УДК 519.718: 658.652

О чувствительности характеристик надежности систем к виду функций распределения времени безотказной работы и восстановления их элементов

В. В. Рыков*, Ань Нгиа Чан†

** РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина*
Ленинский просп., д. 65, корп. 1, Москва, Россия, 119991
† Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В статье рассматривается проблема чувствительности характеристик надёжности систем $\langle M_2/GI/1\rangle$ и $\langle GI_2/M/1\rangle$ к виду функций распределения (ф.р.) времени безотказной работы (в.б.р.) и времени восстановления их элементов при ограничениях на доступность восстановления. Для этих систем представлены дифференциальные уравнения в частных производных для нестационарных и обыкновенные дифференциальные уравнения для стационарных вероятностей микросостояний состояний. Для стационарных вероятностей микро- и макросостояний и получены аналитические выражения их зависимости от вида распределений в.б.р. и времени восстановления, которые явно зависят от вида ф.р. не показательно распределённых исходных характеристик систем через их производящие функции (преобразования Лапласа–Стилтьеса соответствующих ф.р.) в точках, равных интенсивности показательно распределённой характеристики.

С помощью специально разработанного программного средства в среде MATLAB проведено численное исследование чувствительности вероятности отказа системы от вида функций распределения времени безотказной работы и восстановления её элементов и сравнение полученных результатов с соответствующими характеристиками для простейшей марковской модели $\langle M_2/M/1\rangle$. Проведённое исследование показало, что эта чувствительность незначительна и становится исчезающе малой при «быстром» восстановлении. В частности, в результате численного анализа с помощью указанного программного средства показано, что когда в качестве общего распределения GI используются Гамма-распределение (Г) или распределение Вейбулла–Гнеденко ($W-G$), вероятности отказа систем $\langle M_2/GI/1\rangle$ и $\langle GI_2/M/1\rangle$ быстро сходятся к нулю с ростом скорости восстановления.

Ключевые слова: надёжность систем, вероятности отказа, чувствительность к виду функций распределения, микро- и макросостояния, стационарные и не стационарные вероятности.

1. Введение

Одним из первых результатов о нечувствительности характеристик систем массового обслуживания к виду ф.р. времени обслуживания была теорема Б. А. Севастьянова [1] о справедливости формул Эрланга для произвольных законов распределения длительностей разговоров. И. Н. Коваленко [2] показал, что при показательных распределениях времени безотказной работы (в.б.р.) элементов резервированной системы необходимым и достаточным условием нечувствительности стационарных характеристики её надёжности (стационарных вероятностей состояний) к виду ф.р. времени восстановления является возможность немедленного начала восстановления отказавшего элемента (т.е. достаточное количество восстанавливающих устройств). В [3] показано, что это условие достаточно для нечувствительности стационарных характеристик надёжности систем к виду как ф.р. в.б.р., так и восстановления. Однако при наличии ограничений на возможность восстановления (в случае ограниченного числа восстанавливающих устройств) этот факт не верен. Теоретическое исследование нечувствительности стационарных характеристик надёжности к виду ф.р. в.б.р. и восстановления в случае ограниченного числа восстанавливающих устройств — не простая задача.

В настоящей статье исследуется влияние вида ф.р. в.б.р. и времени восстановления на стационарные характеристики надёжности систем при ограниченном количестве ремонтных бригад, когда не все отказавшие элементы могут восстанавливаться одновременно. Получены явные формулы зависимости стационарных характеристик надёжности дублированной системы холодного резервирования от вида ф.р. в.б.р. и времени восстановления и проведено численное исследование влияния законов распределения в.б.р. и восстановления на стационарные характеристики надёжности системы и их сравнение с соответствующими характеристиками в марковском случае.

Не смотря на явную зависимость стационарных вероятностей состояний системы от вида ф.р. в.б.р. и времени восстановления численный анализ показал, что при «быстром» восстановлении эта зависимость становится исчезающе малой.

В следующем разделе вводятся обозначения и приводятся характеристики надёжности для простейшей марковской модели холодного дублирования с одним восстанавливающим устройством. Затем в двух последующих разделах исследуются модели холодного резервирования в случае, когда только одно из распределений в.б.р. или времени восстановления отлично от показательного. Наконец в последнем разделе проводится соответствующие численные исследования и приводится сравнительный анализ с марковским случаем.

2. Постановка задачи и обозначения

Рассмотри систему надёжности из n элементов, подверженных отказам (источников заявок), и m ремонтных единиц. Обобщая символику Кендалла, такие системы будем обозначать через $\langle GI_n/GI/m(RE)\rangle$, где угловые скобки $\langle\ \rangle$ означают, что рассматривается замкнутая система обслуживания, с ограниченным числом источников заявок. Символ GI (General Independent) используется для указания рекуррентного потока отказов на первом месте или рекуррентного механизма восстановления элементов на втором и заменяется символом M для показательных распределений в.б.р. или времени восстановления или специальными символами для иных распределений, например $E_k(\lambda)$ для распределения Эрланга с параметрами $(k,\,\lambda)$. Наконец, последний символ указывает число ремонтных единиц (обслуживающих приборов). Таким образом, дублированная система с одним ремонтным прибором и произвольными законами распределения в.б.р. и восстановления обозначается как $\langle GI_2/GI/1\rangle$. При этом необходимо дополнительно оговаривать вид резервирования (горячее, холодное или тёплое).

