москва, Россия, 119333*

Настоящая статья посвящена исследованию задачи максимизации накопленного дохода для модели газового месторождения на конечном интервале времени, детальному анализу полученных результатов и сравнению их с результатами ранее опубликованной этой же задачи на бесконечном интервале.

До сих пор аналогичные задачи, основанные на модели со взаимовлияющими скважинами, решались при постоянной цене на газ. Однако в действительности цена на товар достаточно часто имеет нелинейную зависимость и зависит она от объёма закупок. Поэтому постановка задач модифицируется включением в её описание закупочной функции.

Основным аппаратом поиска решения задачи максимизации дохода на конечном интервале является принцип максимума Понтрягина при условии его существования. Выделяются две области, разделённые друг от друга параметрической зависимостью. На каждой из выделенных областей с помощью метода «фазовых диаграмм» осуществляется поиск оптимального решения.

В результате исследования сформулирована теорема, где в явном виде описано оптимальное решение задачи максимизации на конечном интервале. При совместном анализе полученных решений задач максимизации на конечном и бесконечном интервале выявлено, что при некоторых условиях часть скважин используется неэффективно. Рекомендуются несколько способов решения этой проблемы.

Ключевые слова: принцип максимума, модель газового месторождения, конечный интервал, бесконечный интервал, закупочная функция, максимум накопленного дохода, фазовая диаграмма.

1. Введение

В 2009 г. вышла в печать статья «Принцип максимума в задаче максимизации дохода для модели газового месторождения» [1]. В ней рассматривается динамическая модель газового месторождения со взаимовлияющими скважинами [2–5]. Изменение извлекаемых запасов и изменение дебита описываются дифференциальными уравнениями

$$\dot{V} = -Nq, \quad \dot{q} = -\frac{q_0}{V_0}Nq, \quad (1)$$

где V — извлекаемый запас газа, N — действующий фонд добывающих скважин, q — средний дебит добывающих скважин, q_0 — начальный средний дебит добывающих скважин, V_0 — начальный извлекаемый запас газа.

Добыча газа и доход вычисляются по формулам:

$$Q = qN, \quad \int_0^{\infty} U(Q)e^{-\delta t} dt.$$

В подынтегральном выражении функция $U(Q)$ является закупочной функцией, а δ — коэффициентом дисконтирования, $\delta > 0$. Закупочная функция задаётся известным классом вогнутых функций:

$$U(Q) = cQ^\eta, \quad 0 < \eta < 1. \quad (2)$$

Для упрощения выкладок в упомянутой статье проводится замена переменных

$$N' = \frac{q_0}{V_0} N, \quad \bar{N}' = \frac{q_0}{V_0} \bar{N}, \quad V' = \frac{q_0}{V_0} V = q'. \quad (3)$$

Здесь \bar{N} — ограничение сверху на фонд добывающих скважин и $\bar{N} > 0$. В новых переменных $q' = V'$. В дальнейшем штрихи при этих переменных опускаются.

Ставится задача оптимального управления на бесконечном интервале. В качестве функционала берётся подверженный дисконтированию накопленный доход.

Задача 2. Требуется максимизировать функционал

$$c \int_0^{\infty} q^\eta N^\eta e^{-\delta t} dt \quad (4)$$

при дифференциальной связи

$$\dot{q} = -Q = -qN, \quad (5)$$

начальном условии

$$q_0 > 0 \quad (6)$$

и ограничений на управление

$$0 \leq N \leq \bar{N}. \quad (7)$$

Управление N принадлежит множеству измеримых функций. Правый конец $q(T)$ свободен.

Поиск решения задачи 1 осуществляется в следующем порядке:

- используя теорему существования оптимальной траектории на бесконечном интервале [6], показываем, что оптимальная траектория для задачи 1 существует. Заметим, что тех же результатов можно достичь, используя монографию С. М. Асеева и А. В. Кряжковского [7];
- выписываем гамильтониан, сопряжённое дифференциальное уравнение и условие трансверсальности. Далее, известными методами ищем сопряжённую переменную и «оптимальное» управление;
- убеждаемся, что принцип максимума Понтрягина выполняется;
- показываем, что полученное управление единственно.

Только после выполнения всех этих четырёх процедур можно утверждать, что для задачи 1 найденное управление является оптимальным.

Для этой задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если выполнено неравенство $\frac{\delta}{1-\eta} < \bar{N}$, то оптимальным решением задачи 1 при $\eta \in (0, 1)$ на всем интервале $(0, \infty)$ является управление, заданное формулой $\tilde{N}(t) = \frac{\delta}{1-\eta}$. В противном случае оптимальным решением является управление $\tilde{N} = \bar{N}$.

2. Постановка задачи оптимального управления на конечном интервале

В статье [1] была сформулирована и решена прикладная задача оптимального управления на бесконечном интервале. Однако практический интерес также представляют прикладные задачи оптимального управления с конечным интервалом. Сформулируем данную задачу.

Задача 3. Требуется максимизировать функционал

$$c \int_0^T q^\eta N^\eta e^{-\delta t} dt \quad (8)$$

при дифференциальной связи (5), начальном условии (6) и ограничений на управление (7).