Будем обозначать ф.р. в.б.р. и восстановления элементов системы через $A(x)$ и $B(x)$ соответственно. Предполагается, что они абсолютно непрерывны, а их производные, плотности распределения (п.р.), обозначаются через $a(x)$ и $b(x)$. Соответствующие средние значения и интенсивности отказов и восстановлений обозначаются

$$a = \int xa(x)\mathrm{d}x = \int (1 - A(x))\mathrm{d}x, \quad b = \int xb(x)\mathrm{d}x = \int (1 - B(x))\mathrm{d}x,$$

$$\alpha(x) = \frac{a(x)}{1 - A(x)}, \quad \beta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}.$$

Наконец для производящей функции моментов (п.ф.м.) в.б.р. и восстановления (преобразований Лапласа их плотностей $a(x)$ и $b(x)$)) используются обозначения

$$\tilde{a}(s) = \int e^{-sx}a(x)\mathrm{d}x, \quad \tilde{b}(s) = \int e^{-sx}b(x)\mathrm{d}x.$$

Для получения достаточно прозрачных численных результатов остановимся на системах холодного дублирования, когда $n = 2$ с одним восстанавливающим устройством $m = 1$, и, чтобы исследовать чувствительность модели по виду ф.р.

в.б.р. и времени восстановления для различных моделей $\langle M_2/GI/1\rangle$ и $\langle GI_2/M/1\rangle$ и сравнить их с соответствующими характеристиками для простейшей марковской модели $\langle M_2/M/1\rangle$, напомним сначала стационарные характеристики для этой модели.

3. Марковская модель системы с ограниченным числом ремонтных устройств

Для простейшей марковской модели $\langle M_2/M/1\rangle$ случайный процесс

$$N(t) = \text{число отказавших элементов в момент времени } t$$

является процессом гибели и размножения с множеством состояний $E = \{0,\, 1,\, 2\}$. Для вероятностей его состояний $\pi_i(t)$, $\pi_i(t) = \mathbf{P}\{N(t) = i\}$ справедливы дифференциальные уравнения Колмогорова, в которых верхней точкой обозначаются производные по времени

$$\begin{cases} \dot{\pi}_0(t) = -\alpha\pi_0(t) + \beta\pi_1(t), \\ \dot{\pi}_1(t) = \alpha\pi_0(t) - (\alpha+\beta)\pi_1(t) + \beta\pi_2(t), \\ \dot{\pi}_2(t) = \alpha\pi_1(t) - \beta\pi_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

Решение этой системы следует искать с начальным условием, определяемым начальным состоянием процесса.

Стационарные вероятности состояний $\pi_i = \lim_{t\to\infty} \pi_i(t)$, существование которых следует из конечности множества состояний процесса и его неразложимости, удовлетворяют соответствующей системе уравнений глобального баланса

$$\begin{cases} 0 = -\alpha\pi_0 + \beta\pi_1, \\ 0 = \alpha\pi_0 - (\alpha+\beta)\pi_1 + \beta\pi_2, \\ 0 = \alpha\pi_1 - \beta\pi_2 \end{cases} \tag{2}$$

с условием нормировки $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$. С использованием обозначения $\rho = \dfrac{\alpha}{\beta}$ решение этих уравнений представимо в виде

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2}, \quad \pi_1 = \frac{\rho}{1+\rho+\rho^2}, \quad \pi_2 = \frac{\rho^2}{1+\rho+\rho^2}. \tag{3}$$

Заметим, что вероятность отказа системы совпадает с величиной π_2.

Рассмотрим теперь системы, в которых только одно из распределений (в.б.р. или восстановления) отличны от показательного. Для исследования этих систем используется метод дополнительных переменных [4]. Ограничимся для простоты случаем с двумя приборами и одним восстанавливающим устройством.

4. Система холодного дублирования $\langle M_2/GI/1\rangle$

Рассмотрим систему $\langle M_2/GI/1\rangle$ холодного дублирования с одним ремонтным устройством. В качестве дополнительной переменной используем время, затраченное на обслуживание отказавшего элемента, и обозначим через $\pi_0(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии $i = 0$, и через $\pi_i(t;x)$ плотность распределения (п.р.) вероятностей того, что в момент времени t система находится в состоянии i $(i = 1, 2)$ и время, затраченное на обслуживание отказавшего элемента, находится в интервале $(x, x + \mathrm{d}x]$

$$\pi_0(t) = \mathbf{P}\{N(t) = 0\},$$
$$\pi_i(t; x)\mathrm{d}x = \mathbf{P}\{N(t) = i;\ x < X(t) \leqslant x + \mathrm{d}x\} \quad (i = 1, 2).$$

Теорема 1. *Функции $\pi_i(t; x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных*

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi_0(t)}{dt} = -\alpha\pi_0(t) + \int\limits_0^t \pi_1(t; u)\beta(u)\mathrm{d}u, \\ \dfrac{\partial\pi_1(t;\, x)}{\partial t} + \dfrac{\partial\pi_1(t; x)}{\partial x} = -(\alpha + \beta(x))\pi_1(t; x), \\ \dfrac{\partial\pi_2(t;\, x)}{\partial t} + \dfrac{\partial\pi_2(t;\, x)}{\partial x} = -\beta(x)\pi_2(t;\, x) + \alpha\pi_1(t;\, x) \end{cases} \tag{4}$$

с граничным условием

$$\pi_1(t;\, 0) = \alpha\pi_0(t) + \int\limits_0^t \pi_2(t; u)\beta(u)\mathrm{d}u. \tag{5}$$

Доказательство. С помощью формулы полной вероятности путём сравнения вероятностей состояний процесса в моменты времени t и $t + \Delta$ легко выводится система уравнений в конечных разностях

$$\pi_0(t + \Delta) = \pi_0(t)(1 - \alpha\Delta) + \Delta \int\limits_0^t \pi_1(t; u)\beta(u)\mathrm{d}u + o(\Delta),$$
$$\pi_1(t + \Delta;\, x + \Delta) = \pi_1(t; x)(1 - \alpha\Delta)(1 - \beta(x)\Delta) + o(\Delta),$$
$$\pi_2(t + \Delta;\, x + \Delta) = \pi_2(t;\, x)(1 - \beta(x)\Delta) + \pi_1(t; x)\alpha\Delta + o(\Delta)$$

с граничным условием

$$\pi_1(t + \Delta;\, \Delta)\Delta = \pi_0(t)\alpha\Delta + \Delta \int\limits_0^t \pi_2(t; u)\beta(u)\mathrm{d}u.$$

После несложных алгебраических преобразований и перехода к пределу при $\Delta \to 0$ последняя система переходит в систему дифференциальных уравнений в частных производных (4) с граничным условием (5). □

В силу конечности пространства состояний процесса и его неразложимости он обладает стационарным режимом, для вероятностей состояний которого справедливо утверждение теоремы.

Следствие 1. Для вероятностей состояний системы в стационарном режиме соответствующие уравнения примут вид

$$\begin{cases} \alpha\pi_0 = \int\limits_0^\infty \pi_1(u)\beta(u)\mathrm{d}u, \\ \dot{\pi}_1(x) = -(\alpha + \beta(x))\pi_1(x), \\ \dot{\pi}_2(x) = -\beta(x)\pi_2(x) + \alpha\pi_1(x) \end{cases} \tag{6}$$

с граничным условием

$$\pi_1(0) = \alpha\pi_0 + \int\limits_0^\infty \pi_2(u)\beta(u)\mathrm{d}u. \tag{7}$$

Решение этой системы уравнений содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Решение системы уравнений (6) имеет вид*

$$\pi_0 = C_1\alpha^{-1}\tilde{b}(\alpha),$$
$$\pi_1(x) = C_1 e^{-\alpha x}(1 - B(x)),$$
$$\pi_2(x) = C_1\left(1 - e^{-\alpha x}\right)(1 - B(x)),$$

с некоторой постоянной C_1, которая будет определена позже исходя из условия нормировки.

Доказательство. Решение второго из уравнений (6) имеет вид

$$\pi_1(x) = C_1 e^{-\alpha x}(1 - B(x)), \quad C_1 = \pi_1(0).$$

Подставляя это решение в первое из уравнений и используя для преобразования Лапласа обозначение $\tilde{b}(s) = \int e^{-sx}b(x)\mathrm{d}x$, находим

$$\pi_0 = C_1\alpha^{-1}\tilde{b}(\alpha).$$

Наконец, решение однородной части третьего из этих уравнений даёт

$$\pi_2(x) = C_2(1 - B(x)),$$

откуда методом вариации постоянной найдём

$$\dot{C}_2(x)(1 - B(x)) - C_2(x)b(x) = \frac{-b(x)}{1 - B(x)}C_2(x)(1 - B(x)) + \alpha\pi_1(x),$$

что после сокращений даёт

$$\dot{C}_2(x) = \alpha C_1 e^{-\alpha x},$$

откуда интегрированием найдём

$$C_2(x) = C_1(1 - e^{-\alpha x}) + C_2,$$

что окончательно позволяет представить $\pi_2(x)$ в виде

$$\pi_2(x) = [C_1(1 - e^{-\alpha x}) + C_2](1 - B(x)).$$

Наконец, граничное условие (7) даёт

$$C_1 = \pi_1(0) = \alpha\pi_0 + \int\limits_0^\infty \pi_2(u)\beta(u)\mathrm{d}u = C_1\tilde{b}(\alpha) + C_1(1 - \tilde{b}(\alpha)) + C_2,$$

откуда следует, что $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$\pi_2(x) = C_1\left(1 - e^{-\alpha x}\right)(1 - B(x)).$$

Для вероятностей макросостояний π_0, $\pi_i = \int \pi_i(x)\mathrm{d}x$ $(i = 1, 2)$ путём интегрирования получим утверждение теоремы.