Здесь T — заданный период планирования. Как и в задаче 1, управление N принадлежит множеству измеримых функций, \bar{N} — ограничение сверху на фонд добывающих скважин, которое положительно. Правый конец $q(T)$ свободен.

Отличие постановок задач 1 и 2 от всех ранее исследуемых аналогичных задач заключается в том, что в рассматриваемых постановках используется закупочная функция, задаваемая вогнутой функцией (2). Однако при продаже товара (газа) закупочная функция в таком виде не применяется. На практике наиболее удобна и популярна система прогрессивной шкалы скидок, в основе которой лежит следующий принцип — чем больше объем закупаемого товара, тем больше предлагаемый процент скидок на закупаемый объем.

Математически формула $P(Q)$ для подсчета итоговой стоимости всего объема закупаемого товара определяется следующим образом. Пусть c_0 — цена единицы объема товара, Q — закупаемый объем, $s(Q)$ — величина скидок в денежном выражении при покупке товара объема Q . Положительная функция $s(Q)$ задается на конечном множестве $M = \{Q_1; Q_2; \dots; Q_n\}$ табличным способом. При этом числовые элементы положительны и расположены в порядке возрастания. Прогрессивная шкала скидок определяется выполнением следующих строгих неравенств:

$$\frac{s(Q_1)}{c_0 Q_1} < \frac{s(Q_2)}{c_0 Q_2} < \dots < \frac{s(Q_n)}{c_0 Q_n}.$$

Далее область определения расширяется на весь отрезок $[0, Q_n]$, и функция $s(Q)$ на расширенной области определения $[0, Q_n]$ задается линейным способом по следующей схеме:

$$s(Q) = \frac{s(Q_1)}{Q_1} Q \text{ при } 0 \leq Q \leq Q_1;$$

$$s(Q) = \frac{s(Q_i) - s(Q_{i-1})}{Q_i - Q_{i-1}} Q \text{ при } Q_{i-1} \leq Q \leq Q_i \quad i = 2; \dots; n.$$

Итоговая стоимость вычисляется по формуле $P(Q) = c_0 Q - s(Q)$ при $0 \leq Q \leq Q_n$. Графиком функции $P(Q)$ является ломаная линия. Дополнительно естественно предположить, что функция $P(Q)$ является вогнутой возрастающей функцией.

Решить аналитически задачу 2 с такой функцией $P(Q)$ достаточно сложно, если вообще это возможно. Ещё сложнее проанализировать полученное решение и на основе сделанного анализа прийти к определённым обобщающим выводам. Для преодоления этих сложностей предлагается аппроксимировать кусочно-линейную функцию простой элементарной функцией. Наиболее подходящей функцией в этом случае является степенная функция. Возникает вопрос — как и каким наилучшим образом приблизить функцию, определённую на конечном множестве M , степенной функцией. Одним из известных методов аппроксимации является метод наименьших квадратов. Для применения этого метода необходимо определить расстояние $\rho(Q_0, y_0)$ от точки (Q_0, y_0) , расположенной в положительном квадранте координатной плоскости, до кривой $y = c_0 Q^\eta$. Это расстояние определяется

следующим образом:

$$\rho^2(Q_0, y_0) = \min_Q [(c_0 Q^\eta - y_0)^2 + (Q - Q_0)^2]$$

В результате после применения метода наименьших квадратов определяем конкретную степенную функцию, которая в дальнейшем может быть использована при поиске оптимального решения *задачи 2*.

3. Поиск оптимального решения задачи

Существование оптимального управления следует, например, из теоремы, приведённой в [8, § 4.2].

Для поиска решения *задачи 2* применим принцип максимума Понтрягина [9, 10] со свободным правым концом. Выпишем гамильтониан, сопряжённое уравнение и условие трансверсальности в формах, используемых во многих работах, в том числе и в работе К. Эрроу [11]:

$$H = c(qN)^\eta - \psi qN, \quad (9)$$

$$\dot{\psi} = \psi\delta - c\eta q^{\eta-1} N^\eta + \psi N, \quad (10)$$

$$\psi(T) = 0. \quad (11)$$

Следует отметить отличие написания гамильтониана и сопряжённой переменной от классического их представления. Они отличаются на величину $e^{-\delta t}$. Использование в таком виде переменных значительно упрощает поиск решения данной задачи.

Далее, осуществим с дифференциальным уравнением (10) несколько предварительных преобразований. Умножив обе его части на q , приходим к следующему дифференциальному соотношению

$$\frac{d(\psi q)}{dt} = \psi q\delta - c\eta(qN)^\eta \quad (12)$$

С учётом (5) преобразуем дифференциальное уравнение (12). В результате получаем

$$\frac{d(\psi q)}{dq} = -\frac{\psi q\delta}{qN} + c\eta(qN)^{\eta-1} \quad (13)$$

Справедливы следующие два утверждения.

Утверждение 1. При любом допустимом управлении фазовая переменная $q(t)$ строго положительна и не возрастает.

Доказательство утверждения достаточно простое и вытекает из решения дифференциального уравнения (5) и ограничений на управление (7).

Утверждение 2. Сопряжённая переменная $\psi(t)$ строго положительна на любом полуинтервале $[0, T)$.