Следствие 2. Вероятности макросостояний равны

$$\pi_0 = C_1\frac{\tilde{b}(\alpha)}{\alpha}, \quad \pi_1 = C_1\frac{1-\tilde{b}(\alpha)}{\alpha}, \quad \pi_2 = C_1\frac{\alpha b - (1-\tilde{b}(\alpha))}{\alpha}. \tag{8}$$

Для определения постоянной C_1 воспользуемся условием нормировки

$$1 = C_1\left[\alpha^{-1}\tilde{b}(\alpha) + \alpha^{-1}(1-\tilde{b}(\alpha)) + b - \alpha^{-1}(1-\tilde{b}(\alpha))\right].$$

Из последнего соотношения с использованием обозначения $\rho = \alpha b$ получим следующее следствие.

Следствие 3. Постоянная C_1 определяется соотношением

$$C_1 = \frac{\alpha}{\rho + \tilde{b}(\alpha)}. \tag{9}$$

Объединяя полученные результаты для стационарных макровероятностей состояний системы $\langle M_2/GI/1\rangle$, получим выражения, представленные в следующем следствии.

Следствие 4. Вероятности макро-состояний равны

$$\pi_0 = \frac{\tilde{b}(\alpha)}{\rho + \tilde{b}(\alpha)}, \quad \pi_1 = \frac{1-\tilde{b}(\alpha)}{\rho + \tilde{b}(\alpha)}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha b - (1-\tilde{b}(\alpha))}{\rho + \tilde{b}(\alpha)}. \tag{10}$$

Замечание 1. Зависимость вероятностных характеристик системы от вида ф.р. времени ремонта носит достаточно сложный характер и выражается в терминах её преобразования Лапласа (производящей функции).

Замечание 2. При показательном распределении в.б.р. $B(x) = 1 - e^{-\beta x}$ элементов $\tilde{b}(\alpha) = \beta(\alpha+\beta)^{-1}$ постоянная C_1 имеет вид

$$C_1 = \beta\frac{\rho(1+\rho)}{1+\rho+\rho^2},$$

а распределение вероятностей состояний системы имеет вид

$$\pi_0 = C_1\alpha^{-1}\tilde{b}(\alpha) = \frac{1}{1+\rho+\rho^2},$$
$$\pi_1 = C_1\alpha^{-1}(1-\tilde{b}(\alpha)) = \frac{\rho}{1+\rho+\rho^2},$$
$$\pi_2 = C_1\alpha^{-1}(\alpha b - (1-\tilde{b}(\alpha))) = \frac{\rho^2}{1+\rho+\rho^2}$$

и совпадает с приведённым ранее для марковского случая (3).

5. Система холодного резервирования $\langle GI_2/M/1\rangle$

Рассмотрим теперь аналогичную систему с произвольно распределённым в.б.р. элементов и показательно распределённым временем ремонта, при этом для простоты предполагается холодное резервирование, так что одновременно может работать только один элемент.

Используя в качестве дополнительной переменной $X(t)$ время, прошедшее с момента очередного начала работы прибора, и вводя п.р. вероятностей состояний

$$\pi_i(t;x)\mathrm{d}x = \mathbf{P}\{N(t)=i;\ x < X(t) \leqslant x+\mathrm{d}x\} \quad (i=0,1),$$
$$\pi_2(t) = \mathbf{P}\{N(t)=2\},$$

аналогично предыдущему случаю для этих функций несложно получить систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Теорема 3. *Функции $\pi_i(t;x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\pi_0(t;\,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial\pi_0(t;\,x)}{\partial x} = -\alpha(x)\pi_0(t;\,x) + \beta\pi_1(t;x), \\ \dfrac{\partial\pi_1(t;\,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial\pi_1(t;x)}{\partial x} = -(\alpha(x)+\beta)\pi_1(t;\,x), \\ \dfrac{d\pi_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta\pi_2(t) + \displaystyle\int_0^t \alpha(u)\pi_1(t;\,u)\mathrm{d}u \end{cases} \tag{11}$$

с граничным условием

$$\pi_1(t;\,0) = \int_0^t \pi_0(t;u)\alpha(u)\mathrm{d}u + \beta\pi_2(t). \tag{12}$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично теореме 1 с помощью формулы полной вероятности путём составления конечно-разностных уравнений и сравнения вероятностей состояний процесса в моменты времени t и $t+\Delta$ с последующим переходом к пределу при $\Delta \to 0$. □

Следствие 5. Для вероятностей состояний системы в стационарном режиме соответствующие уравнения примут вид

$$\begin{cases} \dot{\pi}_0(x) = -\alpha(x)\pi_0(x) + \beta\pi_1(x), \\ \dot{\pi}_1(x) = -(\alpha(x)+\beta)\pi_1(x), \\ \pi_2 = \beta^{-1}\displaystyle\int_0^\infty \pi_1(u)\alpha(u)\mathrm{d}u \end{cases} \tag{13}$$

с граничным условием

$$\pi_1(0) = \int_0^\infty \pi_0(u)\alpha(u)\mathrm{d}u + \beta\pi_2. \tag{14}$$

Следующая теорема содержит решение этой системы уравнений.