Пусть $\tilde{N}(t)$ — оптимальное управление и $\tilde{q}(t)$ — оптимальная траектория. Предположим противное, т.е. $\psi(t_0) \leq 0$ при $t_0 \in [0, T)$. Покажем, что $\psi(t) < 0$ при всех $t \in (t_0, T]$.

Умножим дифференциальное уравнение (10) на $\tilde{q} \exp(-\delta t)$ и после несложных преобразований приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt} (\psi \tilde{q} e^{-\delta t}) = -c\eta(\tilde{q}\tilde{N})^\eta e^{-\delta t}. \quad (14)$$

Проинтегрируем последнее дифференциальное уравнение (14) по ϑ от t_0 до t . В результате получаем

$$\psi(t) = \{\psi(t_0)\tilde{q}(t_0)e^{-\delta(t_0-t)} - c\eta \int_{t_0}^t [\tilde{q}(\vartheta)\tilde{N}(\vartheta)]^\eta e^{-\delta(\vartheta-t)} d\vartheta\} / \tilde{q}(t). \quad (15)$$

С учётом *утверждения 1* из (15) вытекает, что $\psi(t) \leq 0$ при всех $t \in [t_0, T]$. Отсюда и из максимума гамильтониана (9) следует, что $\tilde{N} = \bar{N}$. Тогда из (15) получаем $\psi(t) < 0$ при всех $t \in (t_0, T]$, что противоречит условию трансверсальности (11). *Утверждение 2* доказано.

Рассмотрим *задачу 2* без учёта ограничений (7). В этом случае оптимальное решение может не существовать, поскольку *управление* не принадлежит компактному множеству. Однако мы формально применим принцип максимума Понтрягина. Для этого продифференцируем гамильтониан (9) по N :

$$H'_N = c\eta q^\eta N^{\eta-1} - \psi q. \quad (16)$$

Приравняв полученную производную (16) к нулю, получаем

$$\psi = c\eta(qN)^{\eta-1}. \quad (17)$$

С учётом соотношения (17) разрешим сопряжённое уравнение (10). В результате получаем

$$\dot{\psi} = \psi\delta. \quad (18)$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (18) от t_0 до t

$$\psi(t) = \psi(t_0)e^{\delta(t-t_0)}. \quad (19)$$

Подставим дифференциальное уравнение (5) в равенство (17). После несложных преобразований получаем

$$\dot{q} = - \left(\frac{\psi}{c\eta} \right)^{-\frac{1}{1-\eta}}. \quad (20)$$

С учётом (19) проинтегрируем последнее дифференциальное уравнение (20) от t_0 до t . В результате получаем

$$q(t) = q(t_0) - \frac{1-\eta}{\delta} \left(\frac{\psi(t_0)}{c\eta} \right)^{-\frac{1}{1-\eta}} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{1-\eta}(t-t_0)} \right). \quad (21)$$

Рассмотрим *задачу 2* в её исходной формулировке, т.е. учётом ограничений (7). Справедливы следующие три утверждения.

Утверждение 3. При любом t управление $N(t) = 0$ не является оптимальным.

Действительно, производная (16) гамильтониана по управлению N в точке $N = 0$ равна бесконечности. Значит, $N = 0$ не может быть оптимальным, поскольку данное значение N не может максимизировать гамильтониан (9).

Замечание 1. Оптимальное управление $\tilde{N}(t)$ лежит или внутри отрезка $[0, \bar{N}]$, или принадлежит его правой границе $\tilde{N} = \bar{N}$.

Утверждение 4. Понтрягинская траектория $(\psi(t), q(t))$, заданная на отрезке $[t_0, T]$ функциями (18) и (20), не может быть оптимальной.

Справедливость *утверждения 4* вытекает из условия трансверсальности (11) и *утверждения 2*.

Замечание 2. Понтрягинская траектория $(\psi(t), q(t))$, заданная на отрезке $[t_0, t_1]$ функциями (18) и (20), может быть оптимальной при условии, что $[t_0, t_1] \subset [0, T)$.

Из существования оптимальной траектории и *утверждений 3 и 4* вытекает справедливость следующего *утверждения*.

Утверждение 5. Существует такое $t_0 \in [0, T)$, что оптимальное управление $\tilde{N}(t) = \bar{N}$ при всех $t \in [t_0, T]$.

Поиск оптимального решения *задачи 2* будем проводить на фазовых диаграммах $(\psi q, q)$, где осью абсцисс является фазовая переменная q , а осью ординат — произведение сопряжённой переменной ψ на фазовую переменную q .

Основная идея поиска оптимального решения заключается в следующем. Рассматриваются на фазовой диаграмме все траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, без учёта условия трансверсальности. Такие траектории будем называть траекториями, подозрительными на оптимальность. Иногда слова «подозрительные на оптимальность» будем опускать. Среди всех траекторий, подозрительных на оптимальность, ищем траектории, удовлетворяющие условию трансверсальности. Если найденная траектория единственная, то тогда из существования оптимального решения найденная траектория является оптимальной.

Прежде чем приступить к непосредственному исследованию *задачи 2* на фазовой диаграмме, рассмотрим основные типы кривых и траекторий, которые будут полезны в дальнейшем при поиске на ней оптимальных решений.

3.1. Описание основных типов кривых и траекторий

В этом подразделе мы дадим описание трёх кривых и двух фазовых траекторий, которые будут полезны при исследовании фазовых диаграмм рис. 1 и рис. 2.

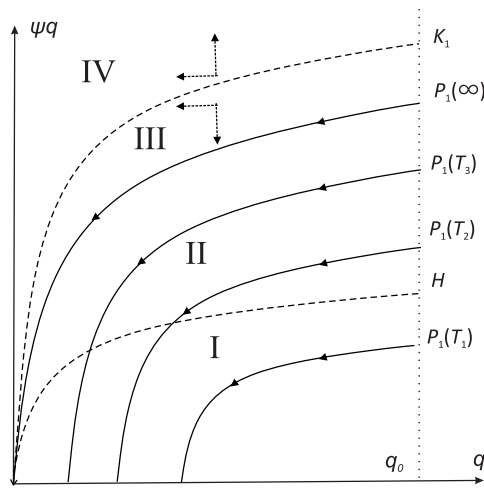


Рис. 1. Фазовая диаграмма для случая $\frac{\delta}{1-\eta} < \bar{N}$; справедливо двойное неравенство $T_1 < T_2 < T_3$

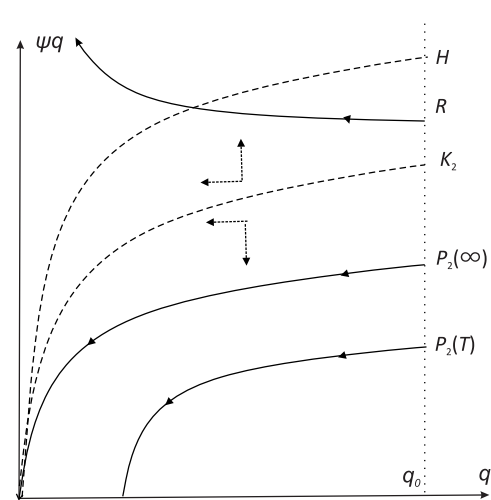


Рис. 2. Фазовая диаграмма для случая $\frac{\delta}{1-\eta} \geq \bar{N}$

Умножим обе части равенства (17) на q и, подставив $N = \bar{N}$, получаем

$$\psi q = c\eta \bar{N}^{\eta-1} q^\eta. \tag{22}$$

Функция (22) описывает на фазовой диаграмме кривую H . Данная кривая делит фазовую диаграмму на две части. Максимум гамильтониана (9) для всех точек, лежащих ниже кривой H , достигается при $N = \bar{N}$, а для всех точек, лежащих выше кривой H , — при $N \in (0, \bar{N})$.

Далее, найдём кривые K_1 и K_2 , на которых меняется направление изменения переменного $\psi(t)q(t)$, т.е. на фазовой диаграмме находим множество точек, на которых переменная $\psi(t)q(t)$ с возрастающей функции становится убывающей функцией и наоборот. Заметим при этом, что другая фазовая переменная $q(t)$ является только убывающей функцией. Рассмотрим точки, лежащие выше кривой H . В этих точках максимум гамильтониана (9) достигается внутри отрезка $[0, \bar{N}]$. Воспользовавшись равенством (17), приравняем правую часть (13) к нулю. В результате после несложных преобразований получаем

$$\psi q = c\eta\delta^{\eta-1}q^\eta. \quad (23)$$

Функция (23) задаёт на фазовой диаграмме кривую K_1 . Кривая K_1 лежит выше кривой H при условии выполнения неравенства

$$\bar{N} > \delta. \quad (24)$$

Рассмотрим точки, лежащие ниже кривой H . В этих точках максимум гамильтониана (9) достигается при $N = \bar{N}$. При этом значении N приравняем правую часть дифференциального уравнения (13) к нулю. В результате получаем

$$\psi q = c\eta\delta^{-1}\bar{N}^\eta q^\eta. \quad (25)$$

Функция (25) задаёт на фазовой диаграмме кривую K_2 . Кривая K_2 лежит ниже кривой H при условии выполнения неравенства

$$\delta > \bar{N}. \quad (26)$$

Следующие две траектории являются решением задачи 1 — задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени. Как уже упоминалось выше, решение данной задачи было опубликовано в статье [1]. Данные траектории мы будем обозначать как $P_1(\infty)$ и $P_2(\infty)$. Оптимальная траектория $P_1(\infty)$ задаётся графиком функции

$$\psi q = c\eta \left(\frac{\delta}{1-\eta} \right)^{\eta-1} q^\eta \quad (27)$$

и является решением дифференциального уравнения (5) при оптимальном управлении $\tilde{N} = \frac{\delta}{1-\eta}$, а оптимальная траектория $P_2(\infty)$ задаётся

$$\psi q = c\bar{N}^{\eta-1} \frac{\eta\bar{N}}{\eta\bar{N} + \delta} q^\eta \quad (28)$$

и является решением уравнения (5) при оптимальном управлении $\tilde{N} = \bar{N}$.