Теорема 4. *Решение системы уравнений (13, 14) имеет вид*

$$\pi_0(x) = C_1(1-e^{-\beta x})(1-A(x)),$$
$$\pi_1(x) = C_1 e^{-\beta x}(1-A(x)),$$
$$\pi_2 = C_1\beta^{-1}\tilde{a}(\beta)$$

с некоторой постоянной C_1, которая будет определена позже, исходя из условия нормировки.

Доказательство. Решение второго из этих уравнений имеет вид

$$\pi_1(x) = C_1 e^{-\beta x}(1 - A(x)), \quad C_1 = \pi_1(0).$$

При этом из третьего уравнения сразу следует, что

$$\pi_2 = C_1 \beta^{-1} \tilde{a}(\beta).$$

Наконец, однородная часть первого уравнения даёт $\pi_0(x) = C_0(1 - A(x))$, а использование метода вариации постоянной приводит к следующему уравнению для $C_0(x)$:

$$\dot{C}_0(x)(1 - A(x)) - C_0(x)a(x) = -\alpha(x)C_0(1 - A(x)) + \beta C_1 e^{-\beta x}(1 - A(x)),$$

откуда следует $\dot{C}_0(x) = C_1 \beta e^{-\beta x}$ или $C_0(x) = -C_1 e^{-\beta x} + C_0$.

Таким образом имеем

$$\pi_0(x) = (C_0 - C_1 e^{-\beta x})(1 - A(x)).$$

Для определения постоянной C_0 воспользуемся граничным условием (14), которое принимает вид

$$C_1 = \pi_1(0) = \int [\pi_0(x) + \pi_1(x)]\alpha(x)\mathrm{d}x = \int [(C_0 - C_1 e^{-\beta x}) + C_1 e^{-\beta x}]a(x)\mathrm{d}x = C_0$$

и позволяет выразить постоянную C_0 в виде $C_0 = C_1$. Отсюда для $\pi_0(x)$ окончательно найдём

$$\pi_0(x) = C_1(1 - e^{-\beta x})(1 - A(x)).$$

Наконец, для вероятностей макросостояний путём интегрирования получим следующее следствие.

Следствие 6. Вероятности макросостояний определяются формулами

$$\begin{cases} \pi_0 = \int\limits_0^\infty \pi_0(x)\mathrm{d}x = C_1 \left[a - \dfrac{1 - \tilde{a}(\beta)}{\beta}\right], \\ \pi_1 = \int\limits_0^\infty \pi_1(x)\mathrm{d}x = C_1 \beta^{-1}(1 - \tilde{a}(\beta)), \\ \pi_2 = C_1 \beta^{-1} \tilde{a}(\beta). \end{cases} \tag{15}$$

Для определения постоянной C_1 следует воспользоваться условием нормировки

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = C_1 \beta^{-1} \left[a\beta - (1 - \tilde{a}(\beta)) + (1 - \tilde{a}(\beta)) + \tilde{a}(\beta)\right] = C_1 \beta^{-1}[a\beta + \tilde{a}(\beta)].$$

Следствие 7. Постоянная C_1 имеет вид

$$C_1 = \frac{\beta}{\rho^{-1} + \tilde{a}(\beta)}, \tag{16}$$

где $\rho^{-1} = a\beta$.

Объединение соотношений (15, 16) приводит к окончательному результату в форме следующего следствия.

Следствие 8. Вероятности макросостояний определяются формулами

$$\begin{cases} \pi_0 = (a\beta - (1-\tilde{a}(\beta)))(a\beta + \tilde{a}(\beta))^{-1} = (\rho^{-1} - (1-\tilde{a}(\beta)))(\rho^{-1} + \tilde{a}(\beta))^{-1}, \\ \pi_1 = (1-\tilde{a}(\beta))(a\beta + \tilde{a}(\beta))^{-1} = (1-\tilde{a}(\beta))(\rho^{-1} + \tilde{a}(\beta))^{-1}, \\ \pi_2 = \tilde{a}(\beta)(a\beta + \tilde{a}(\beta))^{-1} = \tilde{a}(\beta)(\rho^{-1} + \tilde{a}(\beta))^{-1}. \end{cases} \tag{17}$$

Замечание 3. Зависимость вероятностных характеристик системы от вида ф.р. времени жизни носит достаточно сложный характер и выражается в терминах её производящей функции в точке, равной интенсивности ремонта.