Траектория $P_1(\infty)$ лежит выше кривой H при выполнении условия

$$\frac{\delta}{1-\eta} < \bar{N}, \quad (29)$$

а траектория $P_2(\infty)$ лежит ниже или совпадает с кривой H при

$$\frac{\delta}{1-\eta} \geq \bar{N}. \quad (30)$$

Таким образом, в зависимости от соотношений входящих в модель параметров оптимальной траекторией на бесконечном интервале времени является либо траектория $P_1(\infty)$, либо траектория $P_2(\infty)$.

Заметим, что все рассмотренные в этом подразделе кривые и траектории (22), (23), (25), (27), (28) имеют одинаковую структуру, а именно $\psi q = aq^n$, отличающиеся друг от друга только значением коэффициентом a .

3.2. Поиск оптимального решения задачи 2 при условии (29)

На рис. 1 изображена фазовая диаграмма, предназначенная для поиска оптимального решения задачи 2, в которой её параметры удовлетворяют неравенству (29). На ней отображены две кривые и четыре оптимальные траектории с тремя друг от друга отличными конечными периодами планирования и одним бесконечным периодом. Описание кривых K_1 и H , а также оптимальной траектории $P_1(\infty)$, дано в предыдущем подразделе настоящей статьи.

Определим, как расположены относительно друг друга на фазовой диаграмме две кривые K_1 и H и оптимальная траектория $P_1(\infty)$. Учитывая неравенство (29), функции для их описаний (23), (22) и (27), получаем, что две кривые K_1 и H и оптимальная траектория $P_1(\infty)$ располагаются на фазовой диаграмме сверху вниз в следующем порядке. Выше всех изображена кривая K_1 , ниже — оптимальная траектория $P_1(\infty)$ и ещё ниже — кривая H . Направления изменения переменных $q(t)$ и $\psi(t)q(t)$ показаны на фазовой диаграмме горизонтальными и вертикальными стрелками.

Кроме того, на фазовой диаграмме в положительном квадранте выделяются четыре области, границами которых являются кривые K_1 и H и оптимальная траектория $P_1(\infty)$. Между осью q и кривой H находится область I , между кривой H и оптимальной траекторией $P_1(\infty)$ — область II , между оптимальной траекторией $P_1(\infty)$ и кривой K_1 — область III , выше кривой K_1 — область VI .

Заметим, что только на оси q удовлетворяются условия трансверсальности (11). Из областей III и IV траектории не могут достичь оси q , а из областей I и II , которые располагаются ниже траектории $P_1(\infty)$, могут её достичь. При этом из области II траектории входят в область I , а затем, двигаясь внутри области I , достигают её границу — ось q .

Для доказательства того, что траектория из области II попадает в область I , необходимо исследовать производные в точке пересечения траектории с кривой H и убедиться в следующем. Значение производной траектории (13) в точке пересечения $(c\eta\bar{N}^{\eta-1}q^\eta, q)$ при управлении $N = \bar{N}$

$$\frac{d(\psi q)}{dq} = -\frac{\psi q \delta}{q \bar{N}} + c\eta(q\bar{N})^{\eta-1} = c\eta(q\bar{N})^{\eta-1} \left(1 - \frac{\delta}{\bar{N}}\right) \quad (31)$$

больше значения производной функции (22), описывающей кривую H , в той же точке

$$\frac{d(\psi q)}{dq} = c\eta^2(\bar{N}q)^{\eta-1}. \quad (32)$$

С учётом неравенства (29) в этом легко можно убедиться.

Далее, определим время T_2 , за которое из точки на кривой H достигается ось q . Для этого упростим выражение (15), полагая $t_0 = 0$, $t = T_2$, $\psi(T_2) = 0$ и $\tilde{N}(\vartheta) = \bar{N}$ при $\vartheta \in [0, T_2]$

$$\psi_0 q_0 = c\eta q_0^\eta \frac{\bar{N}^\eta}{\eta \bar{N} + \delta} \left[1 - e^{-(\eta \bar{N} + \delta)T_2}\right]. \quad (33)$$

Приравняв правую часть равенства (33) к правой части равенства (22), получаем после несложных преобразований

$$T_2 = -\frac{1}{\eta\bar{N} + \delta} \ln \left(1 - \eta - \frac{\delta}{\bar{N}} \right). \quad (34)$$

Заметим, что время движения по траектории от кривой H до оси q одинаково для всех траекторий, полностью пересекающих область I . Данный факт несколько облегчает поиск оптимального решения.

Рассмотрим траектории, которые полностью принадлежат области I . В этом случае $T \leq T_2$ и $\psi(t) \leq c\eta(\bar{N}\tilde{q}(t))^{\eta-1}$ при $t \in [0, T]$. Воспользуемся равенством (15) при $t = T$, $t_0 = t$ и $\hat{N}(\vartheta) = \bar{N}$ для $\vartheta \in [0, T]$ и $t \in [0, T]$. С учётом условия трансверсальности (11) и решением дифференциального уравнения (5) однозначно на отрезке $[0, T]$ определяем сопряжённую переменную

$$\psi(t) = c\eta \frac{\bar{N}^\eta \tilde{q}_0^{\eta-1}}{\eta\bar{N} + \delta} \left[1 - e^{-(\eta\bar{N} + \delta)(T-t)} \right] e^{(1-\eta)\bar{N}t}. \quad (35)$$

Более того, сопряжённая переменная (35) является взаимно-однозначной и единственной функцией.

Рассмотрим траектории, которые расположены в двух смежных областях II и I . В этом случае $T > T_2$. Введём обозначения, полагая $T_1 = T - T_2$ и $\hat{N} = \frac{\delta}{1-\eta}$. Описание движения по траектории будем производить отдельно в каждой из рассматриваемых областей. При $t \in [0, T_1]$ движение по траектории происходит в области II , а при $t \in [T_1, T]$ — в области I .

С учётом условия трансверсальности (11) воспользуемся для каждого конкретного случая соотношениями (15), (17), (19), (21) и (22). В результате при $t \in [0, T_1]$ получаем

$$\tilde{q}(t) = q_0 e^{-\hat{N}t} \left[\bar{N} - e^{-\hat{N}(T_1-t)} (\bar{N} - \hat{N}) \right] \left[\bar{N} - e^{-\hat{N}T_1} (\bar{N} - \hat{N}) \right]^{-1}, \quad (36)$$

$$\tilde{N}(t) = \hat{N}\bar{N} \left[\bar{N} - (\bar{N} - \hat{N})e^{-\hat{N}(T_1-t)} \right]^{-1}, \quad (37)$$

$$\psi(t) = c\eta \left[\bar{N} - e^{-\hat{N}T_1} (\bar{N} - \hat{N}) \right]^{1-\eta} (\hat{N}\bar{N}q_0)^{\eta-1} e^{\delta t}, \quad (38)$$

а при $t \in [T_1, T]$ —

$$\tilde{q}(t) = \tilde{q}(T_1) e^{-\bar{N}(t-T_1)}, \quad (39)$$

$$\tilde{N}(t) = \bar{N}, \quad (40)$$

$$\psi(t) = c\eta \frac{\bar{N}^\eta \tilde{q}^{\eta-1}(T_1)}{\eta\bar{N} + \delta} \left[1 - e^{-(\eta\bar{N} + \delta)(T-t)} \right] e^{(1-\eta)\bar{N}(t-T_1)}. \quad (41)$$

Выписанные выше фазовая переменная (36) и (39), управление (37) и (40), сопряжённая переменная (38) и (41) являются единственным оптимальным решением задачи 2 при условии (29). Решение задачи 2 при условии (29) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности — принципу максимума Понтрягина со свободным правым концом.

Сопряжённая переменная $\psi(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$. В этом легко можно убедиться. В частности, для доказательства равенства сопряжённого переменного (38) и (41) в точке T_1 воспользуемся соотношениями (34) и (36). Сопряжённая переменная $\psi(t)$ также удовлетворяет условию трансверсальности (11) и дифференциальному уравнению (10) при управлении (37) и (40).

Покажем, что управление (37) максимизирует гамильтониан (9) внутри отрезка $[0, \bar{N}]$ при всех $t \in [0, T_1]$. Управление (37) является возрастающей функцией

от t и $\tilde{N}(T_1) = \bar{N}$. Далее, можно получить оценку $\tilde{N}(t) > \hat{N}$. Значит, $\tilde{N}(t)$ лежит внутри отрезка $[0, \bar{N}]$. Поэтому для доказательства максимума гамильтониана (9) с учётом его вогнутости по управлению N достаточно показать выполнимость равенства (17) при сопряжённой переменной (38), фазовой переменной (36) и управлении (37). В этом легко можно убедиться.

Перейдём к максимизации гамильтониана (9) по управлению N на отрезке $[0, \bar{N}]$ при всех $t \in [T_1, T]$. Управление (40) максимизирует гамильтониан (9) на правой границе отрезка. Данный факт вытекает из следующих рассуждений. С учётом вогнутости гамильтониана по управлению и положительности его производной в нуле достаточно показать неотрицательность производной гамильтониана (16) по управлению N . При $t = T_1$ рассматриваемая производная равна нулю. Легко показать, что производная возрастает по t . Значит, максимум гамильтониана (9) по управлению N достигается на правой границе отрезка $[0, \bar{N}]$ при всех $t \in [T_1, T]$.

Утверждение 6. При условии (29) фазовая переменная (36) и (39), управление (37) и (40), сопряжённая переменная (38) и (41) задачи 2 удовлетворяют условиям принципа максимума Понтрягина со свободным правым концом.

3.3. Поиск оптимального решения задачи 2 при условии (30)

На рис. 2 представлена фазовая диаграмма, предназначенная для поиска оптимального решения задачи 2, в которой её параметры удовлетворяют неравенству (30). На диаграмме изображены две кривые и три траектории, две из которых оптимальные, отличающиеся друг от друга разными периодами планирования. Описание кривых K_2 и H , а также оптимальной траектории $P_2(\infty)$, дано в подразделе 3.1 настоящей статьи.

Заметим, что при выполнении условия (26) кривая K_2 лежит ниже кривой H . В противном случае вместо кривой K_2 на фазовой диаграмме должна быть изображена кривая K_1 . Такое отличие практически не оказывает существенного влияния на доказательство. Во всех этих случаях важно отметить, что кривые K_1 и K_2 лежат выше оптимальной траектории $P_2(\infty)$. С помощью простейших математических выкладок это легко можно доказать.