Замечание 4. При показательном распределении в.б.р. $A(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ элементов

$$\tilde{a}(\beta) = \alpha(\alpha + \beta)^{-1} = \frac{\rho}{1+\rho}$$

и распределение вероятностей состояний системы совпадает с приведённым ранее для марковского случая (3):

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{a\beta - (1-\tilde{a}(\beta))}{\rho^{-1} + \tilde{a}(\beta)} = \frac{\rho^{-1} - (1+\rho)^{-1}}{\rho^{-1} + \rho(1+\rho)^{-1}} = \frac{1}{1+\rho+\rho^2}, \\ \pi_1 &= \frac{1-\tilde{a}(\beta)}{\rho^{-1} + \tilde{a}(\beta)} = \frac{\rho}{1+\rho+\rho^2}, \\ \pi_2 &= \frac{\tilde{a}(\beta)}{\rho^{-1} + \tilde{a}(\beta)} = \frac{\rho^2}{1+\rho+\rho^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

6. Численный анализ систем

Для численного анализа рассмотрим два примера, когда в качестве общих распределений GI используются Гамма-распределение (Γ) с функцией плотности

$$p(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{c-1}}{\Gamma(c)} e^{-\lambda t}$$

и функция распределения Вейбулла–Гнеденко ($W - G$) с функцией плотности

$$p(t) = c\lambda^c t^{c-1} e^{-(\lambda t)^c},$$

где c — параметр формы, λ — параметр скорости.

Подстановка этих распределений в общие формулы (10) и (17) даёт следующие результаты.

Теорема 5. *1. Для системы $\langle M_2/\Gamma/1\rangle$*

$$\pi_2(\beta) = 1 - \frac{1}{(\rho + \tilde{b}(\alpha))} = 1 - \frac{\beta(1+c\beta)^c}{(1+c\beta)^c + c^c\beta^{c+1}},$$

где $\beta = \lambda/c$, $\rho = \alpha b = 1/\beta$, $a = \alpha = 1$.

2. Для системы $\langle\Gamma_2/M/1\rangle$

$$\pi_2(\beta) = \frac{\tilde{a}(\beta)}{\rho^{-1} + \tilde{a}(\beta)} = \frac{c^c}{c^c + \beta(c+\beta)^c},$$

где $\lambda = c$, $\rho^{-1} = a\beta = \beta$, $a = \alpha = 1$.

3. Для системы $\langle M_2/W - G/1\rangle$

$$\tilde{b}(\alpha) = \int\limits_0^\infty c(\beta g)^c t^{c-1} e^{-(t+(\beta g t)^c)} dt,$$

$$\pi_2(\beta) = 1 - \frac{1}{(\rho + \tilde{b}(\alpha))} = 1 - \frac{\beta}{(1 + \beta\tilde{b}(\alpha))},$$

где $g = \Gamma(1 + \frac{1}{c})$, $\beta = \lambda/g$, $\rho = \alpha b = 1/\beta$, $a = \alpha = 1$.

4. Для системы $\langle W - G_2/M/1\rangle$

$$\tilde{a}(\beta) = \int\limits_0^\infty c g^c t^{c-1} e^{-(\beta t+(gt)^c)} dt,$$

$$\pi_2(\beta) = \frac{\tilde{a}(\beta)}{\rho^{-1} + \tilde{a}(\beta)} = \frac{\tilde{a}(\beta)}{\beta + \tilde{a}(\beta)},$$

где $g = \Gamma(1 + \frac{1}{c})$, $\lambda = g$, $\rho^{-1} = a\beta = \beta$, $a = \alpha = 1$.

Результаты численного анализа приведены в виде таблиц и графиков. В табл. 1 и 2 приведены значения вероятностей отказа $\pi_2(\beta)$ систем $\langle M_2/\Gamma/1\rangle$ и $\langle \Gamma_2/M/1\rangle$ при различных значениях параметров c и β.

На рис. 1–4 представлены графики функций вероятностей отказа $\pi_2(\beta)$ систем различного вида в зависимости от скорости ремонта β при различных значениях параметра c.

Таблица 1

Стационарные вероятности отказа $\pi_2(\beta)$ системы $\langle M_2/\Gamma/1\rangle$

$\pi_2(\beta)$	$c = 0,1$	$c = 0,5$	$c = 1,0$	$c = 5,0$	$c = 10$
$\beta = \lambda/c = 1$	$0,4403$	$0,3660$	$0,3333$	$0,2867$	$0,2783$
$\beta = \lambda/c = 10$	$0,0320$	$0,0127$	$0,0090$	$0,0057$	$0,0053$
$\beta = \lambda/c = 100$	$5,1399 \cdot 10^{-4}$	$1,4752 \cdot 10^{-4}$	$9,9 \cdot 10^{-5}$	$5,9718 \cdot 10^{-5}$	$5,4778 \cdot 10^{-5}$

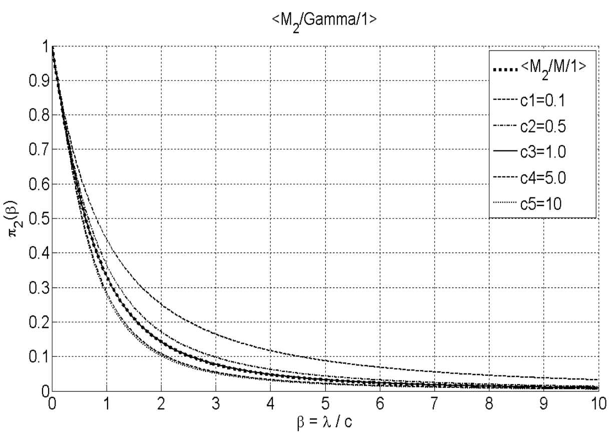

Рис. 1. Функции вероятности отказа $\pi_2(\beta)$ системы $\langle M_2/\Gamma/1\rangle$

Таблица 2

Стационарные вероятности отказа $\pi_2(\beta)$ системы $\langle\Gamma_2/M/1\rangle$

$\pi_2(\beta)$	$c = 0,1$	$c = 0,5$	$c = 1,0$	$c = 5,0$	$c = 10$
$\beta = 1(\lambda = c)$	$0,4403$	$0,3660$	$0,3333$	$0,2867$	$0,2783$
$\beta = 10(\lambda = c)$	$0,0593$	$0,0214$	$0,009$	$4,1135 \cdot 10^{-4}$	$9,7647 \cdot 10^{-5}$
$\beta = 100(\lambda = c)$	$0,005$	$7,0485 \cdot 10^{-4}$	$9,9 \cdot 10^{-5}$	$2,4485 \cdot 10^{-9}$	$3,8554 \cdot 10^{-13}$

Результаты численного анализа показывают, что вероятности отказа систем $\langle M_2/\Gamma/1\rangle$ и $\langle\Gamma_2/M/1\rangle$ мало отличаются друг от друга и с ростом параметра β быстро сходятся к нулю тем быстрее, чем больше параметр c. В частности, при $c =$ 1.0 график совпадает с функцией вероятности отказа системы $\langle M_2/M/1\rangle$. Таким образом, несмотря на явную зависимость вероятностей отказа систем от вида ф.р. в.б.р. и времени ремонта, она становится исчезающе малой при «быстром» восстановлении.

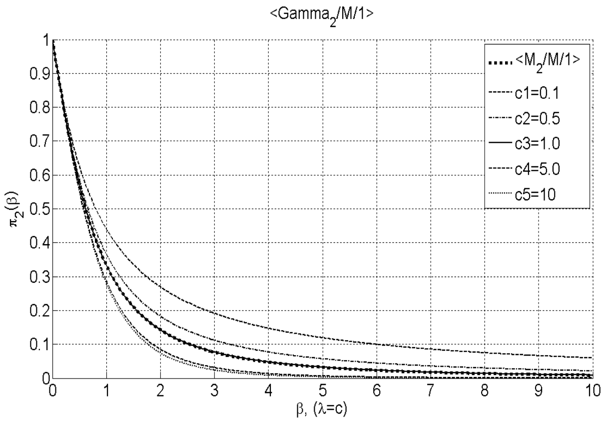

Рис. 2. Функции вероятности отказа $\pi_2(\beta)$ системы $\langle\Gamma_2/M/1\rangle$

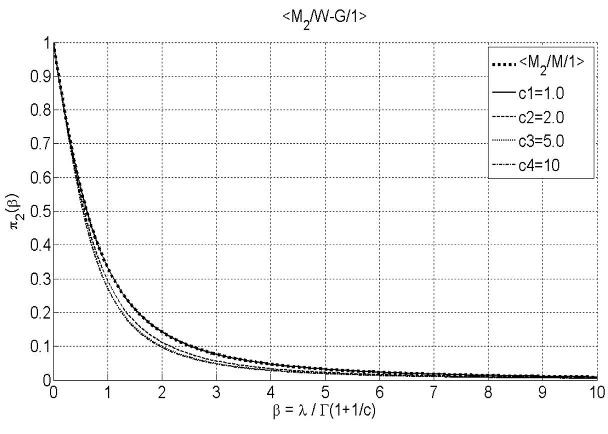

Рис. 3. Функции вероятности отказа $\pi_2(\beta)$ системы $\langle M_2/W - G/1\rangle$

Аналогичным образом, когда в качестве общего распределения GI используется распределение Вейбулла-Гнеденко, результаты численного анализа показывают, что вероятности отказа систем $\langle M_2/W - G/1\rangle$ и $\langle W - G_2/M/1\rangle$ быстро сходится к нулю с ростом параметра β тем быстрее, чем больше параметр c. В

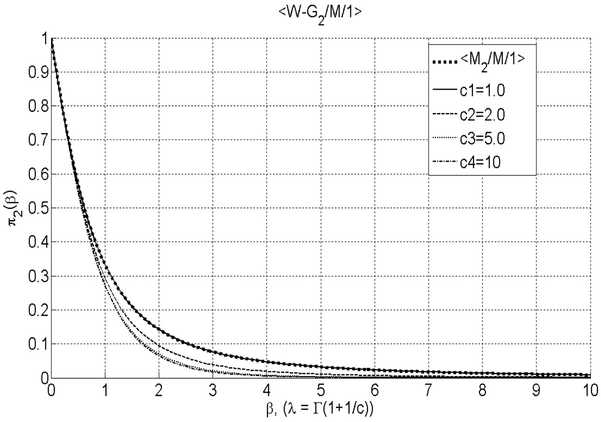

Рис. 4. Функции вероятности отказа $\pi_2(\beta)$ системы $\langle W - G_2/M/1\rangle$

частности, при $c = 1,0$ график совпадает с функцией вероятности отказа системы $\langle M_2/M/1\rangle$.