Направления изменения переменных $q(t)$ и $\psi(t)q(t)$ изображены на фазовой диаграмме горизонтальными и вертикальными стрелками.

Утверждение 7. При выполнении неравенства (30) любая другая фазовая переменная $q(t)$ отличная от фазовой переменной

$$\tilde{q}(t) = q_0 e^{-\bar{N}t} \quad (42)$$

не является оптимальной.

Предположим противное. Пусть существует фазовая переменная $q(t)$, отличающаяся от (42) и являющаяся оптимальной. На основании сделанного предположения существует такой интервал $(t_1, t_2) \subset [0, T]$, на котором почти всюду $N(t) \in (0, \bar{N})$. Это означает, что часть рассматриваемой траектории находится на фазовой диаграмме выше кривой H . Из этого следует, что за конечное время ось q не достижимо. Значит условие трансверсальности (11) не выполнено, что противоречит принципу максимума Понтрягина для задачи со свободным правым концом.

Из утверждения 7 и существования оптимального решения для задачи 2 вытекает, что при выполнении неравенства (30) оптимальное решение задаётся фазовой переменной (42).

Утверждение 8. При выполнении неравенства (30) оптимальным решением задачи 2 является фазовая переменная (42).

4. Обсуждение решений задач 1 и 2

Учитывая результаты, полученные в предыдущем разделе, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Оптимальным решением задачи 2 является управление $\tilde{N}(t) = \bar{N}$ на всем плановом периоде от 0 до T при одном из следующих условиях:*

$$\begin{aligned} & - \frac{\delta}{1-\eta} \geq \bar{N}; \\ & - \frac{\delta}{1-\eta} < \bar{N} \text{ и } T \leq T_2, \text{ где } T_2 = -\frac{1}{\eta\bar{N} + \delta} \ln \left(1 - \eta - \frac{\delta}{\bar{N}} \right). \end{aligned}$$

Если выполнено условие $\frac{\delta}{1-\eta} < \bar{N}$ и $T \geq T_2$, то при $t \in [0, T_1]$, где $T_1 = T - T_2$, оптимальное управление задаётся функцией

$$\tilde{N}(t) = \frac{\delta}{1-\eta} \bar{N} \left[\bar{N} - \left(\bar{N} - \frac{\delta}{1-\eta} \right) \exp \left(-\frac{\delta}{1-\eta} (T_1 - t) \right) \right]^{-1},$$

а при $t \in [T_1, T]$: $\tilde{N}(t) = \bar{N}$.

Построение модели, на основе которой ставятся задачи 1 и 2, базируется на предположении — началу разработки месторождения предшествует полное его разбуривание. В этом случае происходит разбуривание месторождения до общего фонда скважин равного \bar{N} , после чего начинается добыча газа. Управление разработкой месторождения осуществляется включением или отключением скважин из общего их фонда. Такое предшествие характерно для многих месторождений, в частности, для месторождений с незначительными запасами газа в Западной Сибири.

Далее ставится вопрос об эффективности использования скважин. Все скважины используются эффективно в течении всего периода планирования в двух случаях. В первом случае, когда величина общего фонда скважин удовлетворяет неравенству $\frac{\delta}{1-\eta} \geq \bar{N}$ как для конечного периода планирования, так и для бесконечного. Второй случай касается только конечного периода планирования. При выполнении неравенства $\frac{\delta}{1-\eta} < \bar{N}$ и период планирования T меньше заранее известной величины

$$T_2 = -\frac{1}{\eta\bar{N} + \delta} \ln \left(1 - \eta - \frac{\delta}{\bar{N}} \right)$$

все скважины используются эффективно.

В остальных случаях при выполнении неравенства $\frac{\delta}{1-\eta} < \bar{N}$ скважины используются неэффективно на определённых временных промежутках. Предлагаются следующие рекомендации для повышения эффективности использования скважин.

Для бесконечного периода в течение всего времени скважины используются неэффективно. Для конечного периода планирования $T > T_2$ неэффективно используются скважины во временном промежутке от 0 до $T - T_2$. При этом, чем больше T , тем менее эффективно используются скважины.

Неэффективность использования скважин связано с не совсем оправданными затратами на их разбуривание. Для бесконечного периода при выполнении неравенства $\frac{\delta}{1-\eta} < \bar{N}$ следует понизить объём общего фонда скважин до величины

$\bar{N} = \frac{\delta}{1-\eta}$. Это позволит сэкономить значительные денежные средства. Данное понижение на совокупный доход никаким образом не отразится. Более того, таким образом, сохранен самый большой возможный совокупный доход, независимый от периода планирования.

Для достаточно большого, но конечного периода планирования, ради экономии на затратах можно «пожертвовать» небольшой частью совокупного дохода, полагая $\bar{N} = \frac{\delta}{1-\eta}$. Имеется и другой менее экономный способ, полностью сохраняющий совокупный доход. Осуществляется подбуривание скважинами месторождения в период от 0 до $T - T_2$ в соответствии со следующей зависимостью:

$$\bar{N}(t) = \tilde{N}(t) = \frac{\delta}{1-\eta} \bar{N} \left[\bar{N} - \left(\bar{N} - \frac{\delta}{1-\eta} \right) \exp \left(-\frac{\delta}{1-\eta} (T_1 - t) \right) \right]^{-1}.$$

Экономия заключается в отложенных во времени затратах. Недостаток такого подхода состоит в том, что скважина введённая позже вносит меньший вклад в совокупный доход, чем скважина введённая раньше. Наблюдается нарушение равенств вкладов в совокупный доход, вносимого каждой из пробуренных скважин.

Литература

1. Скиба А. К. Принцип максимума в задаче максимизации дохода для модели газового месторождения // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2009. — № 1. — С. 14–22.
2. Федосеев А. В., Хачатуров В. Р. Постановка и исследование задач оптимального управления для анализа перспективных планов в нефтегазодобывающей промышленности // Имитационное моделирование и математические методы анализа перспективных планов развития нефтедобывающей промышленности. — Москва: ВЦ АН СССР, 1984. — С. 66–112.
3. Маргулов Р. Д., Хачатуров В. Р., Федосеев А. В. Системный анализ в перспективном планировании добычи газа. — Москва: Недра, 1991. — 288 с.
4. Скиба А. К. Смешанное ограничение в прикладной задаче оптимального управления // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2012. — № 4. — С. 31–43.
5. Моделирование освоения газовых месторождений на заключительной стадии эксплуатации / А. К. Скиба, В. Р. Хачатуров, А. В. Злотов, А. Н. Соломатин. — Москва: ВЦ РАН, 2006. — 54 с.
6. Balder E. J. On Existence Result for Optimal Economic Growth Problems // A Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1983. — Vol. 95. — Pp. 195–213.
7. Асеев С. М., Кряжисмский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. — 2007. — Т. 257. — С. 1–272.
8. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — Москва: Наука, 1972. — 576 с.
9. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — Москва: Мир, 1978. — 318 с.
10. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. — Москва: Наука, 1974. — 528 с.
11. Эрроу К. Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика. — Москва: Мир, 1974. — С. 7–45.

UDC 517.97

Maximum Principle in a Problem of Maximization of the Income for Model of a Gas Deposit (Continued)

A. K. Skiba

*Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences
40, Vavilov str., Moscow, Russian Federation, 119333*

This article is devoted to the study of the maximization of the accumulated income for the model of the gas deposit on a finite horizon, a detailed analysis of the obtained results and their comparison with the results of the previously posted this same problem on an infinite horizon.

So far the same tasks, based on a model with interacting wells, were solved at a constant price for gas. In reality, however, the price for the goods quite often has a nonlinear dependence and depends on the volume of purchases. Therefore, the statement of the problem is modified by the inclusion in its description of the procurement function.

A major tool in the search for the solution to the maximization of income on a finite horizon is the Pontryagin's maximum principle under the condition of its existence. There are two areas, separated from each other parametric dependence. On each of the selected areas with the use of the method of "phase diagram" the optimal solution is being found.

The optimal solution of the problem of maximization on a finite horizon is explicitly described. Joint analysis of the obtained solutions in the problems of maximization on finite and infinite horizon revealed that under certain conditions a part of wells is used inefficiently. Several ways to solve this problem are recommended.

Key words and phrases: maximum principle, model of gas deposits, finite horizon, infinite horizon, procurement function, maximum accumulated income, phase diagram.

References

1. A. K. Skiba, Maximum Principle in a Problem of Maximization of the Income for Model of a Gas Deposit, Bulletin PFUR. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (1) (2009) 14–22, in Russian.
2. A. V. Fedoseev, V. R. Khachaturov, Statement and the Study of Optimal Control Problems for Analysis of Future Plans in the Oil and Gas Industry, Computing Center of USSR Academy of Sciences, Moscow, 1984, pp. 66–112, in Russian.
3. R. D. Margulov, V. R. Khachaturov, A. V. Fedoseev, System Analysis in Future Planning of Gas Production, Nedra, Moscow, 1991, in Russian.
4. A. K. Skiba, An Optimal Control Applied Problem with a Mixed Constraint, Bulletin PFUR. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (4) (2012) 31–43, in Russian.
5. A. K. Skiba, V. R. Khachaturov, A. V. Zlotov, A. N. Solomatin, Simulation for the Development of Gas Deposits at the Final Stage of Exploitation, Moscow, 2006, in Russian.
6. E. J. Balder, On Existence Result for Optimal Economic Growth Problems, A Journal of Mathematical Analysis and Applications 95 (1983) 195–213.
7. S. M. Aseev, A. V. Kryazhimskii, The Pontryagin Maximum Principle and Optimal Economic Growth, Proceedings of the Mathematical Institute of V. A. Steklov 257, in Russian.
8. E. B. Lee, L. Markus, Foundations of Optimal Control Theory, Nauka, Moscow, 1972, in Russian.
9. W. Fleming, R. Rishel, Optimal Control of Deterministic and Stochastic Systems, Mir, Moscow, 1978, in Russian.
10. N. N. Moiseev, Elements of the Theory of Optimal Systems, Nauka, Moscow, 1974, in Russian.
11. K. Arrow, The Application of Control Theory to Economic Growth, Mir, Moscow, 1974, pp. 7–45, in Russian.