Из графиков видно также, что вероятности отказа систем $\langle M_2/\Gamma/1\rangle$ и $\langle M_2/W-G/1\rangle$ или $\langle \Gamma_2/M/1\rangle$ и $\langle W - G_2/M/1\rangle$ близки друг другу, что показывает незначительную чувствительность вероятности отказа этих систем к виду распределений в.б.р. и времени восстановления.

7. Заключение

В данной статье рассмотрена проблема чувствительности характеристик надёжности систем $\langle M_2/GI/1\rangle$ и $\langle GI_2/M/1\rangle$ к виду ф.р. в.б.р. и времени восстановления её элементов при ограничениях на доступность восстановления. Получены явные выражения для зависимости стационарных вероятностей состояний систем от вида распределений в.б.р. и времени восстановления. Тем не менее численные расчёты показывают, что эта зависимость незначительна и становится исчезающе малой при «быстром» восстановлении.

В частности, в результате численного анализа с помощью программного средства MATLAB показано, что когда вместо общего распределения GI используются Гамма-распределение и распределение Вейбулла–Гнеденко, вероятности отказа систем $\langle M_2/GI/1\rangle$ и $\langle GI_2/M/1\rangle$ быстро сходятся к нулю с ростом скорости ремонта β тем быстрее, чем больше параметр c. В частности, при $c = 1.0$ соответствующие характеристики совпадают с вероятностью отказа системы для $\langle M_2/M/1\rangle$.

Литература

1. *Севастьянов Б. А.* Предельная теорема для марковских процессов и ее применение в телефонных системах с отказом // Теория вероятностей и ее применения. — 1957. — Т. 2, № 1.
2. *Коваленко И. Н.* Исследования по анализу сложных систем надежности. — Киев: Наукова думка, 1976. — 210 с.
3. *Rykov V. V.* Multidimensional Alternative Processes as Reliability Models. — Springer, 2013. — Pp. 147–157.
4. *Кениг Д., Рыков В., Штойн Д.* Теория массового обслуживания. — Москва, 1979. — 115 с.

UDC 519.718: 658.652

On Sensitivity of Systems Reliability Characteristics to the Shape of Their Elements Life and Repair Time Distributions

V. V. Rykov*, **Anh Nghia Tran**†

* *Gubkin Russian State University of Oil and Gas*

† *Peoples' Friendship University of Russia*

6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russian Federation, 117198

The paper deals with the problem of the systems $\langle M_2/GI/1\rangle$ and $\langle GI_2/M/1\rangle$ reliability characteristics sensitivity to the shape of their elements life and repair times distributions under restrictions on the availability of recovery. Partial differential equation for the time dependent and usual differential equations for the stationary micro-state probabilities of these systems are proposed. Explicit expressions for the micro- and macro-state stationary probabilities of these systems are given and they show their strong dependability on the shape of their elements life and repair times distributions. This dependence represents in terms of moment generation functions non-exponential distribution in the point of the exponential distribution parameters.

Special software tool based on the MATLAB computer system has been developed for the numerical analysis of the system failure probability sensitivity to the shape of its elements life and recovery distributions and its comparison with the simplest Markov system. The numerical analysis shows that this dependence becomes negligible and vanishes for "fast" recovery (with recovery rate increasing). In particular, it has been shown that the failure probabilities of the systems $\langle M_2/GI/1\rangle$ and $\langle GI_2/M/1\rangle$ with Gamma and Weibull–Gnedenko distributions instead of the general ones quickly converge to zero with increasing recovery rate and coincide with the simplest Markov system $\langle M_2/M/1\rangle$ for special value of the particular value of the parameter $c = 1.0$.

Key words and phrases: reliability systems, failure probabilities, sensitivity to the shape elements life and recovery time distributions, micro- and macro-states, stationary and non-stationary probabilities.

References

1. B. A. Sevast'yanov, Limit Theorem for Markov Processes and its Application to Telephone Systems with Rejection, Probability Theory and its Applications 2 (1) (1957) 363–388, in Russian.
2. I. N. Kovalenko, Investigations on Analysis of Complex Systems Reliability, Naukova Dumka, Kiev, 1976, in Russian.
3. V. V. Rykov, Multidimensional Alternative Processes as Reliability Models, Springer, 2013, pp. 147–157.
4. D. Koenig, V. Rykov, D. Schtoyn, Queueing Theory, Gubkin University Press, Moscow, 1979, in Russian.